+UNIVERSITE DES FRERES MENTOURI CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES DE LA TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENI CIVIL

Auteur : DOCTEUR KHEBIZI MOURAD
MAITRE DE CONFERENCES « A »

COURS ET EXERCICES DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Master I : Géotechnique

Année universitaire 2020-2021

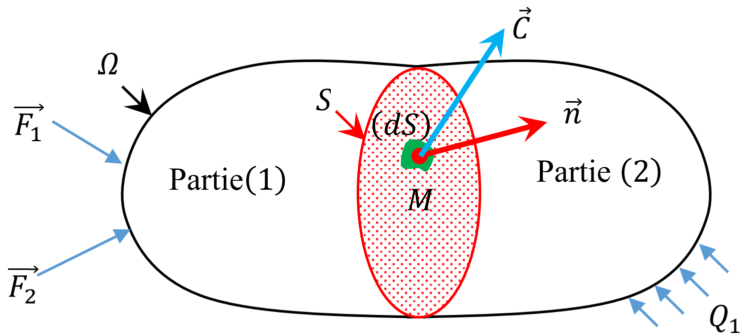
Contenu de la matière

Chapitre 1 : Théorie de l'état des contraintes
Chapitre 2 : Théorie de l'état des Déformations
Chapitre 3 : Relations de comportement (relations entre contraintes et les déformations)

Théorie des contraintes

1. Vecteur contrainte

Soit un solide sollicité extérieurement par des forces (forces ponctuelles, forces réparties, …). Soit S une surface de séparation de la partie 1 sur la partie 2.



F_1 et F_2 sont des forces extérieures ponctuelles ;

Q_1 : Force extérieure répartie

Figure 1. Solide en équilibre

Autour d'un point M, on choisi, un petite élément de surface dS.

$\vec{n}$: la normale unitaire sortante de dS

Avec $\|\vec{n}\| = 1$

Les actions exercées par la partie 2 sur la partie 1 à travers dS ont pour résultante $\overrightarrow{df}$. La contrainte agissant sur la section élémentaire dS au point M est obtenue par l'expression suivante :

$$\vec{C} = \lim_{n \to 0} \frac{\overrightarrow{df}}{dS}$$

Le vecteur $\vec{C}$ est appelé vecteur contrainte.

Le vecteur contrainte $\vec{C}$ est défini par le rapport entre l'élément de force $\overrightarrow{df}$ appliqué sur l'élément de surface dS ($dS \ll 1$).
Le vecteur contrainte en M sur une face de normale $\vec{n}$ est défini par

$$\vec{C}(M,\vec{n}) = \frac{\overrightarrow{df}}{dS}$$

Contrainte : ensemble des forces surfaciques s'exerçant sur un élément d'un milieu continu.
Ces forces peut être :
Normales à la surface ou tangentielles :

$$\vec{C}(M,\vec{n}) = \sigma_n.\vec{n} + \tau.\vec{t}$$

La composante normale du vecteur contrainte :

$$\sigma_n = \vec{C}(M,\vec{n}).\vec{n}$$

La composante tangentielle du vecteur contrainte :

$$\tau = \vec{C}(M,\vec{n}).\vec{t}$$

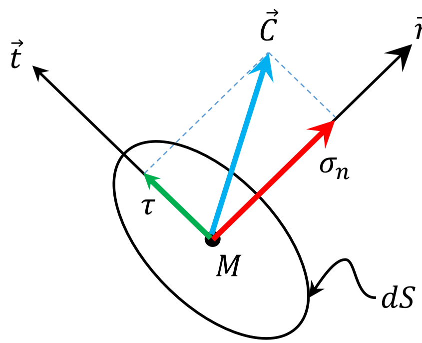


Figure 2. Composantes du vecteur contrainte

2. Tenseur de contraintes

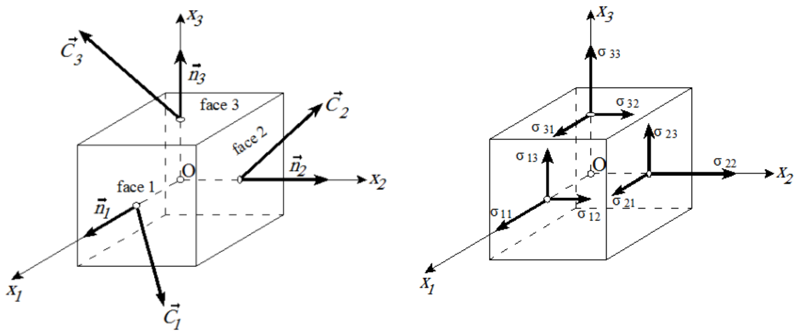
Principe de Cauchy – Euler

Considérons un parallélépipède de matière construit autour de l'origine O d'un système d'axes (x_i) cartésien (figure 3).

Sur les trois facettes positives normales aux axes agissent les vecteurs contraintes $\overrightarrow{C_1}$,$\overrightarrow{C_2}$ et $\overrightarrow{C_3}$ (figure 3a). Chacun d'eux a trois composantes parallèles aux axes :

- une composante normale σ_{ii} (pas de somme).
- deux composantes tangentielles σ_{ij} $(i \neq j)$.

Le premier indice indique la face sur laquelle la composante agit, le second l'axe auquel la composante est parallèle. La composante est positive si elle agit dans le sens de l'axe, sur la face positive (fig.3b). Sur la face négative, le sens positif est inversé en vertu du principe de l'action et de la réaction.



a. Vecteurs contraintes sur trois facettes   b. Composantes σ_{ij}

Figure 3- Convention de signe et notation

Le vecteur de contrainte

$$\vec{C}\left(M, \overrightarrow{df}, ds\right) = \lim_{n \to 0} \frac{\overrightarrow{df}}{dS}$$

Au point M : $\vec{C} = \vec{C}\left(\overrightarrow{df}, \overrightarrow{ds}\right)$

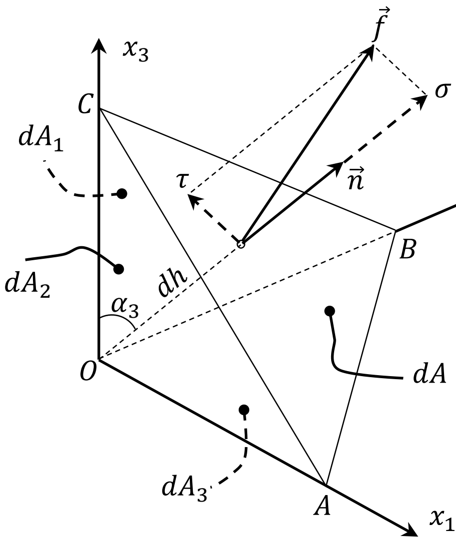
On appelle tenseur de contraintes σ_{ij} , le tenseur suivent :

$$\sigma_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow C_1 \\ \leftarrow C_2 \\ \leftarrow C_3 \end{array} \end{array}$$

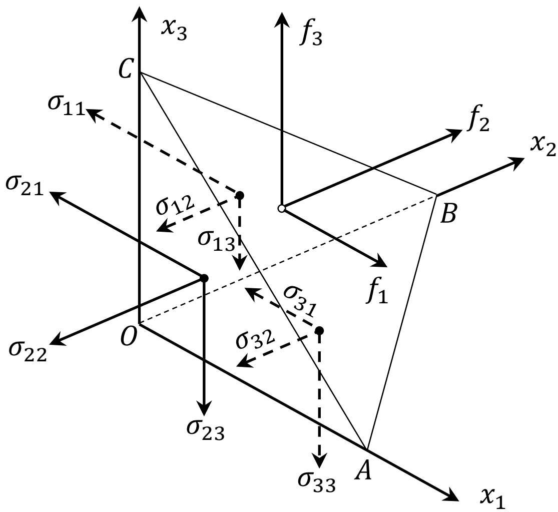
3. Formule fondamentale de Cauchy

La formule fondamentale de Cauchy est :

$$\vec{C} = \sigma_{ij}.\vec{n}$$



a.



b.

Figure 4- Tétraèdre élémentaire de Cauchy

4. Equation de mouvement

Cas unidimensionnel

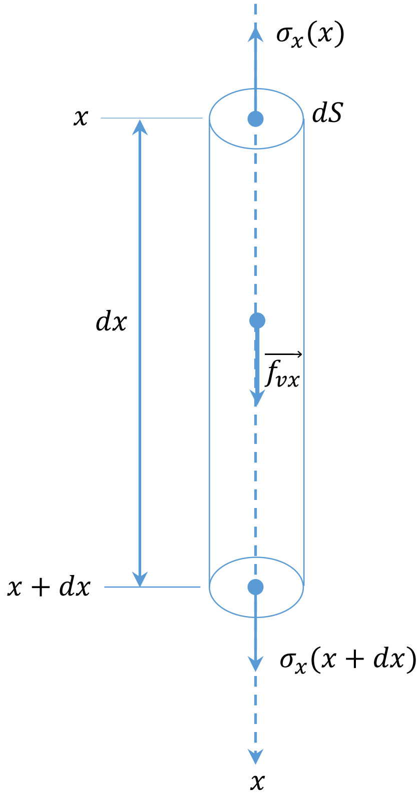


Figure 5 :

$\sigma_x(x)$agit sur la facette positionnée en x.
$\sigma_x(x + dx)$agit sur la facette positionnée en $(x + dx)$.

A partir de l'équation d'équilibre nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + f_{vx} = 0$$

Cas bidimensionnel

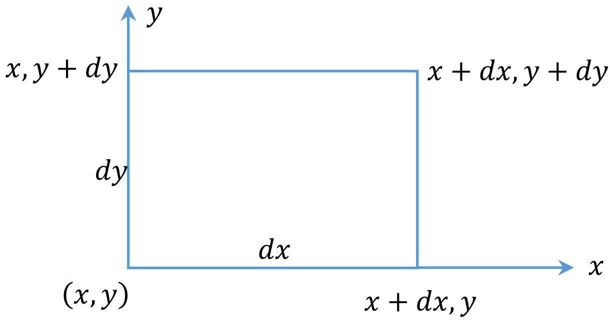


Figure 6 :

A partir des équations d'équilibre nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + f_{vx} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_{vy} = 0$$

Généralisation

$$div(\sigma_{ij}) + f_{vj} = 0$$

Equilibre Rotationnel

A partir des équations d'équilibre, la somme des moments par rapport au centre = 0, nous pouvons démontrer :

$$\left(\sigma_{yx} - \sigma_{xy}\right) dxdydz = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{yx} = \sigma_{xy}$$

Généralisation : De même façons : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ si $i \neq j$.

Donc le tenseur de contraintes est symétrique

5. Condition à la surface

$$\vec{C} = \sigma_{ij}.\vec{n}$$

La condition à la surface est :

$$\sigma_{ij}.\vec{n} = \vec{F} \ \ sur\ A_\sigma$$

Avec A_σ : partie de la surface extérieure du solide pour laquelle les contraintes sont connues.

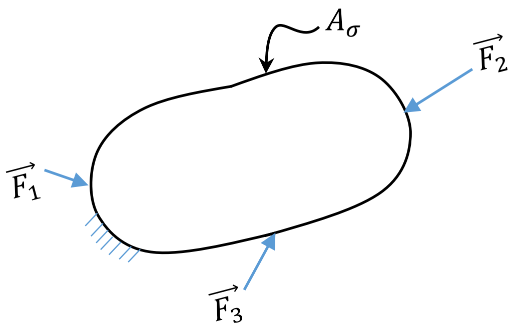


Figure 7 :

6. Décomposition du tenseur de contrainte

$$\sigma_{ij} = \sigma_0\delta_{ij} + S_{ij}$$

Avec

S_{ij} : Tenseur déviateur des contraintes

$\sigma_0\delta_{ij}$: Tenseur contrainte sphérique

σ_0 : Contrainte normale moyenne.

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$$

7. Contrainte principales, directions principales et les invariants

$$I_\sigma = \sigma_{ii}$$
$$II_\sigma = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}\right)$$
$$III_\sigma = det\sigma$$

$$det\left[\sigma_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right] = \det(\sigma - \lambda I) = 0$$

$$-\lambda^3 + I_\sigma\lambda^2 - II_\sigma\lambda + III_\sigma = 0$$

$$\lambda_I = \sigma_I \geq \lambda_{II} = \sigma_{II} \geq \lambda_{III} = \sigma_{III}$$