ANALYSE I

Omar Boukhadra

Dép. Mathématiques
Faculté des Sciences Exactes
Université de Constantine 1
boukhadra@umc.edu.dz

22 octobre 2022

Ces notes de cours constituent une introduction à l'analyse mathématique, ce qui, avec le cours d'algèbre ($cf.$[6]), *forment le programme de mathématiques à l'intention des étudiants de* L1-SM. *Le présent cours, basé sur* [5], *donne d'abord une présentation axiomatique du corps des nombres réels, suivi des suites numériques où on verra les premières notions de limites. Ensuite, nous définissons la fonction réelle qui constitue l'objet d'étude basique. Nous intéresserons à ses notions de limites, de continuité et de dérivation qui est suivie de l'opération inverse, à savoir l'intégration. Nous parlerons après des développements limités comme approximations des fonctions réelles, et enfin, nous aborderons sommairement les équations différentielles.*

Contenu

1 Nombres réels

Les principes de la théorie des ensembles permettent la construction rigoureuse de l'ensemble des nombres réels. Nous nous contentons toutefois dans les présentes notes de cours de donner les axiomes qui définissent l'ensemble des nombres réels et les règles de l'arithmétique qui en découlent. La représentation décimale des nombres réels est admise encore que sa démonstration est assez facile à établir.

1.1 Axiomiomatique des réels

L'**ensemble des nombres réels** ou *corps* des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, est l'*extension* de l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ muni des deux opérations ou lois de composition internes naturelles, c'est-à-dire l'**addition** ou la **somme** : $(x, y) \longmapsto x + y$ et la **multiplication** ou le **produit** : $(x, y) \longmapsto x \cdot y = xy$, et d'une **relation d'ordre** $\leq$, lesquelles satisfont les **treize axiomes** suivants.

Axiomes de l'arithmétique

Le point de départ dans la définition axiomatique des nombres réels, ce sont les neuf axiomes suivants, dits **axiomes de l'arithmétique**. En premier, on a la **commutativité** et l'**associativité**,

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x + y = y + x \tag{A1}$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad x + (y + z) = (x + y) + z \tag{A2}$$

Grâce aux deux premiers axiomes (A1) et (A2), commutativité et associativité, on peut écrire la somme de trois nombres réels, ou réels tout court, sous la forme simple $x + y + z$, et par conséquent, nous pouvons définir la somme d'un nombre fini de nombres réels $x_i, i = 1, \dots, n$, que l'on représente sous la forme

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Dans le cas où les x_i sont égaux à un même réel x, on écrit

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = nx$$

En second lieu, il existe un **élément neutre** pour l'addition ou **zéro**, noté 0, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un élément dit **symétrique** ou **opposé** de x, noté $-x$,

$$\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : \quad 0 + x = x \tag{A3}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists - x \in \mathbb{R} : \quad x + (-x) = x - x = 0 \tag{A4}$$

Ces quatre premiers axiomes donnent ainsi la structure de **groupe abélien additif** à l'ensemble $\mathbb{R}$. Notons en particulier que le zéro et l'opposé d'un élément sont unique. En effet, si $0'$ était un autre zéro, alors

$$0' = 0' + 0 = 0$$

En même temps, si $-x$ et $(-x)'$ étaient deux opposés d'un même réel x, nous aurions par (A1–A2) et (A3)

$$(-x)' = (-x)' + (x - x) = ((-x)' + x) - x = 0 - x = -x$$

Quant à la multiplication, on a aussi respectivement la **commutativité** et l'**associativité**, et de plus, la **distributivité** de la multiplication sur l'addition,

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad xy = yx \tag{A5}$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad x(yz) = (xy)z \tag{A6}$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad x(y + z) = xy + xz \tag{A7}$$

Idem pour la multiplication en vertu des axiomes (A5) et (A6) : on note la multiplication de trois nombres réels x, y, z par xyz et le produit d'un nombre fini de réels $x_i, i = 1, \dots, n$ est écrite sous la forme

$$x_1 x_2 \cdots x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Si $x_i = x$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, on écrit

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x^n,$$

qui se lit x puissance n. On pose

$$x^0 = 1, \qquad x^{-n} = (x^{-1})^n$$

Et 0^0 n'est pas défini. On vérifie facilement grâce à la commutativité et l'associativité de la multiplication que pour tous réels non nuls x, y et pour tous $n, m \in \mathbb{Z}^*$, nous avons

$$(xy)^n = x^n y^n, \qquad x^{n+m} = x^n x^m, \qquad (x^n)^m = (x^m)^n = x^{nm}. \tag{1.1}$$

Il existe dans $\mathbb{R}$ un **élément neutre multiplicatif** ou **unité**, noté 1, i.e.

$$\forall x \in \mathbb{R} : \qquad 1\,x = x \tag{A8}$$

Notons que jusqu'à maintenant, l'ensemble $\mathbb{R}$ est un **anneau commutatif unitaire**.

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, il existe un élément dans $\mathbb{R}$, dit **inverse** de x, noté $x^{-1} = 1/x$, autrement dit tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists x^{-1} \in \mathbb{R}^* : \, xx^{-1} = 1 \tag{A9}$$

Observons que l'unité et l'inverse sont uniques. En effet, si $1'$ était une autre unité pour la multiplication, nous aurions

$$1' = 1'1 = 1$$

Et si x^{-1} et $(x^{-1})'$ étaient deux inverses d'un réel non nul x, i.e. $x \neq 0$, nous aurions par (A5–A6) et (A7)

$$(x^{-1})' = (x^{-1})'1 = (x^{-1})'xx^{-1} = ((x^{-1})'x)x^{-1} = 1x^{-1} = x^{-1}$$

Ainsi, l'ensemble $\mathbb{R}$, avec ces 9 premiers axiomes de l'arithmétique, constitue un **corps commutatif**.

Nous avons enfin deux conséquences importantes à noter. D'une part, la distributivité nous apprend que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \qquad 0\,x = 0$$

En effet, observons que

$$0\,x = (0+0)\,x = 0\,x + 0\,x,$$

et par soustraction de $0x$ (i.e. additionner $-0x$), on a

$$0\,x - 0\,x = 0x \Longrightarrow 0\,x = 0$$

Par conséquent, le zéro n'a pas d'inverse, sinon on aurait

$$0 = 00^{-1} = 1,$$

ce qui est exclu. D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(-1)\,x + x = (-1+1)\,x = 0\,x = 0,$$

ce qui donne

$$(-1)\,x = -x \tag{1.2}$$

Axiomes de l'ordre

L'ensemble $\mathbb{R}$ doit être en même temps totalement ordonné. Pour ce faire, on pose les axiomes suivants, dits **axiomes de l'ordre**. Soit x, y, z dans $\mathbb{R}$:

$$x \leq y \text{ ou } y \leq x; \tag{A10}$$

$$x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z; \tag{A11}$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \Longrightarrow xy \geq 0 \tag{A12}$$

Nous pouvons tirer des trois derniers axiomes en plus des propriétés d'une relation d'ordre, réflexivité, transitivité et antisymétrie, les propriétés usuelles suivantes :

Proposition 1.1 *Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors, on a*

$$\begin{aligned}
&(1)\ x \geq y \Longrightarrow x - y \geq 0\\
&(2)\ x \geq y, z \geq 0 \Longrightarrow xz \geq yz\\
&(3)\ x \geq y, z < 0 \Longrightarrow xz \leq yz\\
&(4)\ x \geq y, a \geq b \Longrightarrow x + a \geq y + b\\
&(5)\ x \geq y \geq 0, a \geq b \geq 0 \Longrightarrow xa \geq yb
\end{aligned}$$

De plus, ces dernières propriétés donnent les suivantes :

Proposition 1.2 *On a*

$$
\begin{aligned}
&(6)\ 1 > 0\\
&(7)\ x > 0 \Longrightarrow -x < 0 \wedge x^{-1} > 0\\
&(8)\ x > 1 \Longrightarrow x^{-1} < 1\\
&(9)\ x \neq 0 \Longrightarrow x^2 > 0
\end{aligned}
$$

On définit dans $\mathbb{R}$, en tant qu'ensemble totalement ordonné, une famille de sous-ensembles particuliers dits **intervalles**. En premier, nous notons

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, \infty),\\
&\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \leq 0\} = (-\infty, 0]\\
&\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}
$$

Les réels x tels que $x > 0$ sont dit **positifs** et ceux tels que $x < 0$ sont dit **négatifs**, si $x = 0$, on dit que x est **nul**. Et aussi, pour a et b deux réels tels que $a < b$, on définit un intervalle **borné et ouvert** comme étant la partie de $\mathbb{R}$ telle que

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \quad a < x < b\}.$$

Pareillement, on définit un intervalle **fermé** par

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \quad a \leq x \leq b\},$$

On dit aussi que $[a, b]$ est un intervalle **compact**. Et **semi-ouvert** (ou semi-fermé) comme suit :

$$
\begin{aligned}
&[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \quad a \geq x < b\};\\
&(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \quad a < x \leq b\}
\end{aligned}
$$

D'un autre coté, on a les intervalle infinis majorés ou infinis minorés qui sont respectivement écrits sous les formes

$$
\begin{aligned}
&(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \leq b\}, \quad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x < b\};\\
&[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : \quad a \leq x\}, \quad (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : \quad x > a\}.
\end{aligned}
$$

Enfin, l'ensemble des nombres réels est représenté par une droite telle que le point correspondant à un nombre y est situé à droite du point correspondant à un nombre x si $x < y$.

Axiome de la borne supérieure

Le dernier axiome des nombres réels est l'axiome qui le distingue réellement de $\mathbb{Q}$, il dit que :

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure. (A13)

Une borne supérieure d'une partie E de $\mathbb{R}$ est notée $\sup E = \sup(E)$ et est caractérisée par :

$$(i)\, \forall x \in E : x \leq \sup E,$$
$$(ii)\ \sup E \leq M, \text{ si } M \text{ est un majorant de } E$$

La propriété (ii) est équivalente à

$$(ii')\, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E : \quad \sup E - \varepsilon < x \tag{1.3}$$

Notons que $\sup E$ est unique par définition et n'appartient pas nécessairement à E. Si E n'est pas majorée, on écrit $\sup E = \infty$.

À l'opposé, si E est minorée, alors il admet une borne inférieure notée $\inf E$ et que l'on définit formellement par

$$\begin{aligned} &(i)\, \forall x \in E : x \geq \inf E, \\ &(ii)\, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in E : \quad \inf E + \varepsilon > x \end{aligned} \tag{1.4}$$

Si E n'est pas minorée, on écrit $\inf E = -\infty$.

Une conséquence directe de (A13) est le résultat suivant.

Théorème 1.3 *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.*

En vertu de l'existence des bornes sup et inf par (A13), on peut caractériser les intervalles de la manière suivante.

Théorème 1.4 *Pour qu'un ensemble non vide E de $\mathbb{R}$ soit un intervalle, il faut et il suffit que*

$$\forall a, b \in E : \quad a < b \Longrightarrow [a, b] \subset E \tag{1.5}$$

1.2 Propriétés essentielles

Cette partie réunit quelques propriétés essentielles des nombres réels. En premier, nous avons :

Théorème 1.5 (Principe de Cantor) *Soit $I_n = [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$, une suite d'intervalles fermés emboités, c'est-à-dire, tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad I_n \supset I_{n+1}$$

Alors

$$\bigcap_{n=0}^{n} I_n \neq \emptyset$$

Remarque 1.6 *L'assertion du Théorème 1.5, dite principe de Cantor des **intervalles emboités**, n'est pas nécessairement vraie quand les intervalle I_n sont ouverts ou semi-ouverts. Par exemple,*

$$I_n = \left(0, \frac{1}{n+1}\right)$$

D'autre part, l'ensemble des nombres réels n'est pas fini. Ceci est déjà un fait que nous avons accepté intuitivement pour $\mathbb{Q}$, toutefois il a besoin d'une démonstration rigoureuse qui est donnée par le résultat suivant.

Théorème 1.7 (Axiome d'Archimède)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : \quad n > x \tag{1.6}$$

Au vu de l'axiome d'Archimède, on peut représenter $\mathbb{R}$ sous la forme d'une réunion d'intervalles disjoints :

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1)$$

On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un seul n tel que $x \in [n, n+1)$. Ce nombre n est appelé **partie entière** de x ; on le note $n = [x]$ ou $\lfloor x \rfloor$. On vérifie facilement que

$$[x] \leq x \leq [x] + 1 \tag{1.7}$$

Les Axiomes de la borne sup et d'Archimède conduisent au résultat fondamental suivant.

Théorème 1.8 (Racine n-ème) *Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, il existe un unique $b > 0$ tel que $b^n = a$.*

Remarque 1.9 *La valeur b du présent théorème s'appelle **racine n-ème** de a que l'on note par $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$. Ainsi, au vu de la preuve, on a par définition que*

$$a > 0 \Longrightarrow \sqrt[n]{a} > 0, \quad \sqrt[n]{0} = 0$$

Par ailleurs, pour $a > 0$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$, on écrit

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m, \quad a^{-m/n} = (a^{-1})^{m/n}$$

Ce qui donne que

$$(a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}$$

et ce parce que

$$\left((a^{1/n})^m\right)^n = (a^{1/n})^{mn} = a^{mn/n} = a^m$$

Ainsi, on obtient que

$$\forall x, y > 0, \forall p, q \in \mathbb{Q} : \; x^{p+q} = x^p x^q, \; x^{pq} = (x^p)^q, \; (xy)^p = x^p y^p \tag{1.8}$$

Grâce au théorème d'Archimède, on montre aussi une autre propriété essentielle des nombres réels, à savoir la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.10 (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) *$\mathbb{Q}$ est partout dense dans $\mathbb{R}$, i.e. pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.*

Enfin, contrairement aux nombres rationnels qui sont dénombrables, on a la propriété suivante :

Théorème 1.11 (Puissance du continu) *L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

1.3 Inégalités importantes

Nous donnons dans cette section quelques inégalités importantes sur les nombres réels. Et pour présenter la première, on définit la **valeur absolue** ou **module** d'un réel x, la valeur notée $|x|$ et donnée par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0; \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On vérifie immédiatement que

$$-|x| \leq x \leq |x|,$$

et aussi que

$$|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq -|x| \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$$

La notion de valeur absolue donne lieu à une inégalité fondamentale :

Théorème 1.12 (Inégalité triangulaire) *On a*

$$\forall a, b \; \mathbb{R} : \quad |a+b| \leq |a| + |b| \tag{1.9}$$

En second, nous avons

Théorème 1.13 (Inégalités de Cauchy-Schwarz) *Soit $a_i, b_i, i = 1, \ldots, n$, des nombres réels quelconques. Alors, on a*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \tag{1.10}$$

L'inégalité (1.10) entraîne une autre inégalité importante :

Théorème 1.14 (Inégalité de Minkowski) *Soit $a_i, b_i, i = 1, \ldots, n$, des nombres réels quelconques. Alors, on a*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \tag{1.11}$$

2 Suites numériques

Ce chapitre porte sur les applications numériques définies sur $\mathbb{N}$, appelées suites numériques en ce sens qu'elles définissent une succession de nombres réels infinie. Il s'agit d'étudier leurs comportements asymptotiques, autrement dit leur limite, si tant est que celle-ci existe. Le concept de limite des suites numériques constitue le fondement du calcul différentiel et intégral, deux notions que nous allons connaître dans la suite. Ce chapitre constitue une introduction aux techniques élémentaires d'étude de la nature, convergente ou divergente, des suites numériques.

2.1 Définitions et exemples

Une **suite numérique** est une application de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels à valeurs dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Une suite, en ce sens une application notée généralement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)$, est déterminée quand on connait l'image u_n (dite **terme général**) par u, de tout $n \in \mathbb{N}$. Une suite peut être considérée ou indexée à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$. On pourrait toutefois toujours reprendre la numérotation à 0 en effectuant le changement de variable $n - n_0$. Par exemple, nous avons la suite trivial $u_n = 1/n$ qui donne l'inverse d'un nombre naturel.

Une suite numérique peut être définie de façon implicite sous une forme récurrente qui donne la loi de formation des termes successifs. Plus formellement, une **suite récurrente** est donnée sous la forme

$$\forall n \geq 1 : \qquad u_n = f(u_{n-1}), \tag{2.1}$$

où f est une application réelle définie sur l'ensemble des valeurs que peut prendre la suite. Ce que l'on appelle suite récurrente d'ordre un. Par exemple, la **suite arithmétique** donnée par

$$u_n = u_{n-1} + r \tag{2.2}$$

où $r \in \mathbb{R}$ est une constante appelée *raison* de la suite. Ainsi, une telle suite est connue dès que l'on connaît son premier terme u_0 et sa raison. D'un autre côté, nous avons la suite dite **géométrique** définie par

$$u_n = u_{n-1} r \tag{2.3}$$

où $r \in \mathbb{R}$ est une constante appelées aussi *raison*. Nous remarquons alors qu'il suffit d'avoir le terme initial et la raison pour connaitre tous les termes de la suite.

La relation (2.1) peut être généralisé à une récurrence d'ordre supérieure en ce sens que l'on se donne deux premières valeurs ou plus de la suite, qui forment la valeur suivante par une application réelle à plusieurs variables et ainsi de suite. Par exemple, nous avons la suite suivante qui est récurrente d'ordre deux.

$$u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}) = u_{n-1} - u_{n-2}, \qquad u_1 = u_2 = 1$$

Une suite (u_n) est dite **monotone** si elle est **non-décroissante** en ce sens que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$, ou si elle est **non-croissante**, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$. On dit qu'elle est strictement monotone si les inégalités sont strictes. Une suite est dite **bornée supérieurement** ou majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout n. Elle est **bornée inférieurement** ou minorée si pour tout n, $u_n \geq m$ pour une valeur $m \in \mathbb{R}$. Par exemple, si $x > 1$, la suite x^n est strictement croissante donc bornée inférieurement. Si $|x| \leq 1$, elle est bornée, décroissante quand $x \in [0, 1)$ mais elle n'est pas monotone quand $x \in [-1, 0)$. Si $x < -1$, elle n'est ni monotone ni bornée.

Une suite (u_n) converge vers une limite finie ou est dite **suite convergente** et admet pour limite le nombre réel ℓ, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Autrement dit, tout intervalle ouvert centré en ℓ (si petit soit-il !) contient tous les termes de la suite sauf peut être un nombre fini. On écrit alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_n u_n = \lim u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**. On distinguera celles qui tendent vers l'infini. On dit qu'une suite suite (u_n) tend vers l'**infini** positif, noté généralement ∞, (resp. l'infini négatif $-\infty$) si, pour tout choix arbitraire d'un nombre positif M, il existe un entier naturel N tel que pour tout $n > N$, nous ayons

$$u_n > M \qquad (\text{resp. } u_n < -M)$$

Enfin, pour une suite donnée (u_n), on appelle **limite supérieure** la valeur définie par

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} u_n := \lim_n \sup\{u_k : k \geq n\}.$$

D'un autre côté, la **limite inférieure** est définie par

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} u_n := \lim_n \inf\{u_k : k \geq n\}.$$

Il est facile de voir (cf. Théorème 2.10) que ces deux limites de suites monotones, la première étant non-croissante, la seconde non-décroissante, satisfont

$$\liminf u_n \leq \limsup u_n.$$

Nous avons par exemple la suite de terme général donné par

$$u_n = \begin{cases} +1 & n \,\text{pair} \\ -1 & n \,\text{impair} \end{cases}$$

Alors,

$$\limsup u_n = 1 \quad \text{et} \quad \liminf u_n = -1.$$

Ainsi, cette suite est divergente.

Exercice 2.1 Soit (u_n) une suite convergente. Montrer que

$$\liminf u_n = \lim u_n = \limsup u_n$$

Autrement dit, une suite numérique est convergente ssi les limites supérieures et inférieures existes et sont égales. ○

Remarque 2.2 *Nous nous intéresserons ici aux suites de termes réels. Cependant, nous pouvons regarder plus large et considérer des termes complexes. Une telle suite est alors définie par un terme général sous la forme*

$$z_n = u_n + iv_n$$

où u_n et v_n sont des valeurs numériques. Dans ce cas, la convergence de la suite (z_n) équivaut à la converge des deux suite associées (u_n) et (v_n). La notion que l'on peut aussi définir en disant que (z_n) converge ssi

$$\exists \ell \in \mathbb{C} : \quad \lim_{n\to\infty} |z_n - \ell| = 0$$

L'équivalence entre la convergence de (z_n) et de ses parties réelle et imaginaire vient du fait

$$\max\{|\text{Re }(z_n - \ell)|, |\text{Im }(z_n - \ell)|\} \leq |z_n - \ell| \leq |\text{Re }(z_n - \ell)| + |\text{Im }(z_n - \ell)|$$

<u>EXEMPLES</u> **2.3** Considérons d'abord le cas trivial de la suite $(1/n)$. Nous avons $1/n \longrightarrow 0$. En effet, pour un choix arbitraire de $\varepsilon > 0$, nous avons $1/n < \varepsilon$ dès que $n > 1/\varepsilon$.

Maintenant, vérifions que

$$\lim_n \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2}$$

Nous avons

$$\left|\frac{n}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2(2n+3)} < \frac{3}{4n}.$$

On aura donc

$$\left|\frac{n}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

dès que

$$n \geq \frac{3/4}{\varepsilon}$$

On peut prendre alors $N \geq 3/(4\varepsilon)$. ○

<u>EXEMPLE</u> **2.4** (**Suite arithmétique**) Rappelons qu'une suite arithmétique est donnée par son premier terme u_0 et une raison r sour la forme

$$u_n = u_{n-1} + r$$

Le comportement de cette suite dépend de r. En premier, si $r = 0$, il est clair que la suite est constante et prend toujours la valeurs initiale u_0. Maintenant, si $r \neq 0$, alors le terme général s'écrit par itération sous la forme

$$u_n = u_0 + nr$$

De ce fait, si $r > 0$, nous avons $u_n \to \infty$. En effet, pour tout $M > 0$, nous avons

$$u_n > M \quad \text{si } n > \frac{M - u_0}{r}$$

De manière similaire, on voit que $u_n \to -\infty$ si $r < 0$.

Observons par ailleurs la propriété importante suivante qui nous sera utile dans bien des situations. En sommant les termes de la suite arithmétique dans deux sens inversés, il vient que

$$2(u_0 + \cdots + u_n) = (n+1)u_{n+1} = (n+1)(u_0 + u_n) = (n+1)(2u_0 + nr)$$

D'où,

$$u_0 + \cdots + u_n = (n+1)\,\frac{2u_0 + nr}{2}$$

Ainsi, pour $u_0 = 0$ et $r = 1$, nous avons le somme basique

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{2.5}$$

○

<u>Exemple</u> **2.5** (**Suite géométrique**) Une suite géométrique est donnée sous la forme $u_n = u_0 r^n$ avec une raison $r \in \mathbb{R}^*$, le cas $r = 0$ étant sans intérêt. Remarquons d'abord que le terme général de la suite géométrique est donné par récurrence par

$$u_n = u_0 r^n$$

Considérons le cas $r > 0$. Si $r = 1$, la suite est clairement constante. Maintenant, si $r > 1$, alors, en vertu de l'Exemple **??**, pour tout $M > 0$, nous avons pour tout n assez grand

$$r^n > M \quad \text{si } r > \sqrt[n]{M}$$

D'un autre côté, si $r \in (0, 1)$, il suffit d'inverser la suite pour obtenir que $r^n \to 0$. En effet, pour tout $M > 0$, nous avons

$$r^n < \frac{1}{M} \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{r}\right)^n > M$$

Ce qui, tout jours grâce à l'Exemple **??**, est vrai pour tout n assez grand. Après, pour tout choix de $\varepsilon > 0$, il reste à choisir M assez grand tel que $1/M < \varepsilon$.

D'autre part, nous avons aussi la propriété importante suivante sur la somme des termes d'une suite géométrique. En supposant que $r \neq 1$, si nous soustrayons $r(u_0 + \cdots + u_n)$ de $u_0 + \cdots + u_n$, il vient que

$$u_0 + \cdots + u_n = u_0 \, \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \tag{2.6}$$

De ce fait, nous voyons que si $r \in (0, 1)$,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{u_0}{1 - r}$$

Ceci correspond en fait à la *somme infinie* des termes de la suite géométrique, une notion que nous verrons plus tard.

Enfin, si $r < 0$, les termes de la suite oscille alternativement entre valeurs négatives et positives. Si $r \in (-1, 0)$, on montre comme dans l'argument ci-dessus que $u_n \to 0$. Et si $r < -1$, la suite diverge vers les infinis positif et négatif en fonction du signe de u_0.

○

Exemple **2.6** (**Moyenne arithmétique**) Soit une suite (x_n) convergeant vers une limite x, alors la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

converge vers la même limite x. En effet, formons la différence $u_n - x$:

$$\begin{aligned} u_n - x &= \frac{(x_1 - x) + \cdots + (x_n - x)}{n} \\ &= \frac{(x_1 - x) + \cdots + (x_p - x)}{n} + \frac{(x_{p+1} - x) + \cdots + (x_n - x)}{n} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe un entier N_1 tel que pour tout $p > N_1$, nous avons

$$|x_p - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous obtenons à partir de (2.7) que

$$\begin{aligned} |u_n - x| &< \frac{|(x_1 - x) + \cdots + (x_p - x)|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{n-p}{n} \\ &< |u_n - x| < \frac{|(x_1 - x) + \cdots + (x_p - x)|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Quand p est fixé, on peut choisir n assez grand pour que

$$\frac{|(x_1 - x) + \cdots + (x_p - x)|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il suffit de prendre n plus grand que

$$N_2 := \frac{2}{\varepsilon}\,|(x_1 - x) + \cdots + (x_p - x)|$$

Il résulte alors que $|u_n - x| < \varepsilon$ dès que $n > \max\{N_1, N_2\}$.

Notons qu'il est possible que la suite (u_n) converge alors que la suite (x_n) diverge. Par exemple, la suite $x_n = (-1)^n$. ○

2.2 Théorèmes sur les suites convergentes

Nous commençons d'abord par le résultat important suivant qui affirme l'unicité de la limite d'une suite numérique.

Théorème 2.7 (Unicité) *La limite d'une suite numérique, si elle existe, est unique.*

Une conséquence directe de la définition de la convergence d'une suite est le résultat important suivant.

Théorème 2.8 *Toute suite convergente est bornée.*

Pour les suites monotones, nous avons une réciproque au théorème précédent.

Théorème 2.9 *Une suite (u_n) monotone et bornée est convergente et sa limite est $\sup_n u_n$ si elle est non-décroissante, sinon $\inf_n u_n$.*

Par exemple, soit (u_n) une suite récurrente définie par

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n^2}{2},$$

u_0 étant donné tel que $|u_0| \leq 1$.

Par récurrence, on montre que la suite est croissante et majorée par 1. Elle admet donc une limite ℓ qui doit nécessairement vérifier

$$\ell = \frac{1 + \ell^2}{2}.$$

Ce qui donne $\ell = 1$.

Notons que le cas du dernier exemple peut être généralisé de la manière suivante. Supposons que nous ayons une suite monotone récurrente (d'ordre un) définie par

$$u_n = f(u_n),$$

le premier terme de la suite étant donné. Si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, cette limite vérifie

$$\ell = f(\ell).$$

La recherche de la limite se ramène donc à résoudre la dernière équation en ℓ et choisir la racine adéquate. Si l'équation n'admet pas de racine, la suite n'a pas de limite.

Dans la pratique, il n'est généralement pas facile de calculer directement la limite d'une suite ou de trouver un rang N qui vérifie la proposition (2.4). Cependant, nous avons un ensemble de résultats fondamentaux pour les suites convergentes, qui peuvent rendre la tache beaucoup plus facile.

Théorème 2.10 *Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergeant respectivement vers $u, v \in \mathbb{R}$. Alors, on a*

(i)
$$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = u + v \tag{2.8}$$

(ii)
$$\lim u_n v_n = \lim u_n \, \lim v_n = uv \tag{2.9}$$

(iii) Si $v \neq 0$*,*
$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n} = \frac{u}{v} \tag{2.10}$$

(iv)
$$\lim |u_n| = |u| \tag{2.11}$$

(v) pour toute fonction f *continue au point* u*,*
$$\lim f(u_n) = f(\lim u_n) = f(u). \tag{2.12}$$

(vi) si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$*,*
$$u \leq v \tag{2.13}$$

(vii) si $u = v$ *et que, à partir d'un certain rang, une suite* (w_n) *est telle que* $u_n \leq w_n \leq v_n$*,*
$$\lim w_n = u \tag{2.14}$$

Remarque 2.11 *Les résultats que nous venons de voir ne s'étendent pas aux suites divergentes, notamment les suites qui tendent vers l'infini. Cependant, si, par exemple, nous avons deux suites* (u_n) *et* (v_n) *telles que* $\lim u_n = \lim v_n = +\infty$*, alors nous pouvons conclure que*
$$\lim u_n + v_n = +\infty.$$
Ce qui est aussi vrai quand les deux suites tendent vers $-\infty$*.*

<u>Exemple</u> **2.12** Soit la suite (u_n) définie par
$$u_n = \frac{7n^2 + 1}{n^2 + n + 2}.$$
Il est facile de voir que $1/n$ et $1/n^2$ tendent vers 0. Par conséquent et à l'aide du Théorème 2.10, nous obtenons que
$$\lim u_n = \lim \frac{7 + 1/n^2}{1 + 1/n + 2/n^2} = 7.$$

○

En plus, nous avons des cas de limites assez fréquentes exprimées sous forme de puissance ou d'exponentiel ou de logarithme :

Proposition 2.13 *Soit* $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$. *Alors, pour tout* $p > 0$, *on a*

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)^p = \ell^p \tag{2.15}$$

et aussi que

$$\lim_{n\to\infty} e^{u_n} = e^{\ell} \tag{2.16}$$

De plus, si $\ell > 0$, *on a*

$$\lim_{n\to\infty} \log u_n = \log \ell \tag{2.17}$$

Par ailleurs, si $u_n \to \infty$, *on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n^p}{e^{u_n}} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log u_n}{u_n^p} = 0 \tag{2.18}$$

Nous donnons séparément un autre résultat sur des suites asymptotiquement proches.

Théorème 2.14 (Suites adjacentes) *Soit* (u_n) *et* (v_n) *deux* ***suites adjacentes*** *en ce sens que l'une est croissante et l'autre est décroissante et que* $u_n - v_n \longrightarrow 0$. *Alors, elles sont convergentes et admettent la même limite.*

Remarque 2.15 *La preuve de la propriété des suites adjacentes, Théorème 2.14, peut être établie à l'aide du principe de Cantor des intervalle emboités* $[u_n, v_n]$ *(cf. Théorème 1.5).*

2.3 Critère de Cauchy

Nous donnons maintenant le bien connu Théorème de Cauchy pour les suites qui nous permet de connaitre la nature d'une suite, convergente ou non, sans toutefois connaitre *a priori* sa limite.

Théorème 2.16 (Théorème de Cauchy) *Une suite numérique* (u_n) *est convergente si et seulement si elle vérifie la propriété suivante, dite* ***critère de Cauchy*** :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N, \forall p > N, \; |u_n - u_p| < \varepsilon. \tag{2.19}$$

<u>Exemple</u> **2.17** ($\mathbb{Q}$ est incomplet) Pour tout $n \geq \mathbb{N}^*$, soit

$$u_n \in [\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1/n] \cap \mathbb{Q}$$

Ceci est possible car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ en ce sens qu'entre deux réels, on trouve toujours un rationnel (voir Théorème 1.10). Ainsi, on aura construit une suite numérique (u_n) convergeant dans $\mathbb{R}$ vers $\sqrt{2}$. D'où, (u_n) est une suite de Cauchy. Toutefois, remarquons que (u_n) ne converge par dans $\mathbb{Q}$ puisque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Ce fait montre que $\mathbb{Q}$ est incomplet et pour le compléter, on pense naturellement à rajouter à $\mathbb{Q}$ toutes les limites des suites de Cauchy de nombres rationnels. Cette opération est en fait la construction de Cantor de l'ensemble $\mathbb{R}$! ○

2.4 Théorèmes de Bolzano-Weierstrass

Nous terminons notre présentation des suites numériques par un des résultats fondamentaux sur les nombres réels, ceci étant le Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Soit (u_n) une suite numérique et (n_k) une suite strictement croissante d'entiers naturels. La suite extraite (u_{n_k}) est appelée **sous-suite** ou suite partielle de la première suite.

Il est facile de voir que toute suite partielle d'une suite convergente est convergente elle-même. Cependant, la réciproque n'est pas vraie, i.e. une sous-suite peut être convergente sans que la suite *mère* le soit. Par exemple, on affecte aux positions paires, les éléments d'une suite convergente, et aux positions impaires une valeur constante différente de la limite des valeurs paires. Le résultat suivant montre toutefois qu'on peut toujours extraire une sous-suite convergente d'une suite bornée.

Théorème 2.18 (Théorème de Bolzano-Weierstrass) *Toute suite bornée de nombres réels admet une sous-suite convergente.*

3 Fonctions réelles

Ce chapitre constitue le cœur du cours d'analyse. Il parle de l'objet mathématique incontournable que sont les fonctions réelles d'une variable réelle. Il s'agit d'introduire en premier la notion fondamentale de limite de fonction en un point donné, suivi automatiquement par celle de continuité. Ensuite, dans l'étude des variations des fonctions, nous introduisons la notion plus forte de dérivation, qui reste aussi une limite particulière et verrons des résultats fondamentaux tel le théorème des accroissements finis. Et nous terminons avec la célèbre formule dite de Taylor qui donne un développement ou une approximation en polynôme de toute fonction dérivable.

3.1 Définitions

Une **fonction réelle** ou **numérique** d'une variable réelle ou tout simplement fonction est une application d'une partie de $\mathbb{R}$, dite **domaine de définition**, dans $\mathbb{R}$. Une fonction f définie sur un domaine D est alors représentée par

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Notons qu'il est possible pour des raisons de simplicité de notation que nous utilisons l'image de la fonction $f(x)$ pour parler de la fonction elle-même.

Le **graphe** d'une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D\} \tag{3.1}$$

Si le plan est muni d'un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$, les points du graphe $G(f)$ correspondent aux vecteurs donnés par

$$x\vec{i} + f(x)\vec{j} = (x, f(x))$$

La partie $G(f)$ du plan constitue alors la **représentation graphique**.

Une fonction f est définie au **voisinage** de $a \in \mathbb{R}$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que f soit définie sur $(a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$. Quant au point a, il est possible que f n'y soit pas définie comme, par exemple, la fonction suivante qui est définie au voisinage de 1 sans être définie en 1 :

$$x \longmapsto \frac{1}{1-x}$$

Inversement, une fonction peut être définie en un point donné sans être définie sur son voisinage, comme le cas de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } x \leq -1/2; \\ 1 & \text{si } x = 0; \\ 1-x & \text{si } x \geq 1/2. \end{cases}$$

On dit que f est définie au **voisinage de l'infini positif** ∞ (resp. l'**infini négatif** $-\infty$) s'il existe $M > 0$ tel que f soit définie sur (M, ∞) (resp. $(-\infty, -M)$).

Il y a aussi la situation où une fonction f est définie dans un **voisinage à droite** (resp. **à gauche**) d'un point donné a en ce sens qu'il existe un intervalle $(a, a+\varepsilon)$ (resp. $(a-\varepsilon, a)$) tel que f soit définie sur cet intervalle. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est définie au voisinage à droite du point 1.

Une fonction f est **majorée** (resp. **minorée**) s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in D : f(x) \leq b \qquad (\text{resp. } f(x) \geq b) \tag{3.2}$$

f est dite **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée. Autrement dit, f est majorée (resp. minorée) si l'ensemble $f(D)$ est majorée (resp. minorée) ; on pose alors les bornes supérieure et inférieure comme suit

$$\sup_{x \in D} f(x) = \sup f(D) = \sup f, \qquad \inf_{x \in D} f(x) = \inf f(D) = \inf f$$

Si f n'est pas majorée (resp. minorée), on pose, par convention :

$$\sup_{x \in D} f(x) = \infty \quad (\text{resp. } \inf_{x \in D} f(x) = -\infty) \tag{3.3}$$

Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **non-décroissante** (resp. **non-croissante**) si

$$\forall x, y \in D : \quad x \geq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y) \quad (\text{resp. } f(x) \leq f(y)) \tag{3.4}$$

Et on dit que f est croissante (resp. décroissante) si les dernières inégalités sont strictes. f est dite **monotone** si elle est dans l'une de ces situations et est dite strictement monotone si elle est croissante ou décroissante.

Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est injective, donc bijective de D vers $f(D)$, on définit alors sa **fonction réciproque**, notée f^{-1}, par

$$f^{-1} : f(D) \longrightarrow \mathbb{R} \tag{3.5}$$

Il résulte alors que

$$\begin{aligned} \forall x \in D : \quad & f^{-1} \circ f(x) = x; \\ \forall x \in f(D) : \quad & f \circ f^{-1}(x) = x. \end{aligned}$$

EXEMPLE **3.1** La fonction f définie par $f(x) = x^2$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et on a $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_+) = f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+$. En plus, il est facile de voir qu'elle inversible et son inverse sur $\mathbb{R}_+$ (resp. sur $\mathbb{R}_-$) est donnée par

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad (\text{resp. } \sqrt{-x})$$

○

Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **paire** (resp. **impaire**) si

$$\forall x \in D : f(-x) = f(x) \quad (\text{resp. } f(-x) = -f(x)) \tag{3.6}$$

EXEMPLE **3.2** La fonctions x^2 est paire et la fonction x^3 est impaire. ○

Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **périodique** si

$$\exists P > 0, \forall x \in D : f(x + P) = f(x) \tag{3.7}$$

La valeur P est dite une **période** pour f ; la plus petite des périodes de f, si elle existe, est appelée généralement période de f.

EXEMPLE **3.3** Les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont des fonctions périodiques de période 2π. La fonction $\tan x$ est périodique et sa période est π. ○

3.2 Limites

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point a sauf peut-être en ce même point. On dit que f admet une **limite*** ℓ (finie i.e. $\ell \in \mathbb{R}$) au point a ou que f tend vers ℓ quand x tend vers a, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \tag{3.8}$$

∗. *Introduction à l'Analyse*, O. Boukhadra. 2020/21.

On écrit alors
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$$

Notons que la proposition dans (3.8) est fausse si, pour une certaine valeur $\varepsilon > 0$, il existe une *suite* de valeurs numériques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui soit arbitrairement proche de a mais $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon$, pour tout n.

<u>Exemple</u> **3.4** Considérons la fonction définie par $f(x) = x^2 + 1$. On montre que
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$
En effet, soit $\varepsilon > 0$. Observons que
$$|f(x) - 1| < \varepsilon \iff |x^2| < \varepsilon \iff |x| = |x - 0| < \sqrt{\varepsilon}$$
Donc, nous avons trouvé un réel positif $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ tel que
$$|x| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$
○

Quant à la **limite à l'infini**, on dit que f admet une limite ℓ au voisinage de ∞ (resp. $-\infty$) si
$$\forall\varepsilon > 0, \exists M > 0 : x > M \text{ (resp. } x < -M) \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \tag{3.9}$$
On notera respectivement
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

<u>Exemple</u> **3.5** Considérons la fonction f définie par $f(x) = 1/x$. Nous avons
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$
En effet, soit $\varepsilon > 0$ et observons que
$$|f(x) - 0| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon \iff |x| > \frac{1}{\varepsilon}$$
Donc, dans la proposition (3.9), il suffit de prendre $M = 1/\varepsilon$. ○

On dit qu'une fonction f admet une **limite à droite** ℓ (resp. **à gauche**) au point a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \ a < x < a + \delta \text{ (resp. } a - \delta < x < a) \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \tag{3.10}$$

Les limites à droite et à gauche, si elles existent, sont notées respectivement par

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = f(a_+) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a_-} f(x) = f(a_-)$$

<u>Exemple</u> **3.6** Soit

$$f : x \mapsto \frac{|x|}{x}$$

Cette fonction est définie au voisinage de zéro sauf au point zéro. Pour tout $\varepsilon > 0$, remarquons que

$$x > 0 \Longrightarrow |f(x) - 1| = 0 < \varepsilon$$

et d'un autre côté,

$$x < 0 \Longrightarrow |f(x) + 1| = 0 < \varepsilon$$

Par conséquent, nous pouvons choisir un $\delta > 0$ arbitraire qui satisfait (3.10). D'où, nous avons

$$f(0_-) = -1 \neq 1 = f(0_+)$$

○

Une fonction peut ne pas converger en un point donné mais grandir indéfiniment. On dit qu'une fonction f **tend vers l'infinie** positif au voisinage d'un point donné a ou au voisinage de l'infini positive si, respectivement, f vérifie l'une ou l'autre des proposition suivantes :

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : \quad 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) > M; \tag{3.11}$$
$$\forall M > 0, \exists \Delta > 0 : \quad x > \Delta \Longrightarrow f(x) > M \tag{3.12}$$

Ce que l'on note respectivement par

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty; \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Pareillement, on définit les limites infinies suivantes

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty; \ \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty; \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty; \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Exemple **3.7** Montrons la limite suivante

$$\lim_{x\to 0} \log|x| = -\infty \tag{3.13}$$

Soit $M > 0$. On a

$$\log|x| < -M \Longleftrightarrow |x| < e^{-M}$$

Ainsi, on peut prendre dans la proposition (3.11), $\delta \leq e^{-M}$. ○

Propriétés élémentaires

Est-ce que la limite d'une fonction en un point est unique ?!

Théorème 3.8 (Unicité de la limite) *La limite d'une fonction, si elle existe, est unique.*

En outre, au vu de l'Exemple 3.6, on n'a pas nécessairement $f(a_-) = f(a_+)$. Cependant, nous avons

Proposition 3.9 *Les limites $f(a_-)$ et $f(a_+)$, si elles existent, sont uniques. De plus, on a*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Longleftrightarrow f(a_-) = \ell = f(a_+) \tag{3.14}$$

Calcul de limites

Une fonction est généralement définie comme étant la somme, le produit, l'inverse ou la composition de fonctions. Il serait alors utile de connaître l'existence de la limite pour toutes ces opérations algébrique sur les fonctions.

Théorème 3.10 *Soit f et g deux fonctions admettant respectivement les limites finies ℓ et κ en un point donné a fini ou non. Alors, on a*

(i)

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \ell + \kappa; \tag{3.15}$$

(ii)

$$\lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha\ell, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}; \tag{3.16}$$

(iii)

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \ell\kappa \tag{3.17}$$

(iv)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\kappa} \qquad si\ \kappa \neq 0 \tag{3.18}$$

<u>EXEMPLE</u> **3.11** Grâce au Théorème 3.10, nous pouvons calculer la limite suivante facilement

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+1}{x+2} = \lim_{x \to 0}(x^2+1) \lim_{x \to 0} \frac{1}{x+2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

○

Pour les fonctions composées, nous avons :

Théorème 3.12 *Soit f et g deux fonctions telles que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \qquad et \qquad \lim_{x \to \ell} g(x) = g(\ell) \tag{3.19}$$

Alors,

$$\lim_{x \to a}(g \circ f)(x) = g(\lim_{x \to a} f(x)) = g(\ell) \tag{3.20}$$

Remarque 3.13 *Notons que sans la deuxième condition à droite dans (3.19), le résultat est généralement faux comme le montre cet exemple : soit f et g deux fonctions données par*

$$f(x) = 0; \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On a

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \qquad et \qquad \lim_{x \to 0} g(x) = 0,$$

mais pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(g \circ f)(x) = 1$$

Donc

$$\lim_{x \to 0}(g \circ f)(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x \to 0} g(x)$$

<u>EXEMPLE</u> **3.14** Nous avons par application du Théorème 3.12 que

$$\lim_{x \to 0} e^{-x^2} = \lim_{x \to 0} e^{-\lim_{x \to 0} x^2} = e^0 = 1$$

○

Concernant les limites infinies, nous avons

Théorème 3.15 *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a et supposons que $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$. Alors, on a que*

(i) si g est minorée au voisinage de a et $\ell = \infty$,

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \infty$$

(ii) si g est majorée au voisinage de a et $\ell = -\infty$,

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = -\infty$$

(iii) si g est minorée au voisinage de a par $\alpha > 0$ et $\ell = \infty$ (resp. $-\infty$),

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \infty \quad (resp. -\infty)$$

(iv) si g est majorée au voisinage de a par $\beta < 0$ et $\ell = \infty$ (resp. $-\infty$),

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty \quad (resp. +\infty)$$

(v) si $f \geq 0$ (resp. $f \leq 0$) et $\ell = 0$,

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty \quad (resp. -\infty)$$

EXEMPLE **3.16** Les résultats du Théorème 3.15 permettent donc de calculer facilement la limite suivante

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{x+1}{x} = \lim_{x\to 0}(x+1) \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x} = 0 \times \infty = \infty$$

○

Il existe des situations qui ne nous permettent pas de conclure si la limite existe ou non. Ces cas dits **forme indéterminées** sont listés ci-après :

$$(1) \lim f(x) + g(x) = \infty - \infty \tag{3.21}$$

$$(2) \lim f(x)g(x) = 0 \cdot \infty;\ \infty \cdot 0 \tag{3.22}$$

$$(3) \lim \frac{f}{g} = \frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty} \tag{3.23}$$

$$(4) \lim f(x)^{g(x)} = 1^{\infty};\ 0^{\infty};\ 0^0. \tag{3.24}$$

Critère de Cauchy

Nous avons un critère permettant de caractériser l'existence théorique d'une **limite finie** pour une fonction sans nécessiter une connaissance a priori de cette limite.

Théorème 3.17 (Critère de Cauchy) *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point donné a. Alors f admet une limite finie en a ssi le critère dit de Cauchy suivant est vérifié : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$0 < |x - a| < \delta \quad et \quad 0 < |y - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{3.25}$$

3.3 Continuité

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point a et en a. On dit que f est **continue**[†] **en** a quand

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{3.26}$$

Ce que l'on traduit par

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \quad |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{3.27}$$

Une fonction f est **continue à droite** de a (resp. **à gauche**) si

$$\lim_{x \to a_+} f(x) = f(a_+) = f(a) \quad (\text{resp. } \lim_{x \to a_-} f(x) = f(a_-) = f(a)) \tag{3.28}$$

On montre facilement comme pour la Proposition 3.14 que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Longleftrightarrow f(a_-) = f(a) = f(a_+) \tag{3.29}$$

Une fonction est dite **continue sur un intervalle** $I \subset \mathbb{R}$ si elle est continue en tout point a de I. Ce que l'on traduit par

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{CS}$$

Notons ici que la valeur de δ peut dépendre de a comme on le voit dans l'exemple ci-dessous.

†. *Introduction à l'Analyse*, O. Boukhadra. 2020/21.

<u>Exemple</u> **3.18** Soit

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}$$

On montre que f est continue sur $\mathbb{R}^*$. En effet, soit $a > 0$ et $\varepsilon > 0$, le cas des valeurs négatives se traitant de la même manière. Nous pouvons alors considérer notre fonction juste sur $\mathbb{R}_+^*$. nous avons

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon &\iff \frac{1}{a} - \varepsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{a} + \varepsilon \\ &\iff \frac{1 - a\varepsilon}{a} < \frac{1}{x} < \frac{1 + \varepsilon a}{a} \end{aligned} \tag{3.30}$$

Si $\varepsilon < 1/a$, ce dernier encadrement est vrai si

$$\frac{a}{1 + a\varepsilon} < x < \frac{a}{1 - a\varepsilon}$$

ce qui est équivalent à

$$-\frac{a^2\varepsilon}{1 + a\varepsilon} < x - a < \frac{a^2\varepsilon}{1 - a\varepsilon}$$

Mais, dans ce cas, nous avons

$$\frac{a^2\varepsilon}{1 + a\varepsilon} < \frac{a^2\varepsilon}{1 - a\varepsilon}$$

Il résulte alors que que

$$|x - a| < \frac{a^2\varepsilon}{1 + a\varepsilon} \Longrightarrow |f(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{3.31}$$

Par contre, si $\varepsilon > 1/a$, il vient que (3.30) est vrai si

$$x > \frac{a}{1 + \varepsilon a}$$

ce qui équivaut à

$$x - a > -\frac{\varepsilon a^2}{1 + \varepsilon a}$$

Dans les deux cas, nous pouvons prendre dans la proposition (CS),

$$\delta = \frac{a^2\varepsilon}{1 + a\varepsilon}$$

La continuité est alors prouvée pour tout choix de $a > 0$. Nous remarquons ici que δ dépend de a. ○

<u>Exemple</u> **3.19** Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0; \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est facile de voir que

$$f(0_-) = 0 = f(0) \neq 1 = f(0_+)$$

f est donc continue à gauche de 0 mais elle n'y est pas continue à droite. Ainsi, f n'est pas continue en 0. ○

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point a sans être définie en a. Si f admet une limite ℓ en a, on peut définir la fonction $\tilde{f}$ telle que

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a; \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \tag{3.32}$$

Observons alors que

$$\lim_{x \to a} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to a} f(x) = \ell = \tilde{f}(a) \tag{3.33}$$

La fonction $\tilde{f}$ ainsi construite est continue en a, et on appelle cette opération **prolongement par continuité** en a de la fonction f, la fonction $\tilde{f}$ étant la fonction prolongée. Souvent, on omet le tilde pour la fonction prolongée et on la note simplement f.

<u>Exemples</u> **3.20** (1) Considérons la fonction

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad x \neq 0 \tag{3.34}$$

Il est connu que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

En effet, cette limite est une simple dérivation de f en 0 (cf. Section 3.4). Nous pouvons alors prolonger par continuité la fonction f en posant $f(0) = 1$.

(2) Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{x} \tag{3.35}$$

Cette fonction admet une limite connue au point 0 qui est donnée par

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

Nous avons là aussi une simple dérivation. Nous pouvons poser alors $f(0) = 1$. ○

Opérations sur les fonctions continues

Les résultats des Théorèmes 3.10–3.12 restent vrais pour les fonctions continues, ce que nous résumons dans le théorème suivant. Ces résultats représentent toutes les opérations possibles sur les fonctions continues, qui permettent de ramener l'étude de la continuité d'une fonction donnée à celle de quelques fonctions élémentaires la composant telles les fonctions polynomiales, la fonction logarithmique, la fonction puissance ou les fonctions trigonométriques, etc.

Théorème 3.21 *Si f et g sont deux fonctions continues en un point donné a, alors*

(*i*) *$f+g$ est aussi continue en a et*

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a); \tag{3.36}$$

(*ii*) *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, αf est continue en a et*

$$\lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to a} f(x) = \alpha f(a); \tag{3.37}$$

(*iii*) *fg est continue en a et*

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = f(a)g(a); \tag{3.38}$$

(*iv*) *f/g est continue en a et*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} \qquad \textit{si } g(a) \neq 0 \tag{3.39}$$

Le second résultat utile concerne la limites des fonctions composées.

Théorème 3.22 *Si f est une fonction continue en a et g une autre fonction continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a et nous avons*

$$\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = g\big(\lim_{x\to a} f(x)\big) = g(f(a)) \tag{3.40}$$

<u>Exemple</u> **3.23** En vertu des résultats précédents, nous pouvons dire que les fonctions suivantes en tant que somme ou produit ou composition de fonctions continues connues qu'elles sont elles-mêmes continues sur leurs domaines de définition respectifs,

$$\frac{x+1}{x^3+x+2}, \quad x^2 e^x, \quad \log(2+\sin x)$$

○

Continuité uniforme et bornes

Nous donnons dans ce paragraphe quelques propriétés des fonctions continues sur un intervalle. En premier, rappelons-nous la proposition de la continuité en un point donné (CS). Quand la valeur de δ est indépendante du choix de $a \in I$, on dit alors que f est **uniformément continue** sur I. Ce fait s'exprime sous la forme

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in I : |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \tag{CU}$$

ou de manière équivalente,

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{|x-y|<\delta} |f(x) - f(y)| = 0 \tag{3.41}$$

Par définition, il résulte clairement que

$$(\text{CU}) \Longrightarrow (\text{CS}) \tag{3.42}$$

En outre, nous avons :

Théorème 3.24 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors, elle est uniformément continue sur cet intervalle.*

<u>Exemple</u> **3.25** Reprenons la fonction de l'Exemple 3.18 :

$$f : x \mapsto \frac{1}{x}$$

Alors, on a que f est uniformément continue sur tout intervalle borné $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+^*$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Clairement, pour tout $a \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\alpha^2 \varepsilon}{1 + \beta\varepsilon} \le \frac{a^2 \varepsilon}{1 + a\varepsilon}$$

Il résulte alors de (3.31) que pour tous $x, a \in [\alpha, \beta]$,

$$|x - a| < \frac{\alpha^2 \varepsilon}{1 + \beta\varepsilon} =: \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Ce qui prouve la continuité uniforme.

Par contre, f n'est pas uniformément continue sur $(0, +\infty)$ (ou sur $(-\infty, 0)$). En effet, supposons le contraire, c'est-à-dire que pour un tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous x et y de $(0, +\infty)$, nous avons

$$|x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Or d'après (**??**), si l'on choisit y suffisamment petit tel que

$$\frac{y^2\varepsilon}{1-y\varepsilon} < \delta,$$

nous obtenons que

$$|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon \qquad \text{si} \quad \frac{y^2\varepsilon}{1-y\varepsilon} \leq x - y < \delta$$

Ce qui est absurde. ○

<u>Exemple</u> **3.26** La fonction constante $f(x) = c, c \in \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet, soit $\varepsilon > 0$ et observons que

$$|f(x) - f(y)| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

Donc

$$\forall \delta > 0 : \quad |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

○

En second lieu, les fonctions continues sur un intervalle atteignent leurs bornes :

Théorème 3.27 *Soit f une fonction continue sur un intervalle borné et fermé I. Alors, f est bornée, i.e.,*

$$\sup_{x\in I} |f(x)| < \infty, \tag{3.43}$$

et atteint ses bornes, i.e.,

$$\exists a, b \in I : \ f(a) = \inf_{x\in I} f(x) \quad \text{et} \quad f(b) = \sup_{x\in I} f(x) \tag{3.44}$$

Remarque 3.28 *La condition dans ce dernier théorème que l'intervalle I soit borné et fermé est nécessaire pour les deux assertions. En effet, considérons, par exemple, la fonction $f(x) = 1/x$. Elle est continue sur $(0, 1]$ mais elle n'est pas bornée. Et la fonction $f(x) = x$ est continue et bornée sur $[0, 1)$ mais elle n'atteint pas sa borne supérieure.*

Théorème des valeurs intermédiaires

Nous continuons avec les propriétés essentielles des fonctions continues sur un intervalle. Nous avons le résultat important suivant qui montre qu'une fonction donné passe le zéro s'il elle change de signe sur une intervalle.

Théorème 3.29 *Soit f une fonction continue sur un intervalle borné et fermé $[a, b]$. Supposons que $f(a)f(b) < 0$. Alors, on a*

$$\exists c \in (a, b) : \ f(c) = 0$$

Remarque 3.30 *Cette propriété peut servir à donner une approximation des racines des équations du type $f(x) = 0$ où f est une fonction vérifiant les conditions du théorème. Par exemple, considérons l'équation*

$$x^7 + 2x - 1 = 0$$

D'après le dernier théorème, cette équation admet une solution dans l'intervalle $(-1, 1)$. En effet, la fonction $f(x) = x^7 + 2x - 1$ est continue sur $[-1, 1]$ et nous avons $f(-1)f(1) < 0$. On pourrait alors essayer de trouver un intervalle plus petit que $[-1, 1]$ tel que les images de ses extrémités soient de signes différents comme par exemple l'intervalle $[0, 1]$. Ainsi de suite, on se rapproche de plus en plus d'une racine de cette équation.

Le Théorème 3.29 se généralise de la manière suivante.

Théorème 3.31 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Supposons que $f(a) \neq f(b)$ pour deux valeurs différentes a et b de I $(a < b)$. Alors, on a*

$$\forall d \in (f(a), f(b)), \exists c \in (a, b) : \ f(c) = d \tag{3.45}$$

Une conséquence importante du théorème des valeurs intermédiaires est la suivante.

Théorème 3.32 *Soit f une fonction continue et bijective sur un intervalle I. Alors, la fonction réciproque f^{-1} est continue sur l'intervalle $f(I)$.*

3.4 Dérivation

Cette section porte sur la notion de dérivation des fonctions réelles ; il est développé suivant les sections : Définitions et exemples ; Calculs de dérivées ; Rolle et les accroissements finis ; Règle de l'Hôpital ; Formules de Taylor.

Définitions et exemples

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point a et aussi en a. Considérons sur ce voisinage la fraction

$$\mathrm{T}_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

On dit que f est **dérivable** en a ssi la fonction T_a admet une limite finie quand x tend vers a. On écrit alors

$$\lim_{x \to a} \mathrm{T}_a(x) = f'(a) \tag{3.46}$$

Cette limite est appelée **dérivée de f au point** a et le choix de T pour tangente s'expliquera dans l'interprétation géométrique plus bas. On peut poser $h = x - a$, alors h tend vers 0 quand x tend vers a, et (3.46) s'écrit de manière équivalente sous la forme

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

La fonction f est dite *dérivable* sur un intervalle I ssi elle l'est en tout point de I. Dans ce cas, la fonction $x \mapsto f'(x)$ s'appelle dérivée de f sur I et se note f'. On écrit aussi

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$$

<u>Exemples</u> **3.33** (1) Considérons la fonction définie par $f(x) = x^2$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $x \neq a$, nous avons

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = x + a \xrightarrow[x \to a]{} 2a \tag{3.47}$$

Ainsi, $f'(a) = 2a$, et de manière générale, on écrit $f'(x) = 2x$.

(2) Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Pour tout $a > 0$, observons que

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \\ &= \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

D'où,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(3) La dérivée de la fonction constante sur $\mathbb{R}$ est clairement nulle partout.

(4) Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin x = \cos x$$

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, il vient que

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\cos(x + h/2)\sin(h/2)}{h/2} \xrightarrow[h \to 0]{} \cos x$$

où nous avons utilisé les propriétés connues des fonctions sin et cos :

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{3.48}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \tag{3.49}$$

(5) Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquons que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sin \frac{1}{x}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$u_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}, \quad v_n = \frac{1}{n\pi}$$

Ce sont là deux suites de nombres réels qui tendent clairement vers 0 quand n tend à l'infini. Nous avons alors que

$$\sin \frac{1}{u_n} = 1 \neq 0 = \sin \frac{1}{v_n}$$

Il en résulte que f n'est pas dérivable à l'origine. ○

Un fonction définie au voisinage à droite (resp. à gauche) d'un point donné a est dite **dérivable à droite** (resp. **à gauche**) ssi la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{x \to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \left(\text{resp. } \lim_{x \to a_-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) \tag{3.50}$$

On la note alors $f'(a_+)$ (resp. $f'(a_-)$). On en déduit facilement qu'une fonction est dérivable en un point ssi elle est dérivable à droite et gauche de ce point et que

$$f'(a_+) = f'(a_-) \tag{3.51}$$

<u>Exemple</u> **3.34** Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0; \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \in (-1, 0) \end{cases}$$

Nous avons

$$f'(0_-) = \lim_{x \to 0_-} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{x \to 0_+} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = f'(0_+)$$

○

Si l'on rapporte le plan à un repère (orthogonal) d'origine o, nous pouvons donner une **interprétation géométrique** à la notion de dérivée d'une fonction de la manière suivante. Soit f une fonction dérivable en un point a. On appelle alors l'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

la **tangente** au graphe de f au point $M_0 = (a, f(a))$.

Le rapport $\mathrm{T}_a(x)$ est la pente de la droite (M_0M) où $M = (x, f(x))$. Ainsi, si α désigne l'angle formé par l'axe ox et la tangente en M_0, on a

$$f'(a) = \tan \alpha$$

Les dérivées à droite et à gauche s'interprètent pareillement en considérant les demi-tangentes à droite et gauche du point M_0 ; si elles ne sont pas égales, le graphe de f présente alors un *point anguleux* ou une *cassure* au niveau de M_0.

La dérivabilité est une propriété plus forte que la continuité :

Proposition 3.35 *Si une fonction est dérivable en un point, elle est continue en ce point.*

Remarque 3.36 *La réciproque de cette proposition n'est pas vraie, c'est-à-dire qu'une fonction peut être continue en un point sans y être dérivable. Par exemple, la fonction* $x \mapsto \sqrt{x}$ *est continue au point* 0 *mais elle n'y est pas dérivable. De même, la dérivée à droite (resp. à gauche) implique la continuité à droite (resp. à gauche).*

Si f est une fonction dérivable et que sa dérivée f' est elle-même dérivable, alors la dérivée de f' est dite **dérivée seconde** ou dérivée d'ordre 2 de f que l'on note par f''. Ainsi, par récurrence, on définit les **dérivées d'ordre supérieur** telles que la dérivée d'ordre n ou la n-ième dérivée de f, notée $f^{(n)}$, est la dérivée de la fonction $x \mapsto f^{(n-1)}(x)$, i.e.

$$f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n-1)}$$

On utilise souvent la notation

$$f^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f \quad \text{ou} \quad y^{(n)} \quad \text{si} \quad y = f(x)$$

Par exemple, on vérifie par récurrence que

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \sin x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \cos x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Une fonction donnée est dite de **classe** $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle si elle admet une dérivée n-ième continue sur cette intervalle, on dit aussi qu'elle est (n fois) **continument dérivable**. On écrit $\mathscr{C}^\infty$ si f est *infiniment* continûment dérivable.

Calcul de dérivées

Cette partie traite des opérations algébriques sur les fonctions dérivables. Commençons par les opérations fondamentales.

Théorème 3.37 *Soit f et g deux fonctions dérivables sur le même domaine. Alors, on a que $f + g$ et fg sont dérivables et les dérivées sont données par*

$$(f+g)' = f' + g' \tag{3.52}$$

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{3.53}$$

De plus, si g est non nul sur le point de dérivation, alors

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \tag{3.54}$$

Quant à la dérivation des fonctions composées :

Théorème 3.38 (Dérivée d'une fonction composée) *Soit f et g deux fonctions telles que f soit dérivable au point a et g soit dérivable en $f(a)$. Alors, $g \circ f$ est dérivable en a et on a*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) \tag{3.55}$$

Comment pouvons-nous dériver la réciproque d'une fonction bijective ?!

Théorème 3.39 (Dérivée d'une fonction réciproque) *Soit f une fonction bijective et continue sur un intervalle I. Supposons que f soit dérivable en $a \in I$ et que $f'(a) \neq 0$. Alors, f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et on a*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \tag{3.56}$$

<u>Exemple</u> **3.40** La fonction tangente $x \mapsto \tan x$ est bijective et dérivable de $(-\pi/2, \pi/2)$ sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est facilement obtenue :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2 x$$

Sa fonction réciproque étant notée par arctan, nous avons d'après la formule (3.56),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan x = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

○

Rolle et les accroissements finis ; Règle de l'Hôpital

Nous allons voir dans cette partie des théorèmes fondamentaux sur les fonctions dérivables. En premier, nous avons

Théorème 3.41 (Théorème de Rolle) *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b) telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe un point $c \in (a, b)$ tel que $f'(c) = 0$.*

Remarque 3.42 *Géométriquement, ce théorème garantit que la courbe de f admet une tangente en un point différent de ses extrémités, qui est parallèle à l'axe des abscisses.*

Le cas particulier où $f(a) = f(b) = 0$ nous apprend qu'entre deux zéro de la fonction dérivable f (i.e. des valeurs qui annulent f), il existe au moins un zéro de la fonction dérivée f'.

Notons ici qu'il est nécessaire dans le Théorème de Rolle de prendre un intervalle fermé. En effet, considérons la fonction $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La fonction f qui est clairement discontinue en 0, n'admet aucun point $c \in (0,1)$ tel que $f'(c) = 0$.

Par ailleurs, la condition de dérivabilité à l'intérieur d'un intervalle donné $[a,b]$ est tout aussi nécessaire dans le Théorème. Pour voir ça, on peut prendre par exemple la fonction $f(x) = |x|$ sur l'intervalle $[-1,1]$. Cette dernière n'est pas dérivable en 0 et elle n'admet aucun point $c \in (-1,1)$ tel que $f'(c) = 0$.

Notre second résultat important est une généralisation du Théorème de Rolle :

Théorème 3.43 (Théorème des accroissements finis) *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur (a,b). Alors, il existe un point $c \in (a,b)$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) \tag{3.57}$$

Remarque 3.44 *Géométriquement, si A et B représentent les points correspondant respectivement à a et b, ce théorème énonce que la courbe de f admet une tangente en un point différent de A et B, qui soit parallèle à la droite (AB).*

La formule des accroissements finis (3.57) s'écrit souvent sous la forme suivante. On pose $b = a + h$ avec $h > 0$. On peut alors écrire $c \in (a,b)$ tel que

$$c = a + \theta(b-a) = a + \theta h, \quad \theta \in (0,1)$$

Ainsi, nous obtenons l'écriture équivalente

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h), \tag{3.58}$$

qui montre que pour un accroissement fini h de la valeur a, l'image $f(a)$ varie d'une quantité égale à $hf'(a+\theta h)$.

<u>Exemple</u> **3.45** Considérons la fonction définie par $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[-1,2]$. Clairement, cette fonction satisfait les conditions du Théorème 3.43, donc il existe un $c \in (-1,2)$ tel que

$$\frac{f(2) - f(-1)}{3} = 1 = f'(c)$$

Si l'on veut connaitre c, on peut essayer de résoudre l'équation $f'(x) = 1$ sur $(-1,2)$. Nous avons

$$f'(x) = 2x = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $c = 1/2$. ○

Le Théorème des accroissements finis entraîne des conséquences importantes que nous réunissons dans le corollaire suivant.

Corollaire 3.46 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors, on a que*

(i) *pour tous $a, b \in I$ $(a < b)$, il existe un $c \in (a, b)$ tel que la formule (3.57) est vérifiée.*

(ii) *$f' = 0$ ssi f est constante.*

(iii) *si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur I, alors f est non-décroissante (resp. non-croissante).*

(iv) *si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$), alors f est croissante (resp. décroissante).*

Le Théorème des accroissements finis donne lieu à des applications intéressantes, il permet en particulier un **calcul d'erreur** dans le sens suivant : si l'on considère la formule des accroissements finis (3.58), on peut prendre $f(a)$ comme une approximation de la valeur $f(a+h)$ d'autant plus si h est assez petit et que l'on connait une borne supérieur à $|f'(x)|$ sur $[a, a+h]$. Explicitement, nous avons

Corollaire 3.47 (Inégalités des accroissements finis) *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ $(a < b)$ et dérivable sur (a, b). Alors,*

$$(b-a) \inf_{x \in (a,b)} f'(x) \leq f(b) - f(a) \leq (b-a) \sup_{x \in (a,b)} f'(x), \tag{3.59}$$

et donc

$$|f(b) - f(a)| \leq (b-a) \sup_{x \in (a,b)} |f'(x)| \tag{3.60}$$

<u>EXEMPLE</u> **3.48** On montre que

$$7 \leq \sqrt{51} \leq 7 + 1/7$$

Ainsi, $\sqrt{51}$ est égale à 7 avec une erreur de $1/7$. En effet, soit la fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$. Nous avons $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ et sur $[49, 51]$, on a $f'(x) \leq 1/(2\sqrt{49})$. Donc, on obtient la borne énoncée par substitution dans l'inégalité (3.60). ○

Quant à notre troisième résultat fondamental, c'est une autre application du théorème des accroissements finis qui peut être utile dans l'étude concrète des fonctions.

Théorème 3.49 (Règle de l'Hôpital) *Soit f, g deux fonctions dérivables sur un voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ ou $a = \pm\infty$ et telles que g et g' y soient non nulles, sauf peut-être en a, et que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \tag{3.61}$$

Supposons que la fraction $f'(x)/g'(x)$ admette une limite finie ℓ quand x tend vers a. Alors, on a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \tag{3.62}$$

<u>Exemple</u> **3.50** Nous avons

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}\frac{\sin x^2}{x^2} = \frac{1}{2} \tag{3.63}$$

○

Cependant, la réciproque de la règle de l'Hôpital est fausse comme le montre l'exemple suivant.

<u>Exemple</u> **3.51** Considérons les fonctions suivantes

$$f(x) = \sin x; \qquad g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x},\ g(0) = 0. \tag{3.64}$$

Nous avons

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2 \sin(1/x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{x\ \sin(1/x)} = 0 \tag{3.65}$$

Or, nous avons

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos x}{2x\sin(1/x) - \cos(1/x)} \tag{3.66}$$

Cette fraction n'a clairement aucune limite quand $x \to 0$. ○

Formules de Taylor

Nous avons pu voir dans le Corollaire 3.47 que la formule des accroissements finis peut servir de moyen d'approximation d'une fonction donnée au voisinage d'un point. En effet, soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b). Alors, en vertu du Théorème des accroissement finis, nous pouvons écrire pour tout $x \in [a, b]$,

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a), \qquad c \in (a, b).$$

Ainsi, nous pouvons considérer $f(a)$ comme étant une approximation de la valeur de $f(x)$ avec une erreur ou un reste de $f'(c)(x - a)$. La formule dite de Taylor que nous allons voir améliore ce fait en donnant, au voisinage d'un point, une approximation par un polynôme d'une fonction donnée satisfaisant quelques conditions de régularité notamment l'existence de dérivées supérieures.

Théorème 3.52 (Formule de Taylor-Lagrange) *Soit f une fonction n fois dérivable sur $[a, b]$ et telle que $f^{(n)}$ soit continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b). Alors, pour tout $x \in [a, b]$, il existe $c \in (a, x)$ tel que*

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \tag{3.67}$$

Remarque 3.53 *Notons que si $n = 0$ dans ce théorème, on se ramène au Théorème des accroissements finis.*

*Le dernier terme dans la **formule de Taylor** (3.67),*

$$R_n(a, x) := \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

*est appelée **reste de Lagrange**.*

On utilise souvent une deuxième écriture de la formule de Taylor en posant $x = a + h$. On obtient alors

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \tag{3.68}$$

On note aussi c par $a + \theta(x - a)$ avec $\theta \in (0, 1)$.

*Si $a = 0$, on parle alors de **formule de Maclaurin**.*

Il est possible d'alléger les conditions du Théorème 3.52 dans le sens suivant :

Théorème 3.54 (Formule de Taylor-Young) *Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé I et soit $a \in I$. Supposons que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors, pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x), \tag{3.69}$$

où la fonction ε *est telle que*

$$\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$$

Remarque 3.55 (Notations de Landau) *Si, au voisinage d'un point donné* a (*ou à l'infini*), *on a deux fonctions* f *et* g *telles que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On dit que f *est négligeable devant* g *au voisinage de* a*, et alors, on écrit*

$$f(x) = o(g(x)) \text{ ou } f = o(g)$$

On vérifie facilement les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} &o(f) = f\,o(1) \\ &o(f) + o(f) = o(f) \\ &o(f)\,o(g) = o(fg) \\ &o(o(f)) = o(f) \\ &g\,o(f) = o(f) \end{aligned}$$

où la dernière égalité est vraie si g *est bornée.*

Ainsi, le reste dans la formule de Taylor-Young, i.e. $(x-a)^n\varepsilon(x)$ *est souvent noté par*

$$(x-a)^n\varepsilon(x) = o\big((x-a)^n\big) \tag{3.70}$$

On écrit aussi $f(x) = O(g(x))$ *ou* $f = O(g)$ *pour signifier que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

Et on lit que f *est dominée par* g *au voisinage de* a (*ou à l'infini*)*. De la définition même de* O (*grand "o"*) *découlent quelques propriétés utiles dont nous donnons quelques unes ici*

$$\begin{aligned} &O(f) = f\,O(1) \\ &O(f) + O(f) = O(f) \\ &O(f)\,O(1) = o(f) \end{aligned}$$

En outre, on a

$$\begin{aligned} &o(f) + o(f) = o(f) \\ &o(f)\, O(1) = o(f) \\ &O(o(f)) = o(f) \\ &o(O(f)) = o(f) \end{aligned}$$

<u>Exemple</u> **3.56** Considérons la fonction sin. C'est une fonction infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, on sait que

$$\sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

Donc pour tout $x \in R$,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\big(x^{2n+2}\big)$$

Notons ici que l'on a pris dans le reste un ordre supérieur d'un point à la dernière puissance $2n+1$. Ceci est dû au fait que les coefficients des puissances paires sont nulles. ○

<u>Exemple</u> **3.57** Soit la fonction définie par

$$f(x) = (1+x)^\alpha, \qquad x > -1, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.71}$$

On vérifier sans peine que cette fonction satisfait les conditions des Théorèmes 3.52–3.54 au voisinage de 0. On a par récurrence

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(x+1)^{\alpha-k}$$

D'où,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{n!} + R_n(x)$$

où on peut prendre le reste de Lagrange ou de Young et on a

$$R_n(x) = o\big(x^n\big)$$

○

4 Intégration

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à la notion d'intégrale de Riemann qui, à la base, est une mesure de surface. En même temps, l'intégration, sous certaines conditions de régularité de la fonction intégrée, est en fait l'opération inverse de la dérivation, lesquelles opérations constituent le fondement du calcul analytique différentiel.

4.1 Définition

Soit f une fonction définie et bornée sur un intervalle $[a, b]$. Soit $\sigma(n) = (x_i)_{i=0}^n$ et $\xi(n) = (\xi_i)_{i=1}^n$ deux séquences telles que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b; \qquad \xi_i \in (x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.1}$$

La séquence $\sigma(n)$ est appelée **subdivision** de l'intervalle $[a, b]$ et $\xi(n)$ une suite subordonnée. Posons

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}; \qquad \delta_n = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i$$

On appelle **somme de Riemann** relative à la subdivision $\sigma(n)$ et au système de points $\xi(n)$, la quantité

$$S_n(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{4.2}$$

Géométriquement, cette somme représente l'aire de tous les rectangles de bases $[x_{i-1}, x_i]$ et de hauteurs respectives ξ_i pour $i = 1, \ldots, n$.

Augmentons le nombre n de points de la subdivision de sorte que $\delta_n \to 0$. Si la somme (4.2) admet une limite finie $I(f)$ qui est indépendante du choix de la subdivision $\sigma(n)$ et du système $\xi(n)$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall(\sigma(n), \xi(n)) : \quad \delta_n < \delta \Longrightarrow |S_n(f, \sigma, \xi) - I(f)| < \varepsilon \tag{4.3}$$

on l'appelle alors **intégrable de Riemann** de f entre a et b que nous notons par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.4}$$

On dit aussi que f est *intégrable* au sens de Riemann ou *Riemann-intégrable* ou tout simplement intégrable. La lettre x dans la notation de l'intégrale est dite **variable muette** et ne joue aucun rôle. On peut utiliser à la place n'importe quelle autre lettre y, t, u, etc. Les valeurs a et b sont dites les **bornes de l'intégrale**, a étant la borne *inférieure* et b la borne *supérieure.*

On convient que

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{4.5}$$

et si $a = b$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{4.6}$$

En même temps, notons que si $f = 1$ sur $[a, b]$, alors il vient que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a$$

<u>Exemple</u> **4.1** (**Fonction constante**) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction constante : $f(x) = c$. Alors, f est intégrable car pour toute subdivision $\sigma = (x_i)_{i=0}^n$ de $[a, b]$, nous avons

$$D(f, \sigma) - d(f, \sigma) = 0$$

D'où, il vient que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = D(f, \sigma) = d(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} c\,\Delta x_i = c\,(b - a)$$

En particulier, quand $f(x) = 1$, on écrit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b 1\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a$$

et si $f(x) = 0$, on a

$$\int_a^b 0\,\mathrm{d}x = 0$$

○

<u>Exemple</u> **4.2** Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \delta_c(x)$ où $c \in [a,b]$, i.e. $f(x) = 0$ sauf sur c où $f(c) = 1$. Montrons que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Supposons sans perdre de généralité que $c \in (a,b)$ et soit $\varepsilon > 0$. Considérons la subdivision $\sigma = \{a, c-\delta, c+\delta, b\}$ où $\delta > 0$ est tel que $\delta < \min\{\varepsilon/2, c-a, b-c\}$ Alors, nous avons que

$$D(f,\sigma) = \sup_{x\in[c-\delta,c+\delta]} f(x)\,2\delta = 2\delta < \varepsilon$$

et que

$$d(f,\sigma) = \inf_{x\in[c-\delta,c+\delta]} f(x)\,2\delta = 0 > -\varepsilon$$

D'où, nous obtenons que

$$D(f,\sigma) - d(f,\sigma) < 2\varepsilon$$

○

4.2 Propriétés fondamentales

Nous avons là quelques propriétés fondamentales du calcul d'intégrale. Pour des raisons de facilité de notations, nous écrivons $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$.

En premier, comme pour la dérivation (cf. Théorème 3.37), l'intégration est aussi *linéaire* :

Théorème 4.3 *Soit f et g deux fonction intégrables sur $[a,b]$. Alors, nous avons*

(*i*)

$$\int_a^b (f+g)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,\mathrm{d}x + \int_a^b g\,\mathrm{d}x \tag{4.7}$$

(*ii*) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\int_a^b \lambda f\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f\,\mathrm{d}x \tag{4.8}$$

(*iii*) *Pour tout $c \in (a,b)$,*

$$\int_a^b f\mathrm{d}x = \int_a^c f\mathrm{d}x + \int_c^b f\,\mathrm{d}x \tag{4.9}$$

Quant au produit de deux fonctions intégrables, l'intégrabilité n'est pas perdue. Explicitement :

Théorème 4.4 *Soit f, g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Alors, le produit fg est aussi une fonction intégrable sur $[a, b]$.*

En plus des propriétés essentielles que nous venons de voir, il y a des inégalités importantes. Commençons par les plus basiques.

Théorème 4.5 *Soit f et g deux fonction intégrables sur $[a, b]$. Alors, on a que*

(*i*) *si $f(x) \in [m, M]$ pour tout $x \in [a, b]$,*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \,\mathrm{d}x \leq M(b-a) \tag{4.10}$$

(*ii*) *Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$,*

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g \,\mathrm{d}x \tag{4.11}$$

(*iii*)

$$\left| \int_a^b f \,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f| \,\mathrm{d}x \tag{4.12}$$

En outre, nous donnons séparément les deux incontournables inégalités suivantes qui sont en fait des extensions des deux inégalités (1.10–1.11)

Théorème 4.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit f, g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Alors, on a*

$$\int_a^b |fg| \,\mathrm{d}x \leq \sqrt{\int_a^b f^2 \,\mathrm{d}x} \sqrt{\int_a^b g^2 \,\mathrm{d}x} \tag{4.13}$$

Remarque 4.7 *L'inégalité de Cauchy-Schwarz se généralise de la manière suivante (cf. [1]). Si $p, q > 1$ sont deux réels tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

*alors on a l'**inégalité de Hölder*** :

$$\int_a^b |fg| \,\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b f^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_a^b g^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/q} \tag{4.14}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne la célèbre inégalité suivante.

Théorème 4.8 (Inégalité de Minkowski intégrale) *Soit f, g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Alors, on a*

$$\sqrt{\int_a^b (|f| + |g|)^2 \,\mathrm{d}x} \leq \sqrt{\int_a^b f^2 \,\mathrm{d}x} + \sqrt{\int_a^b g^2 \,\mathrm{d}x} \tag{4.15}$$

Remarque 4.9 *On généralise l'inégalité de Minkowski intégrale de la manière suivante. Pour tout $p \geq 1$,*

$$\left(\int_a^b (|f| + |g|)^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \tag{4.16}$$

La preuve de cette généralisation se base sur le même argument pour le cas $p = 2$ en utilisant l'inégalité de Hölder.

4.3 Critères d'intégrabilité

Avant de pouvoir donner des exemples d'intégration, nous allons voir d'abord quelques conditions suffisantes pour l'existence de l'intégrale de Riemann, notamment la monotonie et la continuité.

Théorème 4.10 *Si f est une fonction bornée et monotone sur $[a, b]$, alors elle est intégrable sur cet intervalle.*

Cependant, le critère d'intégrabilité le plus utilisé est le suivant.

Théorème 4.11 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est intégrable.*

Exemple **4.12** Considérons la fonction $f(x) = x$. C'est là une fonction clairement continue sur tout $\mathbb{R}$, et qui plus est, croissante. Calculons alors $\int_0^1 x \,\mathrm{d}x$. Pour ce faire, il suffit par le Théorème 4.11 de choisir une bonne subdivision de $[0, 1]$ et un séquence subordonnée appropriée. Par exemple, nous avons

$$\Delta x_i = \frac{1}{n}, \quad \xi_i = \frac{i}{n}$$

Alors, il vient que

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \\ &= \lim \frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n^2} \\ &= \lim \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la célèbre somme des n premiers entiers naturels. ○

Le Théorème 4.11 se généralise de la manière suivante.

Théorème 4.13 *Soit f une fonction bornée et continue sur l'intervalle $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points. Alors, f est intégrable sur $[a, b]$.*

Théorème 4.14 *Soit f une fonction bornée et continue sur l'intervalle $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points $a_1, \ldots, a_n$. Alors, f est intégrable sur $[a, b]$ et son intégrale est donnée par*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)$$

où $a_0 = a, a_{n+1} = b$.

<u>Exemple</u> **4.15** Considérons sur $[0, 2]$ la fonction

$$f(x) = x\,\mathbb{1}_{[0,1)}(x) + (3 - x)\,\mathbb{1}_{[1,2]}(x)$$

Nous avons là une fonction continue *par morceaux* et bornée. Il est clair que 1 est un point de discontinuité de f. Cependant, f est intégrable selon le Théorème 4.14. Calculons alors son intégrale. Nous avons déjà (cf. Exemple 4.12) que

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

Il reste donc à calculer

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 3 - x\,\mathrm{d}x$$

Soit la subdivision et la suite subordonnée

$$\Delta x_i = \frac{1}{n}, \quad \xi_i = 1 + \frac{i}{n}$$

D'où, il vient en reprenant les même calculs de l'exemple précédent que

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(2 - \frac{i}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Ainsi, nous obtenons que

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

○

4.4 Primitive et théorème fondamental

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Définissons

$$\phi(x) = \int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u$$

Remarquons en premier le fait important suivant.

Théorème 4.16 *Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et posons*

$$\phi : x \mapsto \int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u \tag{4.17}$$

Alors, la fonction ϕ est continue sur $[a, b]$.

On peut se demander alors si ϕ est dérivable. La réponse est généralement négative. En effet, considérons la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2]; \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est alors facile d'obtenir à l'aide des sommes de Riemann et du Theoreme 4.3,

$$\phi(x) = \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1/2]; \\ 1 - x & \text{sinon} \end{cases}$$

Clairement, ϕ n'est pas dérivable au point $1/2$.

Le théorème suivant donne une condition suffisante de la dérivabilité de ϕ.

Théorème 4.17 *Supposons que f soit une fonction continue sur $[a, b]$. Alors, la fonction ϕ est dérivable sur $[a, b]$ et on a*

$$\forall x \in [a, b] : \quad \phi'(x) = f(x) \tag{4.18}$$

Utilisons la propriété (4.18) de ϕ pour établir une nouvelle notion : on appelle **primitive** de f toute fonction F dérivable sur $[a, b]$ et telle que

$$\forall x \in [a, b] : \quad F'(x) = f(x) \tag{4.19}$$

La relation qui lie les primitives d'une fonction donnée est la suivante.

Théorème 4.18 *Soit F_1, F_2 deux primitives d'une fonction f. Alors, la différence entre F_1 et F_2 est une constante, i.e. il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que*

$$F_1 - F_2 = c$$

Nous arrivons au **théorème fondamental du calcul intégral**, à savoir :

Théorème 4.19 *Soit F une primitive d'une fonction f continue sur $[a, b]$. Alors, on a*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{4.20}$$

Remarque 4.20 *On utilise souvent la notation*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

Notons qu'en vertu du Théorème 4.18, on a sous les conditions du Théorème 4.19 que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \phi(b)$$

À noter aussi que si F est une primitive d'une fonction f, alors f n'est pas forcément continue comme le montre l'exemple suivant. Considérons la fonction

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cos(1/x) - \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La dérivée f n'est clairement pas continue en 0.

La formule fondamentale du calcul intégrale (4.20) permet de calculer directement une intégrale quand on connaît une primitive de la fonction à intégrer. Nous donnons ci-après un exemple simple mais nous consacrerons plus bas une section pour rappeler et connaître les dérivées et primitives des fonctions usuelles.

EXEMPLE **4.21** Soit à intégrer la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[1, 2]$. Comme nous savons que $x^3/3$ est une primitive de cette fonction, alors

$$\int_1^2 x^2 \, \mathrm{d}x = [x^3/3]_1^2 = (2^3 - 1^3)/3 = \frac{7}{3}$$

○

EXEMPLE **4.22** (La moyenne d'une fonction) Nous avons Sachant que la dérivée de cos est $-\sin$, alors, grâce au théorème fondamental du calcul intégral, il vient que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = 0$$

En même temps, si l'on prend une subdivision de $[0, \pi]$ en intervalles de longueur $1/n$ et une suite subordonnée $(i\pi/n)$, il résulte que

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sin \frac{i\pi}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \, \mathrm{d}x = 0$$

○

On convient d'appeler l'**intégrale indéfinie** de f, une représentation quelconque de sa primitive, ce que l'on note par

$$\int f \, \mathrm{d}x$$

Si F est une primitive de la fonction f, nous écrivons vu le Théorème 4.18,

$$\int f \, \mathrm{d}x = F(x) + c, \tag{4.21}$$

où c est une constante réelle quelconque. Par exemple,

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + c$$

La priorité principale de l'intégrale indéfinie est la linéarité :

Théorème 4.23 *Soit f, g deux fonctions admettant des primitives. Alors, on a*

(*i*)

$$\int (f+g)\,\mathrm{d}x = \int f\,\mathrm{d}x + \int g\,\mathrm{d}x.$$

(*ii*)

$$\int \lambda f\,\mathrm{d}x = \lambda \int f\,\mathrm{d}x, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.5 Méthodes d'intégration

Pour calculer des intégrales, il existe des méthodes connues dont nous allons en connaître ici deux des plus utilisées. En premier, nous avons

Théorème 4.24 (intégration par parties) *Soit f, g deux fonctions dérivables et admettant des dérivées continues sur $[a, b]$. Alors, on a*

$$\int_a^b fg'\,\mathrm{d}x = [fg]_a^b - \int_a^b f'g\,\mathrm{d}x \tag{4.22}$$

Remarque 4.25 *À supposer que les fonctions f, g soient dérivables et admettent des dérivées continues sur un domaine donné, nous pouvons écrire*

$$\int fg'\,\mathrm{d}x = fg - \int f'g\,\mathrm{d}x \tag{4.23}$$

<u>EXEMPLES</u> **4.26** (1) Soit à calculer la primitive $\int xe^x\,\mathrm{d}x$ En vertu de la formule (4.23), nous obtenons

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x(x-1) + c$$

(2) Calculons $\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$. En appliquant une fois la formule de l'intégration par parties, nous obtenons,

$$\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x,$$

et d'un autre côté, par la même formule, il vient que

$$\int e^x \cos x\,\mathrm{d}x = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$$

Ainsi, il en résulte que

$$\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$$

(3) L'intégration par parties donne aussi

$$\int x \sin x \, \mathrm{d}x = -x \cos x + \int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x - x \cos x + c$$

○

Une conséquence importante de l'intégration par parties permet d'écrire le reste de la formule de Taylor sous forme intégrale qui se prête parfois mieux à majoration que le reste de Lagrange.

Théorème 4.27 (Formule de Taylor avec reste intégrale) *Soit une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. Alors*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) \, \mathrm{d}x \tag{4.24}$$

La deuxième méthode importante que nous allons voir utilise un changement de la variable d'intégration, autrement dit, on change d'intervalle d'intégration.

Théorème 4.28 (changement de variable) *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et $\psi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une fonction continument dérivable sur $[\alpha,\beta]$ et telle que $\psi(\alpha) = a, \psi(\beta) = b$. Alors, la fonction $t \mapsto f(\psi(t))\psi'(t)$ est intégrable sur $[\alpha,\beta]$ et on a*

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t) \, \mathrm{d}t \tag{4.25}$$

Remarque 4.29 *La formule de changement de variable (4.25) écrite sous la forme de primitive donne*

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = \int f(\psi(t))\psi'(t) \, \mathrm{d}t \tag{4.26}$$

<u>Exemples</u> **4.30** (1) Calculons

$$\int_2^3 \frac{1}{x(\log x)^3} \, \mathrm{d}x$$

Posons $x = e^t$. Alors, il vient que

$$\int_2^3 \frac{2}{x(\log x)^3}\,\mathrm{d}x = \int_{\log 2}^{\log 3} \frac{2}{t^3}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^{-2} \Big]_{\log 2}^{\log 3} = \frac{1}{(\log 2)^2} - \frac{1}{(\log 3)^2}$$

(2) Calculons $\int x \sin(x^2+1)\,\mathrm{d}x$. Posons $t = x^2 + 1$. Nous obtenons alors que

$$\int x \sin(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin u\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos t + c = -\frac{1}{2}\cos(x^2+1) + c$$

○

4.6 Primitives de fonctions usuelles

Nous terminons avec cette section qui donne des primitives à quelques fonctions des plus utilisées.

Fonction rationnelle

Nous allons voir dans cette ici les primitives des **fonctions rationnelles**, à savoir les fonctions qui s'écrivent sous la forme P/Q où P et Q sont des polynômes. Les primitives de ces derniers se calculent facilement en utilisant la forme générale d'un monôme :

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \tag{4.27}$$

Notons par $\deg P$ la plus grande puissance d'un polynôme P, on lit alors **degré du polynôme** P.

Le résultat suivant montre que le calcul des primitives de fonctions rationnelles revient à un calcul automatique de primitives de fractions simples.

Théorème 4.31 *Soit P, Q deux polynômes tels que $\deg P < \deg Q$. Soit a le coefficient du monôme $x^{\deg Q}$ dans le polynôme Q. Alors, on a que*

(i) *il existe des entiers naturelles $n_1, \ldots, n_\ell$ et $m_1, \ldots, m_k$ tels que*

$$n_1 + \ldots + n_\ell + m_1 + \ldots + m_k = \deg Q,$$

et il existe des racines réelles $x_1, \ldots, x_\ell$ et des valeurs réelles $p_i, q_i, i = 1, \ldots, k$ telles que

$$Q(x) = a \prod_{i=1}^{\ell} (x - x_i)^{n_i} \prod_{i=1}^{k} (x^2 + p_i x + q_i)^{m_i}, \tag{4.28}$$

avec

$$p_i^2 - 4q_i < 0, \qquad \forall i = 1, \dots, k,$$

(*ii*) *la fraction* P/Q *s'écrit sous la forme*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{n_\ell} \frac{a_{ij}}{(x - x_i)^j} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{b_{ij}x + c_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j} \tag{4.29}$$

où les a_{ij}, b_{ij} *et* c_{ij} *sont des réels.*

Remarque 4.32 *Il est connu en Algèbre (cf.[7]) que la division euclidienne (suivant les puissances décroissantes) d'un polynôme* P *par un autre polynômes* $Q \neq 0$ *donne*

$$P = SQ + R, \tag{4.30}$$

où S *est un polynôme dit* ***quotient*** *et* R *est un autre polynôme dit* ***reste de la division****, lesquels satisfont* $\deg R < \deg Q$*. Le calcul de la primitive d'une fraction* P/Q *revient donc à trouver la primitive d'un polynôme, ce qui est immédiat, et les primitives des fractions simples que l'on voit dans la somme (4.29), ce qui est présenté ci-après.*

Intéressons-nous maintenant à calculer les primitives des fractions simples apparaissant dans (4.29). Considérons une fraction P/Q telle que $\deg P < \deg Q$. Pour la première forme des fractions simples, nous avons clairement

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x - x_i} = \log|x - x_i| + c \tag{4.31}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x - x_i)^j} = \frac{-1}{(j-1)\,(x - x_i)^{j-1}} + c, \qquad j > 1. \tag{4.32}$$

Quant à la seconde forme des fractions simples, posons de manière générale,

$$\frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^j}, \tag{4.33}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$ et p, q sont tels que $p^2 - 4q < 0$. Nous pouvons alors écrire

$$x^2 + px + q = (x - p/2)^2 + q - p^2/4 = (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

Notons que $\alpha \pm i\beta$ sont les racines complexes du dernier polynôme. En effectuant le changement de variable $x = \alpha + \beta t$, nous obtenons que

$$\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^j}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{\beta^{2(j-1)}} \int \frac{t}{(t^2 + 1)^j}\,\mathrm{d}t + \frac{a\alpha + b}{\beta^2} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^j}\,\mathrm{d}t$$

Par conséquent, le calcul de la primitive de la fraction (4.33) se ramène à trouver les primitives suivantes :

$$I_j = \int \frac{t}{(t^2+1)^j}\,\mathrm{d}t, \qquad J_j = \int \frac{1}{(t^2+1)^j}\,\mathrm{d}t$$

Pour la première primitive I_j, choisissons le changement de variable $u = t^2 + 1$. Nous obtenons alors

$$I_j = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^j}\,\mathrm{d}u$$

D'où,

$$I_1 = \frac{1}{2}\log(t^2+1) + c, \tag{4.34}$$

et pour $j > 1$,

$$I_j = \frac{-1}{2(j-1)(t^2+1)^{j-1}} + c \tag{4.35}$$

Pour la seconde primitive J_j, une intégration par parties donne

$$J_j = \frac{t}{(t^2+1)^j} + 2j\int \frac{t^2}{(t^2+1)^{j+1}}\,\mathrm{d}t,$$

donc,

$$J_{j+1} = \frac{1}{2j}\,\frac{t}{(t^2+1)^j} + \frac{2j-1}{2j}J_j \tag{4.36}$$

Par récurrence, le calcul de la primitive se réduit à celui de

$$J_1 = \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \arctan t + c \tag{4.37}$$

Et par substitution, on obtient les fonctions de x.

Exemples **4.33** (1) Considérons l'intégrale

$$\int \frac{x}{(x-8)(2x-8)}\,\mathrm{d}x$$

Par décomposition, il vient que

$$\frac{x}{(x-8)(2x-8)} = \frac{1}{x-8} - \frac{1}{2x-8}$$

D'où,

$$\int \frac{x}{(x-8)(2x-8)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-8} - \int \frac{\mathrm{d}x}{2x-8} = \log\left(\frac{|(x-3|}{\sqrt{|2x-8|}}\right) + c$$

(2) Calculons

$$\int \frac{3}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

La décomposition en fractions simples donne

$$\frac{3}{1+x^3} = \frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}$$

Et nous obtenons

$$x^2 - x + 1 = (x-1/2)^2 + \frac{3}{4}$$

En posant $x = 1/2 + \sqrt{3}t/2$, il résulte

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t-\sqrt{3}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\log(t^2+1) - \sqrt{3}\arctan t + c$$

Et donc

$$\int \frac{3}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} - \sqrt{3}\ \arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$$

○

Fonction rationnelle en sin et cos

Maintenant, considérons une fonction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$, c'est-à-dire à la place de x dans un fraction rationnelle, on trouve l'une ou l'autre fonction ou un produit de puissances des deux, ce que l'on note par $R(\sin x, \cos x)$. Intéressons-nous à calculer la primitive

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x \tag{4.38}$$

La méthode générale consiste à utiliser le changement de variable $t = \tan(x/2)$. De ce fait et en vertu de Pythagore, nous avons

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Ce qui, par la formule de changement de variable (4.26), ramène l'intégration (4.38) au calcul de la primitive d'une fonction rationnelle en t. Ce changement de variable donne facilement en utilisant (3.48–3.49)

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{1+t^2} \tag{4.39}$$

<u>Exemples</u> **4.34** (1) Calculons la primitive

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$

En utilisant (4.39), nous obtenons que

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log|t| + c = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

(2) Soit à calculer

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}.$$

Avec le changement de variable $t = \tan(x/2)$ et la propriété

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \tag{4.40}$$

il vient que

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

○

Il existe des cas particuliers où il serait plus facile d'utiliser d'autres changements de variable. Nous avons par exemple les trois cas suivants. Nous donnons en parallèle le changement de variable adéquat, R étant une fonction rationnelle.

$$\int R(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x, \qquad t = \sin x;$$

$$\int R(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x, \qquad t = \cos x;$$

$$\int \frac{R(\tan x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x, \qquad t = \tan x$$

<u>Exemples</u> **4.35** (1) Calculons

$$\int \tan x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x$$

Considérons le changement de variable $t = \cos x$ et notons que $\sin x = \sqrt{1-t^2}$. Rappelons que $\arccos' t = -1/\sqrt{1-t^2}$, on a

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = -\log|t| + c = \log \frac{1}{|\cos x|} + c$$

(2) Considérons cette fois-ci

$$\int \cot x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, \mathrm{d}x$$

Posons $t = \sin x$ et notons que $\cos x = \sqrt{1-t^2}$. Rappelons que $\arcsin' t = 1/\sqrt{1-t^2}$. Il en résulte que

$$\int \cot x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \log|t| + c = \log|\sin x| + c$$

○

Si, par ailleurs, la fraction $R(\cos x, \sin x)$ se réduit à un polynôme trigonométrique $P(\cos x, \sin x)$, alors il est toujours possible de linéariser P en une combinaison linéaire de cos et sin et ce à l'aide de l'exponentiel polaire ($e^{ix} = \cos x + i \sin x$) et de la formule de Moivre ($(e^{ix})^n = e^{inx}$). En effet, on a

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$
$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

Ainsi, par substitution, on obtient ladite combinaison. Par exemple,

$$P(\cos x, \sin x) = \cos^2 x \sin^3 x$$

Alors, il vient que

$$P(x) = \frac{1}{2^2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^2 \frac{1}{2^3 i^3}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3$$

ce qui donne après simplification que

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{i}{2^5}\left((e^{i5x}-e^{-i5x})-(e^{i3x}-e^{-i3x})-2(e^{ix}-e^{-ix})\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(-\sin(5x)+\sin(3x)+2\sin x\right) \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\int P(\cos x,\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\cos(5x)-\frac{1}{3}\cos(3x)-2\cos x\right)+c$$

Fonction rationnelle en e^x

Considérons une fonction rationnelle en e^x, i.e.

$$R(e^x) = \frac{P(e^x)}{Q(e^x)}$$

où P et Q deux polynômes. Nous voulons calculer

$$\int R\left(e^x\right)\mathrm{d}x$$

Pour ce faire, observons qu'il suffit d'effectuer le changement de variables $e^x = t$. On obtient alors une fonction rationnelle en t et l'intégrale se traduit par

$$\int \frac{R(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

<u>Exemples</u> **4.36** (1)

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \\ &= \log\left(\frac{t}{1+t}\right)+c \\ &= x+\log\left(\frac{1}{1+e^x}\right)+c \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x} &= \int \frac{2}{e^x-e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c = \log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right|+c \\ &= \log\left|\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c \end{aligned}$$

○

Tableau récapitulatif de primitives

1. $\displaystyle\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log|x|$

3. $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x$

4. $\displaystyle\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\log|\cos x|$

5. $\displaystyle\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\log|\cos x|$

6. $\displaystyle\int \cot x \,\mathrm{d}x = \log|\sin x|$

7. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$

8. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$

9. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x$

10. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x$

11. $\displaystyle\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x$

12. $\displaystyle\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log a}$

13. $\displaystyle\int \sinh x \,\mathrm{d}x = \cosh x$

14. $\displaystyle\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x$

15. $\displaystyle\int \tanh x \,\mathrm{d}x = \log\cosh x$

16. $\displaystyle\int \coth x \,\mathrm{d}x = \log|\sinh x|$

17. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} = \arctan\sinh x$

18. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x} = -\operatorname{arccot}\cosh x$

19. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = \tanh x$

20. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = -\coth x$

21. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} = -\frac{1}{a}\operatorname{arccot}\frac{x}{a}$

22. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$

23. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|$

24. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$

25. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2\pm x^2}} = \frac{1}{a}\log\left|\frac{x}{a+\sqrt{a^2\pm x^2}}\right|$

26. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}$

27. $\displaystyle\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|$

28. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$

29. $\displaystyle\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x = e^{ax}\,\frac{a\sin(bx)-b\cos(bx)}{a^2+b^2}$

5 Développement limité

Nous allons apprendre dans ce chapitre comment il est possible d'approximer des fonctions par un polynôme. Nous avons pu voir par le théorème des accroissements finis et plus spécialement par la formule de Taylor qu'une fonction dérivable une fois ou plusieurs fois peut être approchée par un polynôme. Nous allons découvrir ici qu'un tel polynôme approximatif peut exister sans que la fonction ne soit dérivable ou même continue en un point donné. Cependant, les meilleurs exemples sont toujours ceux des fonctions dérivables pour lesquelles il y a l'avantage de connaître facilement les coefficients du polynôme approximatif.

5.1 Définitions et exemples

Soit f une fonction définie au voisinage de 0, sauf peut-être en 0. On dit que f admet un **développement limité** d'ordre n au voisinage de 0 ou en 0 (en abrégé $\mathrm{DL}_n(0)$) s'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et des constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$, tels que pour tout $x \in I \setminus \{0\}$,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x), \tag{5.1}$$

où ε est une fonction définie sur I telle que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. Le polynôme apparaissant dans (5.1) est dit **partie régulière** du développement limite que l'on notera par

$$[f(x)]_n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

Et le dernier terme dans (5.1) est appelé **reste** ou **terme complémentaire** et peut être écrit (cf. 3.55) sous la forme

$$x^n \varepsilon(x) = o(x^n)$$

<u>Exemple</u> **5.1** Considérons la fonction $x \mapsto 1/(1-x)$. Par division suivant les puissances croissantes à l'ordre n, nous obtenons

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + x^n \frac{x}{1-x} \tag{5.2}$$

Nous voyons que $x/(1-x) \to 0$ quand $x \to 0$. Ainsi, cette fonction admet un développement d'ordre n pour un choix quelconque de $n \in \mathbb{N}$. ○

La définition du développement limité n'exige pas de continuité, encore moins la dérivabilité de la fonction en question au point 0. Nous avons ci-après un bel exemple d'une fonction développable sans être continue :

<u>Exemple</u> **5.2** (**Partout discontinu**) Soit la fonction f telle que $f(0) = 0$ et

$$f(x) = 1 + x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

où

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction ainsi définie n'est en aucun point pas continue dans $\mathbb{R}$ alors que sa formulation même est un DL_2. ○

La définition de développement limité peut être généralisée au cas d'un point quelconque a ou à l'infini. On dit alors qu'une fonction f admet un développement limité d'ordre n en a (en abrégé $\mathrm{DL}_n(a)$ s'il est possible d'écrire f au voisinage de a sous la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x^n - a)^n + o(x-a)^n \tag{5.3}$$

Nous remarquons qu'il est possible de réécrire la formule (5.3) sous la forme (5.1) et ce en posant $h = x - a$:

$$g(h) := f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$$

Ainsi, le développement de f d'ordre n en a est le développement de g d'ordre n en 0.

Par ailleurs, on dit qu'une fonction f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) (en abrégé $\mathrm{DL}_n(\pm\infty)$) si l'on peut écrire, pour x (resp. $-x$) suffisamment grand :

$$f(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right), \tag{5.4}$$

où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n.

Remarquons pour (5.4) qu'il est possible de se ramener au cas du développement limité au voisinage de 0 en posant $h = 1/x$. Ainsi, nous nous contenterons pour la suite d'étudier seulement le développement limité en 0 et notons simplement par DL_n un développement limité d'ordre n.

5.2 Propriétés fondamentales

La définition du DL entraîne déjà quelques propriétés dont la proposition trivial suivante et les remarques ci-après.

Proposition 5.3 *Soit f une fonction définie au voisinage de 0. Alors, on a que*

(*i*) *f admet un DL_0 ssi $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe. De plus, si $f(0)$ n'est pas définie, on peut prolonger par continuité f en 0 si DL_0 existe.*

(*ii*) *f admet un DL_1 ssi $f'(0)$ existe. En cas d'existence, la partie régulière de ce DL est $f(0) + xf'(0)$.*

Remarque 5.4 *Notons en premier que si une fonction f admet un DL_n avec $n \geq 1$, elle admet alors un DL_p, pour tout $p < n$. En effet, il suffit de voir que (5.1) peut s'écrire sous la forme*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_px^p + x^p\big(x + \cdots + x^{n-p} + x^{n-p}\varepsilon(x)\big)$$

Par ailleurs, si f admet un développement d'ordre $n \geq 1$ sous la forme (5.1) et que l'on a $f(0) = a_0$, alors

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1} + o(x^{n-1}) \xrightarrow[x\to 0]{} a_1$$

Ce qui montre qu'en plus d'être continue, f est dérivable en 0. Néanmoins, la dérivabilité d'une fonction f à l'origine est équivalente à la dérivabilité de la fonction ε (voir (5.1)) en ce même point, ce qui n'est pas exigé dans la définition du développement limité.

<u>Exemple</u> **5.5** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et définissons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^{n+1}\sin x^{-(n+1)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Observons que f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et continue en 0 par prolongement. Elle admet le développement limité d'ordre n suivant

$$f(x) = 0 + 0\cdot x + \cdots + 0\cdot x^n + x^n\left(x\sin x^{-(n+1)}\right)$$

En outre, f est dérivable et nous avons $f'(0) = 0$. En même temps, nous avons pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = (n+1)x^n\sin x^{-(n+1)} - \frac{n+1}{x}\cos x^{-(n+1)},$$

ce qui n'a pas de limite quand x tend vers 0. Ainsi, les dérivées supérieures de f n'existent pas. ○

Théorème 5.6 (Unicité) *Si une fonction admet un développement limité en* 0*, alors ce développement est unique.*

L'exemple dans la Remarque 5.4 montre qu'un développement limité peut exister sans même que la fonction ne soit continue. Toutefois la dérivabilité d'une fonction garantit l'existence d'un développement limité et ce en vertu de la formule de Taylor :

Théorème 5.7 *Si f est une fonction telle que $f^{(n)}(0)$ existe, alors f admet* DL_n *donné par la formule de Taylor :*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \tag{5.5}$$

Ce résultat donne lieu à un conséquence directe permettant de connaître des dérivées d'une fonction donnée si tant est que l'on connaît son développement limité.

Corollaire 5.8 *Soit f une fonction qui admet un* DL_n *donné par*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$$

Si $f^{(n)}(0)$ existe, alors, pour tout $k = 1, \dots, n$, on a

$$f^{(k)}(0) = a_k k!$$

<u>Exemple</u> **5.9** La fonction $x \mapsto 1/(1-x)$ est infiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et on a

$$\left[\frac{1}{1-x}\right]_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad f^{(n)}(0) = n!$$

○

5.3 Opérations algébriques sur les DL

Le calcul des dérivées successives d'une fonction donnée peut se révéler difficile, ce qui rend la formule de Maclaurin-Young peu utile. Cependant, il est possible dans bien des cas de connaître des développements limités de fonctions relativement complexes et ce par des opérations algébriques sur les développements limités de fonctions plu simples entrant dans la formulation de la fonction donnée. Le théorème suivant fournit de tels outils.

Théorème 5.10 *Soit f, g deux fonctions qui admettent un développement limité d'ordre n à l'origine. Alors, on a que*

(*i*) *la fonction $f + g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 et sa partie régulière est la somme des parties régulières de f et g.*

(*ii*) *la fonction fg admet un développement limité d'ordre n en 0 et sa partie régulière s'obtient en ne gardant dans le produit des parties régulières de f et de g que les puissances d'ordre inférieur ou égale à n, le reste faisant partie du reste.*

(*iii*) *la fonction f/g admet un développement d'ordre n en 0 sous la condition que*

$$\lim_{x \to 0} g(x) \neq 0$$

Sa partie régulière est le quotient à l'ordre n dans la division suivant les puissances croissantes de la partie régulière de f par celle de g.

<u>Exemple</u> **5.11** Considérons une fonction f qui admet le développement limité d'ordre 1 suivant

$$[f(x)]_1 = 2 + x$$

et cherchons le développement de la fonction $1/f$.

D'après le Théorème 5.10, nous obtenons le développement suivant en effectuant une division suivant les puissances croissantes de 1 par $2 + x$,

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]_1 = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$$

Cependant, nous pouvons obtenir ce même développement en utilisant le développement limité usuel suivant

$$\left[\frac{1}{1-x}\right]_1 = 1 + x \tag{5.6}$$

En effet, nous avons

$$\frac{1}{[f(x)]_1} = \frac{1}{2(1 + x/2)}$$

En choisissons $x/2$ assez petit et en remplaçant dans (5.6), il résulte que

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]_1 = \frac{1}{2}(1 - x/2) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$$

○

<u>Exemple</u> **5.12** Soit les développements limités suivants

$$\begin{aligned}[f(x)]_2 &= 3x - x^2 \\ [g(x)]_2 &= 2 + x\end{aligned}$$

Calculons $[f(x)g(x)]_2$. Nous avons

$$[f(x)]_2\,[g(x)]_2 = 6x + x^2 - x^3$$

Ce qui, par le Théorème 5.10, donne

$$[f(x)g(x)]_2 = 6x + x^2$$

Maintenant, si nous voulons $[f(x)/g(x)]_2$, il est possible d'effectuer une division suivant les puissances croissantes pour obtenir directement que

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]_2 = \frac{3}{2}\,x - \frac{5}{4}\,x^2$$

Sinon, nous calculons d'abord par division euclidienne

$$\left[\frac{1}{g(x)}\right]_2 = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8}$$

D'où, il vient que

$$[f(x)]_2\left[\frac{1}{g(x)}\right]_2 = \frac{3}{2}\,x - \frac{5}{4}\,x^2 + \frac{1}{8}\,x^3 - \frac{1}{8}\,x^4$$

Et par le Théorème 5.10, nous obtenons que

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]_2 = (3x - x^2)\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8}\right) = \frac{3}{2}\,x - \frac{5}{4}\,x^2$$

○

<u>Exemple</u> **5.13** Trouvons le développement de la fonction tan à l'ordre 3. Nous avons par la formule de Taylor,

$$\begin{aligned}[\sin x]_4 &= x - \frac{x^3}{6} \\ [\cos x]_3 &= 1 - x^2\end{aligned}$$

D'où,

$$\left[\frac{1}{\cos x}\right]_3 = 1 + x^2$$

et donc,

$$[\sin x]_4 \left[\frac{1}{\cos x}\right]_3 = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)(1 + x^2) = x - \frac{7}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^5$$

Par conséquent, il vient que

$$[\tan x]_3 = \left[\frac{\sin x}{\cos x}\right]_3 = x - \frac{7}{6}x^3$$

Ce que nous pouvions obtenir directement par division euclidienne suivant les puissance croissantes. ○

En plus des opérations que nous venons de voir, il est possible aussi de trouver le développement limité de fonctions qui sont le résultat d'une composition de fonctions dont le développement limité est connu.

Théorème 5.14 *Soit f, g deux fonctions admettant toutes les deux DL_n. Supposons que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Alors, la fonction composée $f \circ g$ admet un DL_n que l'on obtient en substituant la partie régulière de g dans celle de f et en ne gardant dans la simplification que les puissances d'ordre au plus égal à n.*

<u>Exemples</u> **5.15** (1) Considérons la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$$

À l'aide des développements standards des fonctions $x \mapsto 1/(1-x)$ et $\sin x$, nous obtenons grâce au Théorème 5.14 que le développement de f à l'ordre 2 est

$$[f(x)]_2 = 1 + x + x^2$$

Nous remarquons ici que $[f(x)]_2 = [1/(1-x)]_2$, ce qui correspond bien au fait connu $\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$. La différence apparaîtra dans les DL supérieurs.

(2) Soit la fonctions $x \mapsto e^{\cos x}$. Il est facile de voir que

$$[\cos x]_3 = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad [e^x]_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Alors, par substitution et application du Théorème 5.14, il vient que

$$[e^{\cos x}]_2 = e\,[e^{\cos x - 1}]_2 = e - \frac{e}{2}x^2$$

(3) Calculons le DL_5 de la fonction $f(x) = (1+\sin x)^x$. Commençons par calculer $[\log(1+\sin x)]_5$. Nous avons les DL connus

$$\begin{aligned} [\log(1+x)]_5 &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \\ [\sin x]_5 &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \end{aligned}$$

D'où, par substitution et simplification

$$[\log(1+\sin x)]_5 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24}$$

Maintenant, remarquons que $f(x) = e^{x\log(1+\sin x)}$. Alors, nous obtiendrons le développement souhaité en remplaçant dans le développement d'ordre 3 de e^x, i.e.

$$[e^x]_3 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

Ainsi, il vient que

$$[f(x)]_5 = \left[e^{x\log(1+\sin x)}\right]_5 = 1 + x^2 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{2}{3}\,x^4 - \frac{7}{12}\,x^5$$

○

5.4 Dérivation et intégration d'un DL

Intéressons-nous d'abord à la dérivation d'un développement limité. Nous avons pu voir que l'existence du développement limité d'une fonction donnée n'exige pas l'existence de sa dérivée. Cependant, si une fonction et sa dérivée admettent des développements limités jusqu'à un certain ordre, alors on peut affirmer la chose suivante.

Théorème 5.16 *Soit f une fonction dérivable au voisinage de 0 telle que f' admette le développement limité suivant*

$$[f'(x)]_n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \tag{5.7}$$

Alors, f admet à l'origine le développement limité suivant

$$[f(x)]_{n+1} = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_{n+1}}{n+1}x^{n+1} \tag{5.8}$$

Regardons maintenant l'intégration des fonctions admettant un développement limité. Nous avons :

Théorème 5.17 *Soit $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable admettant un* DL_n *donné par*

$$[f(x)]_n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \tag{5.9}$$

Alors, pour tout $x \in [-a, a]$ suffisamment proche de 0*, on a*

$$\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]_{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} \tag{5.10}$$

<u>Exemples</u> **5.18** (1) Nous avons le développement usuel

$$\left[\frac{1}{1-x}\right]_n = 1 + x + \cdots + x^n$$

Par dérivation, il résulte que

$$\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]_{n-1} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x}\right]_n = 1 + 2x + 3x^3 + \cdots + nx^{n-1}$$

D'autre part, nous obtenons par intégration que

$$[\log(1-x)]_{n+1} = \left[-\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t}\right]_{n+1} = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

○

5.5 Développement des fonctions usuelles

Grâce au Théorème 5.5, nous donnons ici le développement de quelques fonctions standards infiniment dérivables au point 0.

(1)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \tag{5.11}$$

Observons que

$$\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}\sin(x) = \sin\left(x + p\frac{\pi}{2}\right)$$

(2)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \tag{5.12}$$

Notons que

$$\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}\cos(x) = \sin\left(x + p\frac{\pi}{2}\right)$$

(3)

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \tag{5.13}$$

Nous avons

$$\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}\log(1+x) = (p-1)!(1+x)^{-p}$$

(4)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \tag{5.14}$$

Remarquons que

$$\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}e^x = e^x$$

(5) Pour un réel quelconque α,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(1-\alpha)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha\cdots(1-\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \tag{5.15}$$

Et nous avons pour tout $x > -1$,

$$\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}x^p}(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-p+1)(1+x)^{\alpha-p}$$

En particulier, nous avons pour $\alpha = \pm 1/2$,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2\cdot 4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n + o(x^n)\\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2\cdot 4} + \cdots + (-1)^n\frac{3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n + o(x^n)\end{aligned} \tag{5.16}$$

(6) À partir de (5.16), il vient que

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times\cdots(2n)}x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

Par intégration, nous obtenons que

$$\arcsin x = x + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times \cdots \times (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

(7) (5.2) donne

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 + x^2 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n})$$

et donc nous obtenons par intégration que

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

6 Équations différentielles

Ce chapitre se veut une introduction à la théorie des équations différentielles. Nous nous intéresserons en premier lieu à des équations différentielles du premier ordre célèbres, notamment les équations dites à variables séparées et les équations linéaires. En second, nous aborderons les équations différentielles linéaires du second ordre, en laissant les équations d'ordre supérieur à la transformation de Laplace au chapitre suivant.

6.1 Définitions et généralités

On appelle **équation différentielle** (en abrégé **ED**) toute équation mettant en relation une fonction inconnue y de la variable indépendante x et une ou plusieurs de ses dérivées. Par exemple,

$$y' = 5x + 3$$
$$e^y\, y'' + 2(y'')^2 = 1$$
$$4y^{(3)} + \sin x\, y^{(5)} + 5xy = 0$$

où nous notons de manière générale

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = \text{ la dérivée d'ordre } n$$

L'**ordre** d'une ED est l'ordre de la dérivée la plus élevée de la fonction inconnue apparaissant dans l'équation. Par exemple, dans les trois premières équations ci-dessus, les ordres respectifs sont $1, 2$ et 5.

L'écriture dite *standard* d'une ED d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est donnée sous la forme

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{6.1}$$

où f est une application réelle définie sur une partie de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Une ED est dite **équation différentielle ordinaire** (en abrégé **EDO**) si la fonction inconnue qu'elle comprend ne dépend que d'une seule variable indépendante ou que les dérivées de la fonction inconnue apparaissant dans l'équation sont données par rapport à une seule variable indépendante. Les premiers exemples donnés sont des équations différentielles ordinaires. Si la fonction inconnue dépend de plusieurs variables indépendantes et on voit apparaître dans l'équation des dérivées par rapport à deux variables ou plus, l'équation est dite **équation aux dérivées partielles** (en abrégé **EDP**). Par exemple,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Une **solution** d'une ED d'une fonction inconnue y et d'une variable indépendante x sur l'intervalle I est la fonction $y(x)$ qui satisfait l'équation pour tout $x \in I$. Sa représentation graphique est dite **courbe intégrale**.

<u>Exemple</u> **6.1** Soit l'ED

$$y'' + 4y = 0$$

Alors, il est facile de vérifier que la fonction donnée par

$$y(x) = c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x),$$

où c_1, c_2 sont des constantes arbitraires, est une solution sur tout $\mathbb{R}$ de l'équation donnée. ○

Résoudre ou **intégrer** une ED consiste à trouver toutes les solutions possibles de l'équation. La **forme générale** d'une ED est celle qui donne toutes ses solutions sous la même forme. Notez qu'il est possible qu'une solution d'une ED peut ne pas s'écrire sous la forme générale de la solution. On dit dans ce cas que c'est une solution **singulière**.

Si des conditions supplémentaires sur la fonction inconnue et ses dérivées sont imposées pour une valeur donnée de la variable indépendante, on parle alors de **problème de valeur initiale** ou **problème de Cauchy**. Ces conditions constituent les **conditions initiales**, une expression qui sous-entend que x, la variable indépendante notée souvent t, est un temps, ce qui n'est pas nécessairement le cas. Si les conditions supplémentaires sont données pour plusieurs valeurs de la variable indépendante, le problème est appelé **problème de valeur limite** et les conditions sont des **conditions aux limites**. Une solution à un problème de valeur initiale ou de valeur limite est une fonction qui résout l'ED et satisfait les contraintes supplémentaires du problème.

<u>Exemples</u> **6.2** Soit
$$y'' + 2y' = e^x; \quad y'(\pi) = 1$$
C'est là un problème de valeur initiale car les deux conditions supplémentaires portent sur une même valeur $x = \pi$. Cependant, le problème suivant

$$y'' + 2y' = e^x; \quad y(0) = 1, y(1) = 1$$

est un problème de valeur limite. ○

L'existence et l'unicité *locales* des solutions des ED constituent le fondement de la théorie desdites équations. Le théorème classique d'existence et d'unicité de **Cauchy-Lipschitz** (voir par exp. [4]) garantit pour nous l'existence et l'unicité des solutions des équations usuelles que nous allons voir. Malheureusement, nous n'allons pas pouvoir donner la démonstration ce théorème, laquelle demande la généralisation de la notion de dérivabilité (ou différentiabilité) à des espaces de Banach qu'est $\mathbb{R}^n$, ce qui sort du cadre des objectifs modestes de cet ouvrage.

6.2 Équations différentielles du premier ordre

Nous allons considérer ici les ED du premier ordre élémentaires du type standard, c'est-à-dire données sous la forme

$$y' = f(x, y)$$

Équations à variables séparées

On appelle *ED du premier ordre à variables séparées* toute équation de la forme

$$f(y)y' = g(x) \tag{6.2}$$

où f et g sont deux fonctions.

Pour résoudre une équation du type (6.2), supposons que F et G soient des primitives de f et g, i.e. Alors, par dérivation, nous obtenons que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(y(x)) = f(y)y'$$

De ce fait, la formule (6.2) est équivalente à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(y(x)) = G'(x),$$

et, par intégration, il en résulte que

$$F(y) = G(x) + c \tag{6.3}$$

Inversement, toute fonction dérivable y satisfaisant (6.3) est solution de l'équation (6.2). En effet, par dérivation des deux côtés de (6.3), il vient que

$$F'(y)y = G'(x),$$

ce qui est équivalent à

$$f(y)y = g(x)$$

Ainsi, résoudre (6.2) revient à trouver des primitives à f et g, et toute fonction satisfaisant (6.3) est une solution à (6.2).

Remarquons que réécrire une ED à variables séparées sous la forme (6.2) s'appelle **séparation des variables**.

Dans le cas où il est possible de trouver les primitives des fonctions f et g de l'éq. diff. (6.2), il se peut qu'il ne soit pas possible d'exprimer y en fonction de x. Dans ce cas, la solution est laissée sous sa **forme implicite** (6.3).

Si l'on impose une condition initiale $y(x_0) = y_0$, on choisira alors la constante c apparaissant dans l'équation (6.3) telle que

$$c = F(y_0) - G(x_0)$$

<u>Exemples</u> **6.3** (1) Intégrons l'équation :

$$y' = x(1 + y^2)$$

Par séparation des variables, il résulte

$$\frac{y'}{1 + y^2} = x$$

D'où,

$$\arctan y = \frac{x^2}{2} + c \Longrightarrow y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

(2) Considérons l'équation

$$y' = -\frac{x}{y}$$

qui, en séparant les variables, donne

$$yy' = -x$$

La solution est exprimée sous la forme :

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c \Longleftrightarrow y^2 + x^2 = 2c$$

La dernière équation montre que c doit être positive si y est une solution de l'équation. Posons alors $2c = a^2$, ce qui donne

$$y^2 + x^2 = a^2.$$

Cette équation présente deux solutions différentielles en fonction de la variable x :

$$y_1 = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad -a < x < a,$$

$$y_2 = -\sqrt{a^2 - x^2}, \quad -a < x < a$$

Les courbes intégrales y_1 sont des demi-cercles au-dessus de l'axe des abscisses, et les y_2 sont des demi-cercles en-dessous de l'axe des x.

(3) Soit

$$y' \cos y - 2x = 0, \qquad y(0) = 0$$

La solution de ce problème de valeur initiale sur l'intervalle $(-\pi/2, \pi/2)$ s'écrit sous la forme

$$\sin y = x^2 + c$$

Étant donné la condition initiale, la solution est donc donnée par la fonction $y = \arcsin x^2$. ○

Une ED du premier ordre sous la forme standard est dite **homogène** en x et y si

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad f(tx, ty) = f(x, y)$$

Autrement dit, l'équation peut être écrite sous la forme

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Pour ce genre d'ED, il est possible d'effectuer une séparation des variables en opérant le changement $y = xv$. Il vient alors que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = v + x\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = g(v),$$

ce qui donne par séparation des variables

$$\frac{v'}{g(v) - v} = \frac{1}{x}$$

L'ED résultant exprimée en fonction des variables x et v peut être résolue comme équation différentielle à variables séparées, la solution de l'équation originelle étant obtenue en effectuant la substitution inverse.

<u>Exemple</u> **6.4** Nous avons l'éq. diff. homogène

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

En utilisant la substitution invoquée précédemment $y = xv$, nous obtenons

$$x\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{v}$$

La solution de cette équation est alors

$$v^2 = 2\log|x| + c = \log x^2 + c$$

Ainsi, la solution à l'équation différentielle première est donnée par

$$y^2 = x^2 \log x^2 + cx^2$$

○

Équations linéaire du premier ordre

On appelle *ED linéaire du premier ordre* (en abrégé **EDL^1**) toute équation de la forme

$$y' = f(x)y + g(x) \tag{EDL^1}$$

où g et h sont deux fonctions définies sur un intervalle donné. On définit l'**ED homogène associée** (**EDH**) à (EDL^1) en y annulant le terme $g(x)$, i.e.

$$z' = f(x)z \tag{6.4}$$

Pour résoudre (EDL^1), on peut utiliser la méthode dite **méthode d'intégration** que l'on résume ci-après. L'équation homogène associée est une équation à variables séparées que l'on peut écrire sous la forme

$$\frac{z'}{z} = f(x)$$

Une primitive de z'/z est donnée par $\log|z|$, donc

$$\log|z| = \int f \mathrm{d}x = F(x) + c,$$

où F est une primitive de f sur I. On obtient que

$$|z| = e^c\, e^{F(x)} \Longrightarrow z = \pm e^c\, e^{F(x)}$$

La valeur $\pm e^c =: \lambda$ couvre tout $\mathbb{R}^*$ et comme $z = 0$ est une solution de l'équation homogène, la solution générale de l'équation homogène est alors

$$z(x) = \lambda\, e^{F(x)}$$

Ensuite, une solution particulière y_p de (EDL^1) peut être recherchée par la **méthode de variation de la constante** sous la forme

$$y_p(x) = \Lambda(x) e^{F(x)}$$

Nous avons

$$y_p'(x) = (\Lambda'(x) + \Lambda(x) f(x)) e^{F(x)}$$

Par substitution dans (EDL^1), nous obtenons que y_p est une solution de cette dernière ssi

$$\forall x \in I: \qquad \Lambda'(x) = g(x)\, e^{-F(x)},$$

ce qui donne

$$\Lambda(x) = \int g(x) e^{-F(x)}\, \mathrm{d}x$$

La solution générale de l'équation complète (EDL^1) est donnée par

$$y = e^{F(x)} \Lambda(x) \tag{6.5}$$

où une constante arbitraire apparaît dans le terme $\Lambda(x)$.

Le théorème suivant résume les propriétés des solutions de EDL^1.

Théorème 6.5 *Soit une* (EDL^1) *avec f, g des fonctions continues sur un intervalle I. Alors, on a que*

(*i*) *la solution générale de l'équation homogène associée* (6.4) *s'écrit sous la forme*

$$z = \lambda\, e^{F(x)},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire et F est une primitive de f.

(*ii*) *toute solution de l'équation complète* (EDL[1]) *est de la forme*

$$y = z + y_p = e^{F(x)} \int g(x)e^{-F(x)}\,\mathrm{d}x, \tag{6.6}$$

où z est la solution générale de l'équation homogène et y_p est une solution particulière de l'équation complète (EDL[1]) *donnée par*

$$y = e^{F(x)} \int g(x)e^{-F(x)}\,\mathrm{d}x$$

(*iii*) *pour tout couple (x_0, y_0) avec $x_0 \in I$, il existe une unique solution au problème de valeur initiale*

$$y' = f(x)y + g(x), \qquad y(x_0) = y_0,$$

donnée par

$$y = e^{F(x)}\Big(y_0 e^{-F(x_0)} + \int_{x_0}^{x} g(t)\, e^{-F(t)}\,\mathrm{d}t\Big) \tag{6.7}$$

Remarque 6.6 *Intégrer une EDL[1] revient donc à calculer deux intégrales (primitives) :*

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \Lambda(x) = \int g(x)e^{-F(x)}\,\mathrm{d}x$$

<u>Exemples</u> **6.7** (1) Considérons l'EDL suivante sur $(1, \infty)$:

$$y' = \frac{y}{x-1} + 1$$

Trouvons la solution de cette équation vérifiant la condition initiale $y(2) = 0$. Nous avons sur $(1, \infty)$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int^x \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \log\frac{1}{x-1} \\ \Lambda(x) &= \int^x e^{-\log\big(1/(x-1)\big)}\,\mathrm{d}x = \log(x-1) + c \end{aligned}$$

Ce qui donne la solution générale :

$$y = (x-1)\big(\log(x-1) + c\big)$$

Si $y(2) = 0$, alors $c = 0$. Donc, la solution à notre problème de valeur initiale est donnée par

$$y = (x-1)\log(x-1)$$

(2) Soit l'ED linéaire suivante

$$y' \sin x - y \cos x = 1 \tag{6.8}$$

L'EDH associée est

$$z' \sin x - z \cos x = 0$$

Cette équation admet des solutions sur tout intervalle $(k\pi, (k+1)\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Nous avons

$$\frac{z'}{z} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

donc $z = \lambda \sin x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous voulons une solution particulière de la forme $y_0 = \lambda(x) \sin x$ qui est solution de (6.8) ssi

$$\sin x \left(\lambda'(x) \sin x + \lambda(x) \cos x\right) - \lambda(x) \cos x = 1$$

ce qui donne

$$\lambda'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$$

La fonction $-\cot x$ vérifie cette dernière équation. Nous pouvons donc choisir

$$y_0(x) = -\cos x$$

et la solution générale de (6.8) sur les intervalles $(k\pi, (k+1)\pi)$ est donnée par

$$y = c \sin x - \cos x$$

○

Équations de Bernoulli et de Riccati

Nous allons voir ici deux cas particuliers d'ED du premier ordre dont l'étude se ramène à celle d'une EDL[1]. En premier, on appelle **ED de Bernoulli**, une équation donnée par

$$y' = f(x)\, y^{\alpha} + g(x)\, y \tag{6.9}$$

où f et g sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Une manière de résoudre ce genre d'équations est d'opérer le changement de variables

$$z = y^{1-\alpha} \tag{6.10}$$

Ce qui transforme l'équation (6.9) en une EDL[1] pour la fonction inconnue $z(x)$;

$$z' = (1-\alpha) g(x)\, z + (1-\alpha)\, f(x) \tag{6.11}$$

<u>Exemple</u> **6.8** Soit l'ED de Bernoulli

$$y' = x^4 y^{1/3} + \frac{3}{x} y$$

En posant $z = y^{1-1/3}$, nous avons

$$y = z^{3/2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{3}{2} z^{1/2}\, z'$$

Ainsi, nous obtenons l'ED

$$\frac{3}{2} z^{1/2}\, z' - \frac{3}{x} z^{3/2} = x^4\, z^{1/2},$$

soit

$$z' - \frac{2}{x} z = \frac{2}{3} x^4$$

Par application de la méthode vue précédemment, la solution de cette EDL[1] est alors

$$z = c\, x^2 + \frac{2}{9} x^5$$

En faisant la substitution inverse, il vient que la solution à l'équation de notre exemple est donnée par

$$y = (c\, x^2 + \frac{2}{9} x^5)^{3/2}$$

○

Par ailleurs, nous avons l'ED dite **de Riccati** qui est définie par

$$y' = f(x)\, y^2 + g(x)\, y + h(x) \tag{6.12}$$

où f, g et h sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si y_p est une solution particulière de l'équation du type (6.12), on pose $y = y_p + u$. Il vient alors que

$$u' = f(x) u^2 + (2 f(x) y_p + g(x)) u$$

Ce qui est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$.

<u>Exemple</u> **6.9** Soit l'ED de Riccati suivante :

$$y' = \frac{y^2}{x} - \left(2 + \frac{1}{x}\right) y + x + 2$$

Sachant que $y_p = x$ est une solution (particulière) à cette équation, posons $y = y_p + u$. Nous obtenons que

$$u' = \frac{u^2}{x} - \frac{u}{x}$$

Ensuite, soit v telle que $u = v^{1-2} = 1/v$. Donc la fonction v vérifie l'EDL[1] suivante

$$v' = \frac{v}{x} - \frac{1}{x}$$

La solution est alors

$$v = -x \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x = 1 + cx$$

Ce qui donne par substitution

$$y = x + \frac{1}{1+cx}, \qquad c \in R$$

○

6.3 EDL du second ordre

Dans cette section, il s'agit d'ED du second ordre standard, i.e.

$$y'' = f(x, y, y')$$

Nous nous intéresserons aux cas des ED linaires, à savoir

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$$

EDL^2 homogènes

Commençons par le cas des équations dites homogènes. Nous appelons une **EDL du second ordre homogène** (en abrégé EDL^{2}H), toute équation donnée sous la forme

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \qquad (\text{EDL}^2\text{H})$$

où f et g sont des fonctions (continues) données.

L'existence et l'unicité des solution des (EDL^{2}H) sont garanties par le théorème suivant qui est lui-même basé bien entendu sur le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 6.10 *Supposons que f et g soient des fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Soit $x_0 \in I$ et soit y_0, y_0' deux valeurs réelles arbitraires. Alors, le problème de valeur initiale*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0, \qquad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0' \tag{6.13}$$

possède une solution unique sur I.

Remarque 6.11 *Clairement, la fonction nulle $y = 0$ est une solution de* (EDL^{2}H)*, nous l'appelons* ***solution triviale****. Toute autre solution est non-triviale. Par conséquent, sous les conditions du Théorème 6.10, la solution au problème de valeur initiale*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0, \qquad y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0$$

est la fonction nulle $y = 0$.

Exemple **6.12** Considérons l'EDL^{2}H suivante :

$$y'' - y = 0 \tag{6.14}$$

Les fonctions constantes $f(x) = 0$ et $g(x) = -1$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Le Théorème 6.10 garantit alors l'existence d'une solution à tout problème de valeur initiale pour (6.14). Il est facile de vérifier que $y_1 = e^x$ et $y_2 = e^{-x}$ sont deux solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$. En même temps, si nous posons

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

où c_1, c_2 sont des constantes quelconques, nous pouvons voir que y est aussi une solution de l'équation. ○

Généralement, nous avons

Théorème 6.13 *Si y_1 et y_2 sont des solutions de l'* EDL^{2}H

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0,$$

sur un intervalle ouvert I, alors toute ***combinaison linéaire*** *des fonctions y_1 et y_2, i.e.*

$$c_1y_1 + c_2y_2$$

est une solution de l'équation sur I.

On dit que l'ensemble $\{y_1, y_2\}$ est un **ensemble fondamental** des solutions de (EDL²H) sur I si toute solution de cette équation s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de y_1 et y_2. Et on dit que des fonctions y_1 et y_2 sont **(linéairement) indépendants** ou que l'ensemble $\{y_1, y_2\}$ est linéairement indépendant si aucune des deux fonctions ne peut s'écrire comme une constante multipliée par l'autre fonction. Cela signifie en particulier qu'aucune des deux fonctions n'est triviale, sinon on aurait alors, $y_1 = 0y_2$ si $y_1 = 0$. Par exemple, les solutions de l'équation (6.14), à savoir e^x et e^{-x}, sont telles que $e^x/e^{-x} = e^{2x}$, une quantité non constante. Par conséquent, lesdites solutions sont linéairement indépendantes.

Théorème 6.14 *Soit f, g deux fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Supposons que y_1, y_2 soient sur I des solutions de l'équation*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \tag{6.15}$$

*Définissons la fonction dite **Wronskian** de $\{y_1, y_2\}$:*

$$W = y_1y_2' - y_2y_1' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \tag{6.16}$$

*Alors, pour tout $x_0 \in I$, pour tout $x \in I$, la fonction W est donnée par ladite **formule d'Abel** :*

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\phi(x)}, \tag{6.17}$$

où

$$\phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

Par conséquent, de deux choses l'une, ou bien W ne s'annule pas sur I ou bien $W = 0$ sur tout I. De plus, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) L'ensemble $\{y_1, y_2\}$ est un ensemble fondamental.
(ii) L'ensemble $\{y_1, y_2\}$ est linéairement indépendant.
(iii) W ne possède aucun zéro sur I, i.e. $W(x) \neq 0, \forall x \in I$.

Remarque 6.15 *Si y_1, y_2 sont des solutions de (6.15), et que l'on impose des conditions initiale $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$, la solution est alors donnée sous la forme linéaire $y = c_1y_1 + c_2y_2$ où*

$$c_1 = \frac{1}{W(x_0)} \begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \qquad c_2 = \frac{1}{W(x_0)} \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix} \tag{6.18}$$

En effet, la solution au problème de valeur initiale (6.13) doit vérifier le système d'équations suivant

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) &= y_0 \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) &= y_0' \end{aligned} \tag{6.19}$$

En multipliant la première équation dans ce système par $y_2'(x_0)$ et la seconde par $y_2(x_0)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} c_1y_1(x_0)y_2'(x_0) + c_2y_2(x_0)y_2'(x_0) &= y_0\,y_2'(x_0) \\ c_1y_1'(x_0)y_2(x_0) + c_2y_0'(x_0)y_2(x_0) &= y_0'\,y_2(x_0) \end{aligned}$$

Par soustraction, cela donne

$$W(x_0)c_1 = y_2'(x_0)y_0 - y_2(x_0)y_0' = \begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \tag{6.20}$$

Ce qui donne c_1 sous la formule donnée dans (6.18). Pareillement, nous obtenons la formule de c_2 en multipliant la première équation dans le système par $y_1'(x_0)$ et la seconde par $y_1(x_0)$.

<u>Exemple</u> **6.16** Considérons l'équation homogène

$$x^2y'' + xy' - 4y = 0 \tag{6.21}$$

Les fonctions x^2 et x sont continues sur tout $\mathbb{R}$. Cependant, la fonction x^2 est nulle à l'origine. D'après le Théorème 6.10, l'équation (6.21) avec des conditions initiales $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$, admet une solution unique sur chacun des intervalles $(-\infty, 0)$ et $(0, +\infty)$. On vérifie que la fonction $y_1 = x^2$ est une solution de l'équation (6.21) sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $y_2 = x^{-2}$ est une solution sur $\mathbb{R}^*$.

Posons $y = c_1y_1 + c_2y_2$ où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Si l'on impose les conditions initiales $y(1) = 2, y'(1) = 0$. Par substitution, il vient que

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ c_1 - c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, l'unique solution de l'équation (6.21) sur $(0, +\infty)$ est donnée par

$$z = x^2 + x^{-2}$$

Remarquons aussi que la quantité $x^2/x^{-2} = x^4$ est non constante. Ce qui montre que les deux solutions sont bien indépendantes. En même temps, son Wronskian est donnée par

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{vmatrix} = -2x^{2-3} - 2x^{1-2} = -\frac{4}{x}$$

Et par la formule d'Abel, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, nous avons bien la même valeur,

$$W = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} t^{-1}\,\mathrm{d}t} = -\frac{4}{x_0}e^{-\log(x/x_0)} = -\frac{4}{x}$$

○

EDL^2 complètes

On appelle une équation différentielle linéaire du second ordre (complète) (en abrégé EDL^2), toute ED donnée par

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x) \tag{EDL^2}$$

où f, g et h sont des fonctions (continues) données. On dnote l'EDL^{2}H **associée** est

$$z'' + f(x)z' + g(x)z = 0 \tag{6.22}$$

En premier, nous avons le théorème suivant basé sur le théorème de Cauchy-Lipschitz qui donne des conditions nécessaires et suffisantes de l'existence et de l'unicité des solutions du problème de valeur initiale pour les EDL^2.

Théorème 6.17 *Soit f, g et h des fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Soit $x_0 \in I$ et y_0, y_0' deux nombres réels quelconques. Alors, le problème de valeur initiale*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x), \qquad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \tag{6.23}$$

possède une solution unique sur I.

Pour connaître la solution générale au problème (6.23), il est nécessaire de trouver la solution générale à l'équation homogène associée. En effet, si l'on connait une telle solution générale que l'on connaisse une solution particulière à l'équation complète, alors nous pouvons trouver la solution générale à l'équation complète (EDL^2). Explicitement, nous avons

Théorème 6.18 *Soit f, g et h des fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Soit y_p une solution particulière sur I de l'équation*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x) \tag{6.24}$$

Supposons que $\{z_1, z_2\}$ soit un ensemble fondamentale de solutions sur I de l'équation homogène associée

$$z'' + f(x)z' + g(x)z = 0$$

Alors y est une solution de (6.24) sur I ssi y s'écrit sous la forme

$$y = y_p + c_1z_1 + c_2z_2, \tag{6.25}$$

où c_1, c_2 sont des constantes réelles arbitraires.

Remarque 6.19 *Si la fonction h dans (6.24) s'écrit comme une somme de deux fonctions, $h = h_1 + h_2$, nous pouvons chercher par le* ***principe de superposition*** *une solution particulière de la forme $y_p = y_1 + y_2$ où les y_i sont respectivement les solutions particulières aux équations*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h_i(x), \qquad i = 1, 2.$$

En effet, on vérifie facilement que $y_p = y_1 + y_2$ est une solution de (6.24).

Pour résoudre les (EDL^2), nous pouvons utiliser la ***méthode d'intégration*** *qui consiste à trouver une solution (générale) de cette équation sous la forme $y = uz$ si l'on connaît une solution z de l'équation homogène associée. u est alors une solution de l'équation dite incomplète*

$$u''z + u'(2z' + z) = h(x)$$

Exemples **6.20** (1) Considérons l'ED suivante :

$$y'' + y = x$$

Par application du Théorèem 6.24, remarquons en premier que les fonctions $f(x) = 0, g(x) = 1$ et $h(x) = 1$ sont continues sur tout $\mathbb{R}$. D'un autre côté, nous pouvons voir que la fonction x est une solution particulière de cette équation. En outre, il est facile de vérifier que les deux fonctions $z_1 = \sin x$ et $z_2 = \cos x$ forment un ensemble fondamental de solutions de l'équation homogène associée i.e. $z'' + z = 0$. Ainsi, la solution générale de la première équation est donnée sous la forme

$$y = x + c_1z_1 + c_2z_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(2) Soit l'ED suivante :

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{4}{x^2} y = 2x^2$$

On vérifie que les fonctions $z_1 = x^2$ et $z_2 = 1/x^2$ sont des solutions indépendantes de l'équation homogène associé sur $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ($z_1/z_2 = x^4$ non constante). Pour trouver une solution particulière de l'équation complète, notons que si l'on choisit de l'écrire sous la forme $y_p = ax^4$ où a est une constante, on obtient une égalité entre deux polynômes du second degré. D'où, nous pouvons connaître éventuellement la valeur possible de a. Dans notre cas, nous avons

$$12ax^2 = 2x^2$$

Donc $a = 1/6$. Ainsi la solution générale à notre équation sur $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ est

$$y = \frac{x^4}{6} + c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^2}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(3) Soit maintenant l'équation à intégrer

$$y'' + y = x + e^x$$

En vertu de la Remarque 6.19, nous pouvons résoudre séparément les équations

$$\begin{aligned} y'' + y &= x \\ y'' + y &= e^x \end{aligned} \tag{6.26}$$

Or, par (1), nous connaissons déjà les solutions de l'équation $y'' + y = x$. Grâce aux méthodes que nous allons voir plus bas dans la Section 6.3, nous montrons que les solution à l'équation homogène associée à (6.26) sont $\sin x$ et $\cos x$ qui sont clairement indépendantes. Et une solution particulière à l'équation complète est $e^x/2$. Ainsi, la solution générale au problème est donné par

$$y = \frac{e^x}{2} + x + c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

○

EDL^2 à coefficients constants

Nous considérons ici un cas particulier des équations (EDL^2) où les fonctions f, g sont des constantes réelles. On parle alors d'**EDL^2 à coefficients constants** qui s'écrivent sous la forme

$$y'' + ay' + by = h(x), \qquad a, b \in \mathbb{R} \tag{6.27}$$

Considérons l'équation homogène associée i.e.

$$z'' + az' + bz = 0 \tag{6.28}$$

Dans ce cas, il est clair que la solution générale sera vraie sur tout $\mathbb{R}$. Pour trouver la solution à cette équation, nous sommes tentés de prendre la fonction $z = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, nous avons $z' = re^{rx}$ et $z'' = r^2 e^{rx}$. Alors, il résulte que

$$z'' + az' + bz = (r^2 + ar + b)\, e^{rx}$$

Le polynôme en r à droite de cette équation est appelé **polynôme caractéristique**, et on appelle **équation caractéristique** associée, l'équation

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{6.29}$$

Les solutions de l'équation homogène associée sont clairement données en fonctions des racines de l'équation caractéristique. Le théorème suivant résume les solutions possibles à l'équation homogène (6.28). Notons ici que dans le cas d'une solution double pour l'équation caractéristique, on obtient une seule solution de (6.28) de la forme e^{rx}. Pour trouver une deuxième solution indépendante, nous chercherons une solution sous la forme $z_2 = ue^{r_0 x}$ où u est une fonction à déterminer (voir le développement que nous donnons après le théorème).

Théorème 6.21 *Soit une* EDL^{2}H

$$z'' + az' + bz = 0 \tag{6.30}$$

Alors, on a que

(*i*) *si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes* r_1 *et* r_2*, la solution générale est donnée par*

$$z = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \qquad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

(*ii*) *si l'équation caractéristique admet une racine réelle double* r_0*, la solution recherchée est*

$$z = (c_1 + c_2 x) e^{r_0 x}, \qquad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

(*iii*) *si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées* $r_1 = p + iq$ *et* $r_2 = p - iq$ *avec* $p, q \in \mathbb{R}$*, la solution générale est sous la forme*

$$z = e^{px}\big(c_1 \sin(qx) + c_2 \cos(qx)\big), \qquad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

<u>Exemples</u> **6.22** (1) Considérons l'ED

$$z'' + 6z' + 5z = 0$$

L'équation caractéristique de cette équation est

$$r^2 + 6r + 5 = 0$$

Ses racines sont $r_1 = -5$ et $r_1 = -1$. Les solutions à notre équation sont donc $z_1 = e^{-5x}$ et $z_2 = e^{-x}$. Notez que $z_1/z_2 = e^{-4x}$ est non constante, ce qui traduit leur indépendance. La solution générale est alors

$$z = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{-x}$$

(2) Soit

$$z'' + 6z + 9z = 0$$

L'équation caractéristique associée admet une racine double $r_0 = -3$. Nous chercherons la deuxième solution sous la forme $z_2 = ue^{-3x}$ où u est une fonction à déterminer (cette méthode pour déterminer une deuxième solution indépendante sera discutée plus bas). Supposons que $z_2 = ue^{-3x}$ est une solution de la première équation. Par substitution, nous obtenons

$$z'' + 6z + 9z = u''\, e^{-3x}$$

Ainsi, z_2 est une solution ssi $u'' = 0$, ce qui est équivalent à ce que u soit de la forme $u = \alpha + \beta x$ avec α, β des constantes arbitraires. La solution générale est alors

$$e^{-3x}(\alpha + \beta x), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(3) Soit l'équation à résoudre

$$z'' + 4z + 13z = 0$$

On vérifie que $r_1 = -2 + 3i$ et $r_2 = -2 - 3i$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique associée. La solution à l'ED est donnée par

$$z = e^{-2x}\,(c_1 \sin(3x) + c_2 \cos(3x)), \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

○

Dans le cas particulier des équations diff. à coefficients constants avec une fonction h donnée par

$$h(x) = e^{\alpha x}\, P_n(x),$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$ et P_n est un polynôme de degré n, nous cherchons de manière générale la solution particulière y_p sous les formes suivantes :

1. si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique,

$$y_p = e^{\alpha x}\, Q_n(x)$$

2. Si α est une racine simple de l'équation caractéristique,

$$y_p = x e^{\alpha x}\, Q_n(x)$$

3. Si α est une racine double de l'équation caractéristique,

$$y_p = x^2 e^{\alpha x}\, Q_n(x)$$

où Q_n est représente un polynôme de degré n.

Remarquons que si la fonction h est donnée sous la forme

$$h(x) = P_n(x)\sin(\alpha x) \qquad \text{ou} \qquad h(x) = P_n(x)\cos(\alpha x),$$

P_n étant un polynôme, on peut se ramener au cas ci-dessus en écrivant

$$\sin(\alpha x) = \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2}, \qquad \cos(\alpha x) = \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2}$$

Exemples **6.23** (1) Considérons l'ED

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + 3x - 1).$$

Les racines de l'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ sont 1 et 2. D'où, la solution générale de l'équation homogène associée est

$$z = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

Comme 3 n'est pas une racine de l'équation caractéristique, nous pouvons chercher une solution particulière sous la forme

$$y = u e^{3x}, \qquad u = ax^2 + bx + c \tag{6.31}$$

Par dérivation et substitution, u doit vérifier

$$u'' + 3u' + 2u = x^2 + 2x - 1.$$

Par comparaison, nous obtenons le système suivant

$$\begin{aligned} &2a = 1 \\ &2b + 6a = 2 \\ &2c + 3b + 2a = -1 \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{4}.$$

ainsi,

$$y_p = (2x^2 - 2x - 1)\,\frac{e^{3x}}{4}$$

La solution générale à l'équation complète est alors

$$y = (2x^2 - 2x - 1)\,\frac{e^{3x}}{4} + c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

(2) Soit à résoudre l'ED

$$y'' - 4y' + 3y = (12x^2 + 8x + 6)\,e^{3x}$$

L'équation caractéristique possède les racines 1 et 3. Par conséquent, la solution générale à l'équation homogène associée est

$$z = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$$

Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p = x(ax^2 + bx + c)e^{3x}$. Nous avons

$$\begin{aligned} y_p' &= e^{3x}\,\big(3ax^3 + 3(b+a)x^2 + (3c+2b)x + c\big) \\ y_p'' &= e^{3x}\,\big(9ax^3 + 9(b+2a)x^2 + 3(3c+4b+2a)x + 6c + 2b\big) \end{aligned}$$

Par substitution dans l'équation première, il vient que

$$6ax^2 + 2(3a+2b)x + 2(b+c) = 12x^2 + 8x + 6$$

Remarquons ici que l'on ne voit pas le terme x^3 dans la dernière équation et ce car 3 est une solution simple à l'équation caractéristique. Ainsi, par comparaison, il résulte que

$$a = 2, b = -1, c = 4$$

D'où,

$$y_p = xe^{3x}\left(2x^2 - x + 4\right)$$

donc,

$$y = x(2x^2 - x + 4)e^{3x} + c_1e^x + c_2e^{3x} = c_1e^x + (2x^3 - x^2 + 4x + c_2)e^{3x}$$

(3) Considérons l'ED

$$y'' + y = \cos x$$

L'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ admet deux racines imaginaires $r = \pm i$. D'où, la solution générale à l'équation homogène associée est donnée par

$$z = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

Maintenant, rappelons que

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Nous pouvons alors résoudre notre équation en considérant séparément les équations

$$y'' + y = \frac{e^{ix}}{2}$$
$$y'' + y = \frac{e^{-ix}}{2}$$

Comme les valeurs $\pm i$ sont des racines de l'équation caractéristique, nous chercherons alors des solutions particulières à ces dernières sous la forme axe^{ix} et bxe^{-ix}, respectivement. Cependant, nous pouvons clairement, en considérant la somme, chercher une solution particulière à l'équation en question sous la forme $ax\cos x + bx\sin x$. Par dérivation et substitution, il vient que $a = 0$ et $b = 1/2$. Donc

$$y_p = \frac{x}{2}\sin x$$

Ainsi, la solution générale est

$$y = \frac{x}{2}\sin x + c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

○

Références

[1] K. Allab. (1984). *Éléments d'Analyse*, office des publications universitaires.

[2] J. M. J. Ablowitz, A. S. Fokas. (2003). *Complexe variable, Introduction and Applications, second edition*, Combridge University Press.

[3] J. M. Arnaudies, H. Fraysse. (1988). *Cours de mathématiques-2*, edition Dunod.

[4] Sylvie Benzoni-Gavage. (2010). *Calcul différentiel et équations différentielles*, edition Dunod.

[5] O. Boukhadra. (2020). *Introduction à l'Analyse*. La première version, intitulé *Analyse* a été publiée par l'Univ. Constantine 1.

[6] O. Boukhadra. (2020-21). *Algèbre*. Telum : https://telum.umc.edu.dz/course/.

[7] M. Queysanne. (1984). *Algèbre*, office des publications universitaires.

[8] M. R. Spiegel. (1973). *Theorie et applications de l'analyse*, Série SCHAUM.

[9] William F. Trench. (2013), Elementary differential equations with boundary value problems. Free Edition 1.