ANALYSE II

Omar Boukhadra

Dép. Mathématiques
Faculté des Sciences Exactes
Université de Constantine 1
boukhadra@umc.edu.dz

23 décembre 2022

Les présentes notes de cours dérivées de [5] *et à l'intention des étudiants de* L2-SM *constituent une introduction à la théorie des équations différentielles et aux séries de fonctions. Comme la résolution d'une équation différentielle est essentiellement une opération d'intégration, nous commencerons avec la notion d'intégrations ordinaire et généralisée. Cette dernière intégration dite généralisée conduit à définir une transformation de fonctions dite de Laplace, laquelle permet de résoudre des équations différentielles, notamment les équations linéaires. Les séries de fonctions donnent aussi des solutions aux équations différentielles.*

Contenu

1 Intégration

1.1 Définition

Soit f une fonction définie et bornée sur un intervalle $[a, b]$. Soit $\sigma(n) = (x_i)_{i=0}^n$ et $\xi(n) = (\xi_i)_{i=1}^n$ deux séquences telles que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b; \qquad \xi_i \in (x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

La séquence $\sigma(n)$ est appelée **subdivision** de l'intervalle $[a, b]$ et $\xi(n)$ une suite subordonnée. Posons

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}; \qquad \delta_n = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i$$

On appelle **somme de Riemann** relative à la subdivision $\sigma(n)$ et au système de points $\xi(n)$, la quantité

$$S_n(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{1.2}$$

Géométriquement, cette somme représente l'aire de tous les rectangles de bases $[x_{i-1}, x_i]$ et de hauteurs respectives ξ_i pour $i = 1, \ldots, n$.

Augmentons le nombre n de points de la subdivision de sorte que $\delta_n \to 0$. Si la somme (1.2) admet une limite finie $I(f)$ qui est indépendante du choix de la subdivision $\sigma(n)$ et du système $\xi(n)$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (\sigma(n), \xi(n)) : \quad \delta_n < \delta \Longrightarrow |S_n(f, \sigma, \xi) - I(f)| < \varepsilon \tag{1.3}$$

on l'appelle alors **intégrable de Riemann** de f entre a et b que nous notons par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.4}$$

On dit aussi que f est *intégrable* au sens de Riemann ou *Riemann-intégrable* ou tout simplement intégrable. La lettre x dans la notation de l'intégrale est dite **variable muette** et ne joue aucun rôle. On peut utiliser à la place n'importe quelle autre lettre y, t, u, etc. Les valeurs a et b sont dites les **bornes de l'intégrale**, a étant la borne *inférieure* et b la borne *supérieure*.

On convient que

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{1.5}$$

et si $a = b$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.6}$$

En même temps, notons que si $f = 1$ sur $[a, b]$, alors il vient que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a$$

<u>Exemple</u> **1.1** (**Fonction constante**) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction constante :$f(x) = c$. Alors, f est intégrable car pour toute subdivision $\sigma = (x_i)_{i=0}^n$ de $[a, b]$, nous avons

$$D(f, \sigma) - d(f, \sigma) = 0$$

D'où, il vient que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = D(f, \sigma) = d(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n c\,\Delta x_i = c\,(b - a)$$

En particulier, quand $f(x) = 1$, on écrit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b 1\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a$$

et si $f(x) = 0$, on a

$$\int_a^b 0\,\mathrm{d}x = 0$$

○

<u>Exemple</u> **1.2** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \delta_c(x)$ où $c \in [a, b]$, i.e. $f(x) = 0$ sauf sur c où $f(c) = 1$. Montrons que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Supposons sans perdre de généralité que $c \in (a, b)$ et soit $\varepsilon > 0$. Considérons la subdivision $\sigma = \{a, c - \delta, c + \delta, b\}$ où $\delta > 0$ est tel que $\delta < \min\{\varepsilon/2, c - a, b - c\}$ Alors, nous avons que

$$D(f, \sigma) = \sup_{x \in [c-\delta, c+\delta]} f(x)\, 2\delta = 2\delta < \varepsilon$$

et que

$$d(f, \sigma) = \inf_{x \in [c-\delta, c+\delta]} f(x)\, 2\delta = 0 > -\varepsilon$$

D'où, nous obtenons que

$$D(f, \sigma) - d(f, \sigma) < 2\varepsilon$$

○

1.2 Propriétés fondamentales

Nous avons là quelques propriétés fondamentales du calcul d'intégrale. Pour des raisons de facilité de notations, nous écrivons $\int_a^b f \, \mathrm{d}x$.

En premier, comme pour la dérivation, l'intégration est aussi *linéaire* :

Théorème 1.3 *Soit f et g deux fonction intégrables sur $[a, b]$. Alors, nous avons*

(*i*)

$$\int_a^b (f + g) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f \, \mathrm{d}x + \int_a^b g \, \mathrm{d}x \tag{1.7}$$

(*ii*) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,*

$$\int_a^b \lambda f \, \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f \, \mathrm{d}x \tag{1.8}$$

(*iii*) *Pour tout $c \in (a, b)$,*

$$\int_a^b f \mathrm{d}x = \int_a^c f \mathrm{d}x + \int_c^b f \, \mathrm{d}x \tag{1.9}$$

Quant au produit de deux fonctions intégrables, l'intégrabilité n'est pas perdue. Explicitement :

Théorème 1.4 *Soit f, g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Alors, le produit fg est aussi une fonction intégrable sur $[a, b]$.*

En plus des propriétés essentielles que nous venons de voir, il y a des inégalités importantes. Commençons par les plus basiques.

Théorème 1.5 *Soit f et g deux fonction intégrables sur $[a, b]$. Alors, on a que*

(*i*) *si $f(x) \in [m, M]$ pour tout $x \in [a, b]$,*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \, \mathrm{d}x \leq M(b-a) \tag{1.10}$$

(*ii*) *Si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$,*

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b g \, \mathrm{d}x \tag{1.11}$$

(*iii*)

$$\left| \int_a^b f \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f| \, \mathrm{d}x \tag{1.12}$$

En outre, nous donnons séparément les deux incontournables inégalités suivantes qui sont en fait des extensions d'inégalités pour les séquences de nombres réels.

Théorème 1.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit f, g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Alors, on a*

$$\int_a^b |fg| \, \mathrm{d}x \leq \sqrt{\int_a^b f^2 \, \mathrm{d}x} \sqrt{\int_a^b g^2 \, \mathrm{d}x} \tag{1.13}$$

Remarque 1.7 *L'inégalité de Cauchy-Schwarz se généralise de la manière suivante (cf. [1]). Si $p, q > 1$ sont deux réels tels que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

*alors on a l'**inégalité de Hölder** :*

$$\int_a^b |fg| \, \mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b f^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \left(\int_a^b g^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/q} \tag{1.14}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne la célèbre inégalité suivante.

Théorème 1.8 (Inégalité de Minkowski intégrale) *Soit f, g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Alors, on a*

$$\sqrt{\int_a^b (|f| + |g|)^2 \, \mathrm{d}x} \leq \sqrt{\int_a^b f^2 \, \mathrm{d}x} + \sqrt{\int_a^b g^2 \, \mathrm{d}x} \tag{1.15}$$

Remarque 1.9 *On généralise l'inégalité de Minkowski intégrale de la manière suivante. Pour tout* $p \geq 1$*,*

$$\left(\int_a^b (|f| + |g|)^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \tag{1.16}$$

La preuve de cette généralisation se base sur le même argument pour le cas $p = 2$ *en utilisant l'inégalité de Hölder.*

1.3 Critères d'intégrabilité

Avant de pouvoir donner des exemples d'intégration, nous allons voir d'abord quelques conditions suffisantes pour l'existence de l'intégrale de Riemann, notamment la monotonie et la continuité.

Théorème 1.10 *Si* f *est une fonction bornée et monotone sur* $[a, b]$*, alors elle est intégrable sur cet intervalle.*

Cependant, le critère d'intégrabilité le plus utilisé est le suivant.

Théorème 1.11 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors,* f *est intégrable.*

<u>Exemple</u> **1.12** Considérons la fonction $f(x) = x$. C'est là une fonction clairement continue sur tout $\mathbb{R}$, et qui plus est, croissante. Calculons alors $\int_0^1 x\, \mathrm{d}x$. Pour ce faire, il suffit par le Théorème 1.11 de choisir une bonne subdivision de $[0, 1]$ et un séquence subordonnée appropriée. Par exemple, nous avons

$$\Delta x_i = \frac{1}{n}, \quad \xi_i = \frac{i}{n}$$

Alors, il vient que

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\, \mathrm{d}x &= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \\ &= \lim \frac{\sum_{i=1}^n i}{n^2} \\ &= \lim \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la célèbre somme des n premiers entiers naturels. ○

Le Théorème 1.11 se généralise de la manière suivante.

Théorème 1.13 *Soit f une fonction bornée et continue sur l'intervalle $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points. Alors, f est intégrable sur $[a, b]$.*

Théorème 1.14 *Soit f une fonction bornée et continue sur l'intervalle $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points $a_1, \ldots, a_n$. Alors, f est intégrable sur $[a, b]$ et son intégrale est donnée par*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)$$

où $a_0 = a$, $a_{n+1} = b$.

<u>Exemple</u> **1.15** Considérons sur $[0, 2]$ la fonction

$$f(x) = x\,\mathbb{1}_{[0,1)}(x) + (3 - x)\,\mathbb{1}_{[1,2]}(x)$$

Nous avons là une fonction continue *par morceaux* et bornée. Il est clair que 1 est un point de discontinuité de f. Cependant, f est intégrable selon le Théorème 1.14. Calculons alors son intégrale. Nous avons déjà (cf. Exemple 1.12) que

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

Il reste donc à calculer

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 3 - x\,\mathrm{d}x$$

Soit la subdivision et la suite subordonnée

$$\Delta x_i = \frac{1}{n}, \quad \xi_i = 1 + \frac{i}{n}$$

D'où, il vient en reprenant les même calculs de l'exemple précédent que

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(2 - \frac{i}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n i \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Ainsi, nous obtenons que

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

○

1.4 Primitive et théorème fondamental

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Définissons

$$\phi(x) = \int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u$$

Remarquons en premier le fait important suivant.

Théorème 1.16 *Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et posons*

$$\phi : x \mapsto \int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u \tag{1.17}$$

Alors, la fonction ϕ est continue sur $[a, b]$.

On peut se demander alors si ϕ est dérivable. La réponse est généralement négative. En effet, considérons la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2]; \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est alors facile d'obtenir à l'aide des sommes de Riemann et du Theoreme 1.3,

$$\phi(x) = \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1/2]; \\ 1 - x & \text{sinon} \end{cases}$$

Clairement, ϕ n'est pas dérivable au point $1/2$.

Le théorème suivant donne une condition suffisante de la dérivabilité de ϕ.

Théorème 1.17 *Supposons que f soit une fonction continue sur $[a, b]$. Alors, la fonction ϕ est dérivable sur $[a, b]$ et on a*

$$\forall x \in [a, b] : \quad \phi'(x) = f(x) \tag{1.18}$$

Utilisons la propriété (1.18) de ϕ pour établir une nouvelle notion : on appelle **primitive** de f toute fonction F dérivable sur $[a, b]$ et telle que

$$\forall x \in [a, b] : \quad F'(x) = f(x) \tag{1.19}$$

La relation qui lie les primitives d'une fonction donnée est la suivante.

Théorème 1.18 *Soit F_1, F_2 deux primitives d'une fonction f. Alors, la différence entre F_1 et F_2 est une constante, i.e. il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que*

$$F_1 - F_2 = c$$

Nous arrivons au **théorème fondamental du calcul intégral**, à savoir :

Théorème 1.19 *Soit F une primitive d'une fonction f continue sur $[a, b]$. Alors, on a*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{1.20}$$

Remarque 1.20 *On utilise souvent la notation*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

Notons qu'en vertu du Théorème 1.18, on a sous les conditions du Théorème 1.19 que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \phi(b)$$

À noter aussi que si F est une primitive d'une fonction f, alors f n'est pas forcément continue comme le montre l'exemple suivant. Considérons la fonction

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \textit{si } x \neq 0; \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction est dérivable sur tout $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cos(1/x) - \sin(1/x) & \textit{si } x \neq 0; \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

La dérivée f n'est clairement pas continue en 0.

La formule fondamentale du calcul intégrale (1.20) permet de calculer directement une intégrale quand on connaît une primitive de la fonction à intégrer. Nous donnons ci-après un exemple simple mais nous consacrerons plus bas une section pour rappeler et connaître les dérivées et primitives des fonctions usuelles.

<u>Exemple</u> **1.21** Soit à intégrer la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[1, 2]$. Comme nous savons que $x^3/3$ est une primitive de cette fonction, alors

$$\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = [x^3/3]_1^2 = (2^3 - 1^3)/3 = \frac{7}{3}$$

○

<u>Exemple</u> **1.22** (La moyenne d'une fonction) Nous avons Sachant que la dérivée de cos est $-\sin$, alors, grâce au théorème fondamental du calcul intégral, il vient que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^\pi = 0$$

En même temps, si l'on prend une subdivision de $[0, \pi]$ en intervalles de longueur $1/n$ et une suite subordonnée $(i\pi/n)$, il résulte que

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin\frac{i\pi}{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x = 0$$

○

On convient d'appeler l'**intégrale indéfinie** de f, une représentation quelconque de sa primitive, ce que l'on note par

$$\int f \,\mathrm{d}x$$

Si F est une primitive de la fonction f, nous écrivons vu le Théorème 1.18,

$$\int f \,\mathrm{d}x = F(x) + c, \tag{1.21}$$

où c est une constante réelle quelconque. Par exemple,

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c$$

La priorité principale de l'intégrale indéfinie est la linéarité :

Théorème 1.23 *Soit f, g deux fonctions admettant des primitives. Alors, on a*

(i)

$$\int (f+g)\,\mathrm{d}x = \int f \,\mathrm{d}x + \int g \,\mathrm{d}x.$$

(ii)

$$\int \lambda f \,\mathrm{d}x = \lambda \int f \,\mathrm{d}x, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

1.5 Méthodes d'intégration

Pour calculer des intégrales, il existe des méthodes connues dont nous allons en connaître ici deux des plus utilisées. En premier, nous avons

Théorème 1.24 (intégration par parties) *Soit f, g deux fonctions dérivables et admettant des dérivées continues sur $[a, b]$. Alors, on a*

$$\int_a^b fg' \,\mathrm{d}x = [fg]_a^b - \int_a^b f'g \,\mathrm{d}x \tag{1.22}$$

Remarque 1.25 *À supposer que les fonctions f, g soient dérivables et admettent des dérivées continues sur un domaine donné, nous pouvons écrire*

$$\int fg' \,\mathrm{d}x = fg - \int f'g \,\mathrm{d}x \tag{1.23}$$

<u>Exemples</u> **1.26** (1) Soit à calculer la primitive $\int xe^x \,\mathrm{d}x$ En vertu de la formule (1.23), nous obtenons

$$\int xe^x \,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x \,\mathrm{d}x = e^x(x-1) + c$$

(2) Calculons $\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$. En appliquant une fois la formule de l'intégration par parties, nous obtenons,

$$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = e^x \sin x - \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x,$$

et d'un autre côté, par la même formule, il vient que

$$\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = e^x \cos x + \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$$

Ainsi, il en résulte que

$$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + c$$

(3) L'intégration par parties donne aussi

$$\int x \sin x \,\mathrm{d}x = -x \cos x + \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x - x \cos x + c$$

○

Une conséquence importante de l'intégration par parties permet d'écrire le reste de la formule de Taylor sous forme intégrale qui se prête parfois mieux à majoration que le reste de Lagrange.

Théorème 1.27 (Formule de Taylor avec reste intégrale) *Soit une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. Alors*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.24}$$

La deuxième méthode importante que nous allons voir utilise un changement de la variable d'intégration, autrement dit, on change d'intervalle d'intégration.

Théorème 1.28 (changement de variable) *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et $\psi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une fonction continument dérivable sur $[\alpha,\beta]$ et telle que $\psi(\alpha) = a, \psi(\beta) = b$. Alors, la fonction $t \mapsto f(\psi(t))\psi'(t)$ est intégrable sur $[\alpha,\beta]$ et on a*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.25}$$

Remarque 1.29 *La formule de changement de variable (1.25) écrite sous la forme de primitive donne*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\psi(t))\psi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.26}$$

<u>Exemples</u> **1.30** (1) Calculons

$$\int_2^3 \frac{1}{x(\log x)^3}\,\mathrm{d}x$$

Posons $x = e^t$. Alors, il vient que

$$\int_2^3 \frac{2}{x(\log x)^3}\,\mathrm{d}x = \int_{\log 2}^{\log 3} \frac{2}{t^3}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^{-2}\Big]_{\log 2}^{\log 3} = \frac{1}{(\log 2)^2} - \frac{1}{(\log 3)^2}$$

(2) Calculons $\int x\sin(x^2+1)\,\mathrm{d}x$. Posons $t = x^2+1$. Nous obtenons alors que

$$\int x\sin(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin t\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\cos t + c = -\frac{1}{2}\cos(x^2+1) + c$$

○

1.6 Primitives de fonctions usuelles

Nous terminons avec cette section qui donne des primitives à quelques fonctions des plus utilisées.

Fonction rationnelle

Nous allons voir dans cette ici les primitives des **fonctions rationnelles**, à savoir les fonctions qui s'écrivent sous la forme P/Q où P et Q sont des polynômes. Les primitives de ces derniers se calculent facilement en utilisant la forme générale d'un monôme :

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \tag{1.27}$$

Notons par $\deg P$ la plus grande puissance d'un polynôme P, on lit alors **degré du polynôme** P.

Le résultat suivant montre que le calcul des primitives de fonctions rationnelles revient à un calcul automatique de primitives de fractions simples.

Théorème 1.31 *Soit P, Q deux polynômes tels que $\deg P < \deg Q$. Soit a le coefficient du monôme $x^{\deg Q}$ dans le polynôme Q. Alors, on a que*

(i) il existe des entiers naturelles $n_1, \ldots, n_\ell$ et $m_1, \ldots, m_k$ tels que

$$n_1 + \ldots + n_\ell + m_1 + \ldots + m_k = \deg Q,$$

et il existe des racines réelles $x_1, \ldots, x_\ell$ et des valeurs réelles $p_i, q_i, i = 1, \ldots, k$ telles que

$$Q(x) = a \prod_{i=1}^{\ell} (x - x_i)^{n_i} \prod_{i=1}^{k} (x^2 + p_i x + q_i)^{m_i}, \tag{1.28}$$

avec

$$p_i^2 - 4q_i < 0, \qquad \forall i = 1, \ldots, k,$$

(ii) la fraction P/Q s'écrit sous la forme

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{n_\ell} \frac{a_{ij}}{(x - x_i)^j} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{b_{ij} x + c_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j} \tag{1.29}$$

où les a_{ij}, b_{ij} et c_{ij} sont des réels.

Remarque 1.32 *Il est connu en Algèbre (cf.[7]) que la division euclidienne (suivant les puissances décroissantes) d'un polynôme P par un autre polynômes $Q \neq 0$ donne*

$$P = SQ + R, \tag{1.30}$$

où S est un polynôme dit ***quotient*** *et R est un autre polynôme dit* ***reste de la division****, lesquels satisfont $\deg R < \deg Q$. Le calcul de la primitive d'une fraction P/Q revient donc à trouver la primitive d'un polynôme, ce qui est immédiat, et les primitives des fractions simples que l'on voit dans la somme (1.29), ce qui est présenté ci-après.*

Intéressons-nous maintenant à calculer les primitives des fractions simples apparaissant dans (1.29). Considérons une fraction P/Q telle que $\deg P < \deg Q$. Pour la première forme des fractions simples, nous avons clairement

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x - x_i} = \log|x - x_i| + c \tag{1.31}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x - x_i)^j} = \frac{-1}{(j-1)\,(x - x_i)^{j-1}} + c, \qquad j > 1. \tag{1.32}$$

Quant à la seconde forme des fractions simples, posons de manière générale,

$$\frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^j}, \tag{1.33}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$ et p, q sont tels que $p^2 - 4q < 0$. Nous pouvons alors écrire

$$x^2 + px + q = (x - p/2)^2 + q - p^2/4 = (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

Notons que $\alpha \pm i\beta$ sont les racines complexes du dernier polynôme. En effectuant le changement de variable $x = \alpha + \beta t$, nous obtenons que

$$\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^j}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{\beta^{2(j-1)}} \int \frac{t}{(t^2 + 1)^j}\,\mathrm{d}t + \frac{a\alpha + b}{\beta^2} \int \frac{1}{(t^2 + 1)^j}\,\mathrm{d}t$$

Par conséquent, le calcul de la primitive de la fraction (1.33) se ramène à trouver les primitives suivantes :

$$I_j = \int \frac{t}{(t^2 + 1)^j}\,\mathrm{d}t, \qquad J_j = \int \frac{1}{(t^2 + 1)^j}\,\mathrm{d}t$$

Pour la première primitive I_j, choisissons le changement de variable $u = t^2 + 1$. Nous obtenons alors

$$I_j = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^j}\,\mathrm{d}u$$

D'où,

$$I_1 = \frac{1}{2}\log(t^2+1) + c, \tag{1.34}$$

et pour $j > 1$,

$$I_j = \frac{-1}{2(j-1)(t^2+1)^{j-1}} + c \tag{1.35}$$

Pour la seconde primitive J_j, une intégration par parties donne

$$J_j = \frac{t}{(t^2+1)^j} + 2j\int \frac{t^2}{(t^2+1)^{j+1}}\,\mathrm{d}t,$$

donc,

$$J_{j+1} = \frac{1}{2j}\,\frac{t}{(t^2+1)^j} + \frac{2j-1}{2j}J_j \tag{1.36}$$

Par récurrence, le calcul de la primitive se réduit à celui de

$$J_1 = \int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \arctan t + c \tag{1.37}$$

Et par substitution, on obtient les fonctions de x.

<u>Exemples</u> **1.33** (1) Considérons l'intégrale

$$\int \frac{x}{(x-8)(2x-8)}\,\mathrm{d}x$$

Par décomposition, il vient que

$$\frac{x}{(x-8)(2x-8)} = \frac{1}{x-8} - \frac{1}{2x-8}$$

D'où,

$$\int \frac{x}{(x-8)(2x-8)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-8} - \int \frac{\mathrm{d}x}{2x-8} = \log\left(\frac{|(x-3|}{\sqrt{|2x-8|}}\right) + c$$

(2) Calculons

$$\int \frac{3}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

La décomposition en fractions simples donne

$$\frac{3}{1+x^3} = \frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}$$

Et nous obtenons
$$x^2 - x + 1 = (x - 1/2)^2 + \frac{3}{4}$$
En posant $x = 1/2 + \sqrt{3}t/2$, il résulte
$$\int \frac{x-2}{x^2 - x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t - \sqrt{3}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\log(t^2+1) - \sqrt{3}\arctan t + c$$
Et donc
$$\int \frac{3}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \log\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} - \sqrt{3}\ \arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + c$$

○

Fonction rationnelle en sin **et** cos

Maintenant, considérons une fonction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$, c'est-à-dire à la place de x dans un fraction rationnelle, on trouve l'une ou l'autre fonction ou un produit de puissances des deux, ce que l'on note par $R(\sin x, \cos x)$. Intéressons-nous à calculer la primitive
$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x \tag{1.38}$$

La méthode générale consiste à utiliser le changement de variable $t = \tan(x/2)$. De ce fait et en vertu de Pythagore, nous avons
$$\sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$
Ce qui, par la formule de changement de variable (1.26), ramène l'intégration (1.38) au calcul de la primitive d'une fonction rationnelle en t. Ce changement de variable donne facilement en utilisant les propriétés élémentaires des fonctions cos et sin,
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{1+t^2} \tag{1.39}$$

<u>Exemples</u> **1.34** (1) Calculons la primitive
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$$
En utilisant (1.39), nous obtenons que
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \log|t| + c = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

(2) Soit à calculer
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}.$$
Avec le changement de variable $t = \tan(x/2)$ et la propriété
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \tag{1.40}$$
il vient que
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$
○

Il existe des cas particuliers où il serait plus facile d'utiliser d'autres changements de variable. Nous avons par exemple les trois cas suivants. Nous donnons en parallèle le changement de variable adéquat, R étant une fonction rationnelle.
$$\begin{aligned}
&\int R(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x, && t = \sin x;\\
&\int R(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x, && t = \cos x;\\
&\int \frac{R(\tan x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x, && t = \tan x
\end{aligned}$$

Exemples **1.35** (1) Calculons
$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$
Considérons le changement de variable $t = \cos x$ et notons que $\sin x = \sqrt{1-t^2}$. Rappelons que $\arccos' t = -1/\sqrt{1-t^2}$, on a
$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\log|t| + c = \log\frac{1}{|\cos x|} + c$$
(2) Considérons cette fois-ci
$$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

Posons $t = \sin x$ et notons que $\cos x = \sqrt{1-t^2}$. Rappelons que $\arcsin' t = 1/\sqrt{1-t^2}$. Il en résulte que

$$\int \cot x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \log|t| + c = \log|\sin x| + c$$

○

Si, par ailleurs, la fraction $R(\cos x, \sin x)$ se réduit à un polynôme trigonométrique $P(\cos x, \sin x)$, alors il est toujours possible de linéariser P en une combinaison linéaire de cos et sin et ce à l'aide de l'exponentiel polaire ($e^{ix} = \cos x + i \sin x$) et de la formule de Moivre ($(e^{ix})^n = e^{inx}$). En effet, on a

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$
$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

Ainsi, par substitution, on obtient ladite combinaison. Par exemple,

$$P(\cos x, \sin x) = \cos^2 x \sin^3 x$$

Alors, il vient que

$$P(x) = \frac{1}{2^2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^2 \frac{1}{2^3 i^3}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3$$

ce qui donne après simplification que

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{i}{2^5}\left((e^{i5x} - e^{-i5x}) - (e^{i3x} - e^{-i3x}) - 2(e^{ix} - e^{-ix})\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(-\sin(5x) + \sin(3x) + 2\sin x\right) \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\int P(\cos x, \sin x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\cos(5x) - \frac{1}{3}\cos(3x) - 2\cos x\right) + c$$

Fonction rationnelle en e^x

Considérons une fonction rationnelle en e^x, i.e.

$$R(e^x) = \frac{P(e^x)}{Q(e^x)}$$

où P et Q deux polynômes. Nous voulons calculer

$$\int R\left(e^x\right) \mathrm{d}x$$

Pour ce faire, observons qu'il suffit d'effectuer le changement de variables $e^x = t$. On obtient alors une fonction rationnelle en t et l'intégrale se traduit par

$$\int \frac{R(t)}{t} \mathrm{d}t$$

<u>Exemples</u> **1.36** (1)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x} &= \int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} \\
&= \log\left(\frac{t}{1+t}\right) + c \\
&= x + \log\left(\frac{1}{1+e^x}\right) + c
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x} &= \int \frac{2}{e^x - e^{-x}} \mathrm{d}x = \int \frac{2}{t^2-1} \mathrm{d}t \\
&= \log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = \log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + c \\
&= \log\left|\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c
\end{aligned}$$

○

Tableau récapitulatif de primitives

1. $\displaystyle\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log|x|$

3. $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x$

4. $\displaystyle\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\log|\cos x|$

5. $\displaystyle\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\log|\cos x|$

6. $\displaystyle\int \cot x \,\mathrm{d}x = \log|\sin x|$

7. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$

8. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$

9. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x$

10. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x$

11. $\displaystyle\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x$

12. $\displaystyle\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log a}$

13. $\displaystyle\int \sinh x \,\mathrm{d}x = \cosh x$

14. $\displaystyle\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x$

15. $\displaystyle\int \tanh x \,\mathrm{d}x = \log\cosh x$

16. $\displaystyle\int \coth x \,\mathrm{d}x = \log|\sinh x|$

17. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} = \arctan\sinh x$

18. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh x} = -\mathrm{arccot}\cosh x$

19. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x} = \tanh x$

20. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sinh^2 x} = -\coth x$

21. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} = -\frac{1}{a}\mathrm{arccot}\frac{x}{a}$

22. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$

23. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|$

24. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$

25. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2\pm x^2}} = \frac{1}{a}\log\left|\frac{x}{a+\sqrt{a^2\pm x^2}}\right|$

26. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}$

27. $\displaystyle\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|$

28. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$

29. $\displaystyle\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x = e^{ax}\,\frac{a\sin(bx)-b\cos(bx)}{a^2+b^2}$

2 Intégrales généralisées

2.1 Définitions

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. On dit que f est **localement intégrable** sur I si f est intégrable sur tout sous-intervalle compact $[\alpha, \beta] \subset I$.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ avec $a < b$ et f une fonction localement intégrable sur $[a, b)$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **converge** ou aussi que f est intégrable sur $[a, b)$ ssi $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $x \to b_-$ (limite à gauche). Laquelle limite est alors appelée **intégrale généralisée** ou **impropre** de f sur $[a, b)$ que l'on note aussi $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Notons qu'il est possible que la limite tende vers l'infini. Mais, si la limite n'existe pas, on dit que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **diverge**.

De manière similaire, pour $-\infty \leq a < b < \infty$, on dit que f est intégrable sur $(a, b]$, si $-f$ est intégrable sur $[-b, -a)$. En outre, on étend la définition aux intervalles ouverts (a, b) avec $-\infty \leq a < b \leq \infty$ en disant que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si pour un $c \in (a, b)$, f est intégrable sur $(a, c]$ et $[c, b)$. L'intégrale impropre est alors donnée par

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Plus généralement, on peut avoir une fonction f définie sur un intervalle donné I de bornes $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sauf en un nombre fini de points, disons $c_1, \ldots, c_n$. Alors, si f est localement intégrable sur tout $[\alpha, \beta] \subset I$, on dit que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si chacune des intégrales suivantes convergent

$$\int_a^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x, \int_{c_2}^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x, \ldots, \int_{c_n}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dans ce cas, on écrit,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_2}^{c_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{c_n}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Enfin, on dit qu'une fonction localement intégrable sur $[a, b)$ est **absolument intégrable** si $|f|$ est intégrable sur $[a, b)$. On dit aussi que l'intégrale $\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x$ est **absolument convergente**, ce que l'on écrit par

$$\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$$

Cependant, si $\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x = \infty$ et que $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ converge, on dit alors que f est semi-intégrable. Nous verrons plus bas que l'intégrale généralisée absolue est plus forte que l'intégrale généralisée.

<u>Exemple</u> **2.1** (**Intégrale de Riemann** à l'infini) Soit $\alpha > 0$ et considérons la fonction $x^{-\alpha}$ sur $[1, \infty)$. Nous avons

$$\int_1^\infty x^{-\alpha} \, \mathrm{d}x = \lim_{x \to \infty} \begin{cases} \log x & \text{si } \alpha = 1 \\ \left(x^{-\alpha-1} - 1\right) / (1 - \alpha) & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

D'où, $\int_1^\infty x^{-\alpha} \, \mathrm{d}x$ converge ssi $\alpha > 1$. ○

<u>Exemple</u> **2.2** (**Intégrale de Riemann** à l'origine) Soit $\alpha > 0$ et considérons cette fois-ci la fonction $x^{-\alpha}$ sur $(0, 1]$. Nous avons

$$\int_0^1 x^{-\alpha} \, \mathrm{d}x = \lim_{x \to 0_+} \begin{cases} -\log x & \text{si } \alpha = 1 \\ \left(1 - x^{-\alpha+1}\right) / (1 - \alpha) & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Il en résulte que $\int_0^1 x^{-\alpha} \, \mathrm{d}x$ converge ssi $\alpha < 1$. ○

<u>Exemple</u> **2.3** L'intégrale $\int_0^\infty \sin x \, \mathrm{d}x$ diverge parce que

$$\int_0^x \sin t \, \mathrm{d}t = 1 - \cos x$$

ce qui montre que la limite n'existe pas quand $x \to \infty$. ○

2.2 Propriétés fondamentales

Il s'agit ici de généraliser quelques propriétés fondamentales de l'intégration de Riemann comme la linéarité, le changement de variable et l'intégration par parties. Nous avons en premier la propriété suivante qui justifie la définition de l'intégrale généralisée sur (a, b).

Théorème 2.4 *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b)$. Alors, pour tout $c \in (a,b)$, f est intégrable sur $[c,b)$ et on a*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Réciproquement, si f est localement intégrable sur $[a,b)$, il existe $c \in (a,b)$ tel que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

En second lieu, la linéarité de l'intégrale de Riemann reste vraie.

Théorème 2.5 (Linéarité) *Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b)$, il en est de même de $\alpha f + \beta g$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et on a*

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Pour le changement de variable, nous avons un résultat similaire à (1.25).

Théorème 2.6 *Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,b)$ et ψ une fonction bijective (croissante) de classe $\mathscr{C}^1$ de $[\alpha,\beta)$ dans $[a,b)$. Alors, $(f \circ \psi)\psi'$ est localement intégrable sur $[\alpha,\beta)$ et on a*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

Autrement dit, les deux intégrales convergent et sont égales ou divergent en même temps.

Exemple **2.7** Soit à calculer

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

C'est là une intégrale impropre que nous pouvons calculer directement ;

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan x]_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

Sinon, soit le changement de variable $x = \tan t$ de $[0,\pi/2)$ dans $[0,\infty)$. Alors, par application des formules (2.1–**??**), nous obtenons

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Remarquons alors que la transformation donne une intégrale de Riemann ordinaire.
○

En fin, quant à l'intégration par parties, nous avons

Théorème 2.8 *Soit $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$, deux fonctions continument dérivables telles que $\lim_{x\to b} f(x)g(x)$ existe. Alors, on a*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b}[f(x)g(x)]_a^x - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

<u>Exemple</u> **2.9** Soit à calculer

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Nous avons

$$\int_0^x \frac{\log(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\left(1-\frac{1}{t}\right)\log(1-t^2)\right]_0^x - \int_0^x \left(1-\frac{1}{t}\right)\frac{-2t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Remarquons l'astuce d'avoir choisi comme primitive de t^{-2} la fonction $1-1/t$. Nous avons

$$\lim_{t\to 1}(t-1)\log(1-t) = 0$$

d'où, il vient que l'intégrale en question est égale à

$$\int_0^1 \frac{-2\mathrm{d}x}{1+x} = -2\log 2$$

2.3 Fonctions positives

Nous allons voir ici des critères importants sur la convergence des intégrales impropres de fonctions non négatives. Évidemment, les mêmes résultats sont vraies pour une fonction non positive f car il suffit de prendre $-f$, et aussi pour $|f|$.

Théorème 2.10 *Soit f une fonction non négative localement intégrable sur $[a, b)$. Alors, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge ssi $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée, autrement dit*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \infty \Longleftrightarrow \exists M > 0, \forall x \in [a, b) : \quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \le M$$

En vertu de ce dernier théorème, nous obtenons un autre résultat important qui donne par comparaison un critère de convergence des intégrales impropres.

Théorème 2.11 (Critère de comparaison) *Soit f et g deux fonctions non négatives et localement intégrables sur $[a, b)$. Si $f \leq g$, alors*

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

<u>Exemple</u> **2.12** Considérons l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Remarquons que $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ quand $x \geq 1$. Alors, nous avons

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + [-e^{-x}]_1^\infty\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + e^{-1} < \infty$$

○

Par ailleurs, nous avons un autre résultat, le suivant, qui nous apprend qu'il suffit, pour avoir des intégrales de même nature, que les deux fonctions comparées se comportent pareillement quand $x \to b$.

Théorème 2.13 *Soit f et g deux fonctions non négatives localement intégrables sur $[a, b)$. Supposons que*

$$\lim_{x \to b_-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{2.3}$$

Alors, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ convergent ou divergent en même temps.

Remarque 2.14 *On applique le plus souvent ce critère d'intégrabilité par comparaison à une intégrale de Riemann ou à une intégrale de Bertrand, i.e. une fonction f sera comparée à la fonction puissance $x^{-\alpha}$ ou à $x\,(\log x)^\alpha$. Voir Exemples 2.1–2.2 et Exemple* **??**. *Ainsi, selon que l'on étudie f à l'infini ou au voisinage de 0, elle aura la même nature que $x^{-\alpha}$ si $f(x)/x^\alpha \to 1$ quand $x \to \infty$ ou $x \to 0_+$.*

Nous utilisons dorénavant la notation $f \sim g$ pour dire qu'à la limite de x en un point ou à l'infini, nous avons

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

<u>Exemple</u> **2.15** Soit

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{x^3 + 1}}$$

Alors, nous remarquons que

$$\frac{1}{x + \sqrt{x^3 + 1}} \sim x^{-3/2}$$

De ce fait et par comparaison avec l'intégrale de Riemann, l'intégrale en question est convergente. ○

2.4 Critère de Cauchy

Pour connaître la converge d'une intégrale impropre sans calculer sa limite, on utilise le critère suivant.

Théorème 2.16 (Critère de Cauchy) *Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,b)$. Alors, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge ssi*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a,b), \forall x, y \in (c,b): \quad \left| \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon \tag{2.4}$$

Il découle du critère de Cauchy pour les intégrales impropres des conséquences importantes. À commencer par le fait que la convergence absolue des intégrales impropres est plus forte que l'intégrabilité impropre.

Théorème 2.17 *Soit f une fonction localement intégrable sur $[a,b)$. Alors, on a*

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ converge}$$

Nous avons un autre critère célèbre dérivé du critère de Cauchy.

Théorème 2.18 (Règle d'Abel) *Soit f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a,b)$ telles que f décroit vers 0 et g vérifie*

$$\exists M > 0, \forall x \in [a,b): \quad \left| \int_a^x g(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq M$$

Alors, l'intégrale $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

La règle d'Abel donne un corollaire plus pratique pour vérifier la convergence de quelques intégrales impropres.

Corollaire 2.19 *Soit f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a,b)$ telles que f est monotone et bornée sur $[a,b]$ et $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Alors, $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ converge.*

<u>Exemple</u> **2.20** Étudions l'intégrale impropre suivante

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$$

Appelons cette intégrale $I(\alpha)$ et supposons en premier que $\alpha \leq 0$. Remarquons que $\sin t$ positif quand

$$t \in [2\pi n, 2\pi n + \pi], \quad n \in \mathbb{N}^*$$

en plus, pour un t dans cet intervalle, nous avons $t^{-\alpha} \geq 1$. D'où, nous obtenons que

$$\left| \int_{(2\pi n)}^{(2\pi n+\pi)} \frac{\sin t}{t^\alpha} \, \mathrm{d}t \right| \geq \left| \int_{(2\pi n)}^{(2\pi n+\pi)} \sin t \, \mathrm{d}t \right| > 2$$

Nous voyons alors que la négation du critère de Cauchy est vérifiée. Donc, $I(\alpha)$ est divergente.

Maintenant considérons le cas $\alpha > 0$. Observons que $f(x) \downarrow 0$ et d'un autre côté que

$$\left| \int_1^x \sin t \, \mathrm{d}t \right| \leq 2$$

Ainsi, par application de la règle d'Abel, Théorème 2.18, $I(\alpha)$ est convergente.

○

2.5 Valeur principale de Cauchy

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b] \setminus \{c\}$. L'intégrabilité de f dépend alors par définition de son intégrabilité sur $[a, c)$ et $(c, b]$, i.e. quand les deux limites suivantes existent

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) \, \mathrm{d}x, \quad \lim_{\delta \to 0} \int_a^{c-\delta} f(x) \, \mathrm{d}x$$

Il est possible que ces deux dernière n'existent pas indépendamment l'une de l'autre mais si l'on prend $\varepsilon = \delta$, on obtient une limite finie. Dans ce cas, cette limite est appelée **valeur principale de Cauchy** de $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ qui est alors donnée par

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^{c-\varepsilon} f(x) \, \mathrm{d}x \right) \tag{2.5}$$

À l'opposé, on peut avoir une intégrale impropre du type

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$$

où f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. En l'occurrence, l'existence de l'intégrale dépend des deux intégrales impropres suivantes qui sont indépendantes l'une de l'autre.

$$\lim_{M \to \infty} \int_{-M}^{c} f(x) \, \mathrm{d}x, \quad \lim_{R \to \infty} \int_c^R f(x) \, \mathrm{d}x$$

pour un c quelconque de $\mathbb{R}$. Là, on peut s'intéresser à la quantité suivante

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.6}$$

Et si elle existe, on l'appelle **valeur principale de Cauchy** de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Notons que la notion de valeur principale de Cauchy est une définition allégée de l'intégrale impropre. Son intérêt apparait dans différents domaines de l'analyse, notamment l'analyse complexe et la théorie des distributions.

<u>Exemple</u> **2.21** Considérons l'intégrale impropre

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-c}, \quad a<c<b$$

Il est facile de voir qu'elle diverge mais sa valeur principale de Cauchy existe bien. En effet, nous avons

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{x-c}\right) = \log\frac{b-c}{c-a}$$

○

3 Équations différentielles

3.1 Définitions et généralités

On appelle **équation différentielle** (en abrégé **ED**) toute équation mettant en relation une fonction inconnue y de la variable indépendante x avec une ou plusieurs de ses dérivées et x. Par exemple,

$$\begin{gathered} y' = 5x + 3 \\ e^y\, y'' + 2(y'')^2 = 1 \\ 4y^{(3)} + \sin x\, y^{(5)} + 5xy = 0 \end{gathered}$$

où nous notons de manière générale

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = \text{ la dérivée d'ordre}\, n$$

L'**ordre** d'une ED est l'ordre de la dérivée la plus élevée de la fonction inconnue apparaissant dans l'équation. Par exemple, dans les trois premières équations ci-dessus, les ordres respectifs sont $1, 2$ et 5.

L'écriture dite *standard* d'une ED d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est donnée sous la forme

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{3.1}$$

où f est une application réelle définie sur une partie de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Une ED est dite **équation différentielle ordinaire** (en abrégé **EDO**) si la fonction inconnue qu'elle comprend ne dépend que d'une seule variable indépendante ou que les dérivées de la fonction inconnue apparaissant dans l'équation sont données par rapport à une seule variable indépendante. Les premiers exemples donnés sont des équations différentielles ordinaires. Si la fonction inconnue dépend de plusieurs variables indépendantes et on voit apparaître dans l'équation des dérivées par rapport à deux variables ou plus, l'équation est dite **équation aux dérivées partielles** (en abrégé **EDP**). Par exemple,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Une **solution** d'une ED d'une fonction inconnue y et d'une variable indépendante x sur l'intervalle I est la fonction $y(x)$ qui satisfait l'équation pour tout $x \in I$. Sa représentation graphique est dite **courbe intégrale**.

<u>Exemple</u> **3.1** Soit l'ED

$$y'' + 4y = 0$$

Alors, il est facile de vérifier que la fonction donnée par

$$y(x) = c_1 \sin(2x) + c_2 \cos(2x),$$

où c_1, c_2 sont des constantes arbitraires, est une solution sur tout $\mathbb{R}$ de l'équation donnée. ○

Résoudre ou **intégrer** une ED consiste à trouver toutes les solutions possibles de l'équation. La **forme générale** d'une ED est celle qui donne toutes ses solutions sous la même forme. Notez qu'il est possible qu'une solution d'une ED peut ne pas s'écrire sous la forme générale de la solution. On dit dans ce cas que c'est une solution **singulière**.

Si des conditions supplémentaires sur la fonction inconnue et ses dérivées sont imposées pour une valeur donnée de la variable indépendante, on parle alors de **problème de valeur initiale** ou **problème de Cauchy**. Ces conditions constituent les **conditions initiales**, une expression qui sous-entend que x, la variable indépendante notée souvent t, est un temps, ce qui n'est pas nécessairement le cas. Si les conditions supplémentaires sont données pour plusieurs valeurs de la variable indépendante, le problème est appelé **problème de valeur limite** et les conditions sont des **conditions aux limites**. Une solution à un problème de valeur initiale ou de valeur limite est une fonction qui résout l'ED et satisfait les contraintes supplémentaires du problème.

<u>Exemples</u> **3.2** Soit

$$y'' + 2y' = e^x; \quad y'(\pi) = 1$$

C'est là un problème de valeur initiale car les deux conditions supplémentaires portent sur une même valeur $x = \pi$. Cependant, le problème suivant

$$y'' + 2y' = e^x; \quad y(0) = 1, y(1) = 1$$

est un problème de valeur limite. ○

L'existence et l'unicité *locales* des solutions des ED constituent le fondement de la théorie desdites équations. Le théorème classique d'existence et d'unicité de **Cauchy-Lipschitz** (voir par exp. [4]) garantit pour nous l'existence et l'unicité des solutions des équations usuelles que nous allons voir. Malheureusement, nous n'allons pas pouvoir donner la démonstration de ce théorème, laquelle demande la généralisation de la notion de dérivabilité (ou différentiabilité) à des espaces de Banach qu'est $\mathbb{R}^n$, ce qui sort du cadre des objectifs modestes de cet ouvrage.

3.2 Équations différentielles du premier ordre

Nous allons considérer ici les ED du premier ordre élémentaires du type standard, c'est-à-dire données sous la forme

$$y' = f(x, y)$$

Équations à variables séparées

On appelle *ED du premier ordre à variables séparées* toute équation de la forme

$$f(y)y' = g(x) \tag{3.2}$$

où f et g sont deux fonctions.

Pour résoudre une équation du type (3.2), supposons que F et G soient des primitives de f et g, i.e. Alors, par dérivation, nous obtenons que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(y(x)) = f(y)y'$$

De ce fait, la formule (3.2) est équivalente à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(y(x)) = G'(x),$$

et, par intégration, il en résulte que

$$F(y) = G(x) + c \tag{3.3}$$

Inversement, toute fonction dérivable y satisfaisant (3.3) est solution de l'équation (3.2). En effet, par dérivation des deux côtés de (3.3), il vient que

$$F'(y)y = G'(x),$$

ce qui est équivalent à

$$f(y)y = g(x)$$

Ainsi, résoudre (3.2) revient à trouver des primitives à f et g, et toute fonction satisfaisant (3.3) est une solution à (3.2).

Remarquons que réécrire une ED à variables séparées sous la forme (3.2) s'appelle **séparation des variables**.

Dans le cas où il est possible de trouver les primitives des fonctions f et g de l'éq. diff. (3.2), il se peut qu'il ne soit pas possible d'exprimer y en fonction de x. Dans ce cas, la solution est laissée sous sa **forme implicite** (3.3).

Si l'on impose une condition initiale $y(x_0) = y_0$, on choisira alors la constante c apparaissant dans l'équation (3.3) telle que

$$c = F(y_0) - G(x_0)$$

<u>Exemples</u> **3.3** (1) Intégrons l'équation :

$$y' = x(1 + y^2)$$

Par séparation des variables, il résulte

$$\frac{y'}{1 + y^2} = x$$

D'où,

$$\arctan y = \frac{x^2}{2} + c \Longrightarrow y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

(2) Considérons l'équation

$$y' = -\frac{x}{y}$$

qui, en séparant les variables, donne

$$yy' = -x$$

La solution est exprimée sous la forme :

$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c \Longleftrightarrow y^2 + x^2 = 2c$$

La dernière équation montre que c doit être positive si y est une solution de l'équation. Posons alors $2c = a^2$, ce qui donne

$$y^2 + x^2 = a^2.$$

Cette équation présente deux solutions différentielles en fonction de la variable x :

$$y_1 = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad -a < x < a,$$

$$y_2 = -\sqrt{a^2 - x^2}, \quad -a < x < a$$

Les courbes intégrales y_1 sont des demi-cercles au-dessus de l'axe des abscisses, et les y_2 sont des demi-cercles en-dessous de l'axe des x.

(3) Soit

$$y' \cos y - 2x = 0, \qquad y(0) = 0$$

La solution de ce problème de valeur initiale sur l'intervalle $(-\pi/2, \pi/2)$ s'écrit sous la forme

$$\sin y = x^2 + c$$

Étant donné la condition initiale, la solution est donc donnée par la fonction $y = \arcsin x^2$. ○

Une ED du premier ordre sous la forme standard est dite **homogène** en x et y si

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad f(tx, ty) = f(x, y)$$

Autrement dit, l'équation peut être écrite sous la forme

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Pour ce genre d'ED, il est possible d'effectuer une séparation des variables en opérant le changement $y = xv$. Il vient alors que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = v + x\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = g(v),$$

ce qui donne par séparation des variables

$$\frac{v'}{g(v) - v} = \frac{1}{x}$$

L'ED résultant exprimée en fonction des variables x et v peut être résolue comme équation différentielle à variables séparées, la solution de l'équation originelle étant obtenue en effectuant la substitution inverse.

<u>Exemple</u> **3.4** Nous avons l'éq. diff. homogène

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

En utilisant la substitution invoquée précédemment $y = xv$, nous obtenons

$$x\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{v}$$

La solution de cette équation est alors

$$v^2 = 2\log|x| + c = \log x^2 + c$$

Ainsi, la solution à l'équation différentielle première est donnée par

$$y^2 = x^2 \log x^2 + cx^2$$

○

Équations linéaire du premier ordre

On appelle *ED linéaire du premier ordre* (en abrégé $\mathbf{EDL^1}$) toute équation de la forme

$$y' = f(x)y + g(x) \tag{EDL^1}$$

où g et h sont deux fonctions définies sur un intervalle donné. On définit l'**ED homogène associée** ($\mathbf{EDL^1H}$) à (EDL^1) en y annulant le terme $g(x)$, i.e.

$$z' = f(x)z \tag{EDL^{1}H}$$

Pour résoudre (EDL^1), on peut utiliser la méthode dite **méthode d'intégration** que l'on résume ci-après. L'équation homogène associée est une équation à variables séparées que l'on peut écrire sous la forme

$$\frac{z'}{z} = f(x)$$

Une primitive de z'/z est donnée par $\log|z|$, donc

$$\log|z| = \int f\mathrm{d}x = F(x) + c,$$

où F est une primitive de f sur I. On obtient que

$$|z| = e^c\, e^{F(x)} \Longrightarrow z = \pm e^c\, e^{F(x)}$$

La valeur $\pm e^c =: \lambda$ couvre tout $\mathbb{R}^*$ et comme $z = 0$ est une solution de l'équation homogène, la solution générale de l'équation homogène est alors

$$z(x) = \lambda\, e^{F(x)}$$

Ensuite, une solution particulière y_p de (EDL^1) peut être recherchée par la **méthode de variation de la constante** sous la forme

$$y_p(x) = \Lambda(x) e^{F(x)}$$

Nous avons

$$y_p'(x) = (\Lambda'(x) + \Lambda(x) f(x)) e^{F(x)}$$

Par substitution dans (EDL^1), nous obtenons que y_p est une solution de cette dernière ssi

$$\forall x \in I : \qquad \Lambda'(x) = g(x)\, e^{-F(x)},$$

ce qui donne

$$\Lambda(x) = \int g(x) e^{-F(x)}\, \mathrm{d}x$$

La solution générale de l'équation complète (EDL^1) est donnée par

$$y = e^{F(x)} \Lambda(x) \tag{3.4}$$

où une constante arbitraire apparaît dans le terme $\Lambda(x)$.

Le théorème suivant résume les propriétés des solutions de EDL^1.

Théorème 3.5 *Soit une (EDL^1) avec f, g des fonctions continues sur un intervalle I. Alors, on a que*

(*i*) *la solution générale de (EDL^{1}H) s'écrit sous la forme*

$$z = \lambda\, e^{F(x)},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire et F est une primitive de f.

(*ii*) *toute solution de l'équation complète* (EDL[1]) *est de la forme*

$$y = z + y_p = e^{F(x)} \int g(x) e^{-F(x)} \, \mathrm{d}x, \tag{3.5}$$

où z est la solution générale de l'équation homogène et y_p est une solution particulière de l'équation complète (EDL[1]) *donnée par*

$$y = e^{F(x)} \int g(x) e^{-F(x)} \, \mathrm{d}x$$

(*iii*) *pour tout couple (x_0, y_0) avec $x_0 \in I$, il existe une unique solution au problème de valeur initiale*

$$y' = f(x)y + g(x), \qquad y(x_0) = y_0,$$

donnée par

$$y = e^{F(x)} \Big(y_0 e^{-F(x_0)} + \int_{x_0}^{x} g(t) \, e^{-F(t)} \, \mathrm{d}t \Big) \tag{3.6}$$

Remarque 3.6 *Intégrer une EDL[1] revient donc à calculer deux intégrales (primitives)* :

$$F(x) = \int f(x) \, \mathrm{d}x, \qquad \Lambda(x) = \int g(x) e^{-F(x)} \, \mathrm{d}x$$

<u>Exemples</u> **3.7** (1) Considérons l'EDL suivante sur $(1, \infty)$:

$$y' = \frac{y}{x-1} + 1$$

Trouvons la solution de cette équation vérifiant la condition initiale $y(2) = 0$. Nous avons sur $(1, \infty)$,

$$F(x) = \int^x \frac{1}{x-1} \, \mathrm{d}x = \log(x-1)$$
$$\Lambda(x) = \int^x e^{-\log\big(x-1\big)} \, \mathrm{d}x = \log(x-1) + c$$

Ce qui donne la solution générale :

$$y = (x-1)\big(\log(x-1) + c\big)$$

Si $y(2) = 0$, alors $c = 0$. Donc, la solution à notre problème de valeur initiale est donnée par

$$y = (x-1)\log(x-1)$$

(2) Soit l'ED linéaire suivante

$$y' \sin x - y \cos x = 1 \tag{3.7}$$

L'EDL^{1}H associée est

$$z' \sin x - z \cos x = 0$$

Cette équation admet des solutions sur tout intervalle $(k\pi, (k+1)\pi)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Nous avons

$$\frac{z'}{z} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

donc $z = \lambda \sin x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous voulons une solution particulière de la forme $y_0 = \lambda(x) \sin x$ qui est solution de (3.7) ssi

$$\sin x \left(\lambda'(x) \sin x + \lambda(x) \cos x\right) - \lambda(x) \cos x = 1$$

ce qui donne

$$\lambda'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$$

La fonction $-\cot x$ vérifie cette dernière équation. Nous pouvons donc choisir

$$y_0(x) = -\cos x$$

et la solution générale de (3.7) sur les intervalles $(k\pi, (k+1)\pi)$ est donnée par

$$y = c \sin x - \cos x$$

○

Équations de Bernoulli et de Riccati

Nous allons voir ici deux cas particuliers d'ED du premier ordre dont l'étude se ramène à celle d'une EDL^1. En premier, on appelle **ED de Bernoulli**, une équation donnée par

$$y' = f(x)\, y^\alpha + g(x)\, y \tag{3.8}$$

où f et g sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Une manière de résoudre ce genre d'équations est d'opérer le changement de variables

$$z = y^{1-\alpha} \tag{3.9}$$

Ce qui transforme l'équation (3.8) en une EDL^1 pour la fonction inconnue $z(x)$;

$$z' = (1-\alpha) g(x)\, z + (1-\alpha)\, f(x) \tag{3.10}$$

<u>EXEMPLE</u> **3.8** Soit l'ED de Bernoulli

$$y' = x^4 y^{1/3} + \frac{3}{x} y$$

En posant $z = y^{1-1/3}$, nous avons

$$y = z^{3/2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{3}{2} z^{1/2} \, z'$$

Ainsi, nous obtenons l'ED

$$\frac{3}{2} z^{1/2} \, z' - \frac{3}{x} z^{3/2} = x^4 \, z^{1/2},$$

soit

$$z' - \frac{2}{x} z = \frac{2}{3} x^4$$

Par application de la méthode vue précédemment, la solution de cette EDL[1] est alors

$$z = c \, x^2 + \frac{2}{9} x^5$$

En faisant la substitution inverse, il vient que la solution à l'équation de notre exemple est donnée par

$$y = (c \, x^2 + \frac{2}{9} x^5)^{3/2}$$

○

Par ailleurs, nous avons l'ED dite **de Riccati** qui est définie par

$$y' = f(x) \, y^2 + g(x) \, y + h(x) \tag{3.11}$$

où f, g et h sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si y_p est une solution particulière de l'équation du type (3.11), on pose $y = y_p + u$. Il vient alors que

$$u' = f(x) u^2 + (2 f(x) y_p + g(x)) u$$

Ce qui est une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$.

<u>EXEMPLE</u> **3.9** Soit l'ED de Riccati suivante :

$$y' = \frac{y^2}{x} - \left(2 + \frac{1}{x}\right) y + x + 2$$

Sachant que $y_p = x$ est une solution (particulière) à cette équation, posons $y = y_p + u$. Nous obtenons que

$$u' = \frac{u^2}{x} - \frac{u}{x}$$

Ensuite, soit v telle que $u = v^{1-2} = 1/v$. Donc la fonction v vérifie l'EDL[1] suivante

$$v' = \frac{v}{x} - \frac{1}{x}$$

La solution est alors

$$v = -x \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x = 1 + cx$$

Ce qui donne par substitution

$$y = x + \frac{1}{1+cx}, \qquad c \in R$$

○

3.3 EDL du second ordre

Dans cette section, il s'agit d'ED du second ordre standard, i.e.

$$y'' = f(x, y, y')$$

Nous nous intéresserons aux cas des ED linaires, à savoir

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x)$$

EDL² homogènes

Commençons par le cas des équations dites homogènes. Nous appelons une **EDL du second ordre homogène** (en abrégé EDL²H), toute équation donnée sous la forme

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \tag{EDL^{2}H}$$

où f et g sont des fonctions (continues) données.

L'existence et l'unicité des solution des (EDL²H) sont garanties par le théorème suivant qui est lui-même basé bien entendu sur le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 3.10 *Supposons que f et g soient des fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Soit $x_0 \in I$ et soit y_0, y_0' deux valeurs réelles arbitraires. Alors, le problème de valeur initiale*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0, \qquad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0' \tag{3.12}$$

possède une solution unique sur I.

Remarque 3.11 *Clairement, la fonction nulle $y = 0$ est une solution de (EDL^{2}H), nous l'appelons **solution triviale**. Toute autre solution est non-triviale. Par conséquent, sous les conditions du Théorème 3.10, la solution au problème de valeur initiale*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0, \qquad y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0$$

est la fonction nulle $y = 0$.

EXEMPLE **3.12** Considérons l'EDL^{2}H suivante :

$$y'' - y = 0 \tag{3.13}$$

Les fonctions constantes $f(x) = 0$ et $g(x) = -1$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Le Théorème 3.10 garantit alors l'existence d'une solution à tout problème de valeur initiale pour (3.13). Il est facile de vérifier que $y_1 = e^x$ et $y_2 = e^{-x}$ sont deux solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$. En même temps, si nous posons

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

où c_1, c_2 sont des constantes quelconques, nous pouvons voir que y est aussi une solution de l'équation. ○

Généralement, nous avons

Théorème 3.13 *Si y_1 et y_2 sont des solutions de l'* EDL^{2}H

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0,$$

*sur un intervalle ouvert I, alors toute **combinaison linéaire** des fonctions y_1 et y_2, i.e.*

$$c_1 y_1 + c_2 y_2$$

est une solution de l'équation sur I.

On dit que l'ensemble $\{y_1, y_2\}$ est un **ensemble fondamental** des solutions de (EDL²H) sur I si toute solution de cette équation s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de y_1 et y_2. Et on dit que des fonctions y_1 et y_2 sont **(linéairement) indépendants** ou que l'ensemble $\{y_1, y_2\}$ est linéairement indépendant si aucune des deux fonctions ne peut s'écrire comme une constante multipliée par l'autre fonction. Cela signifie en particulier qu'aucune des deux fonctions n'est triviale, sinon on aurait alors, $y_1 = 0y_2$ si $y_1 = 0$. Par exemple, les solutions de l'équation (3.13), à savoir e^x et e^{-x}, sont telles que $e^x/e^{-x} = e^{2x}$, une quantité non constante. Par conséquent, lesdites solutions sont linéairement indépendantes.

Théorème 3.14 *Soit f, g deux fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Supposons que y_1, y_2 soient sur I des solutions de l'équation*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0 \tag{3.14}$$

*Définissons la fonction dite **Wronskian** de $\{y_1, y_2\}$:*

$$W = y_1y_2' - y_2y_1' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \tag{3.15}$$

*Alors, pour tout $x_0 \in I$, pour tout $x \in I$, la fonction W est donnée par ladite **formule d'Abel** :*

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\phi(x)}, \tag{3.16}$$

où

$$\phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

Par conséquent, de deux choses l'une, ou bien W ne s'annule pas sur I ou bien $W = 0$ sur tout I. De plus, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) L'ensemble $\{y_1, y_2\}$ est un ensemble fondamental.

(ii) L'ensemble $\{y_1, y_2\}$ est linéairement indépendant.

(iii) W ne possède aucun zéro sur I, i.e. $W(x) \neq 0, \forall x \in I$.

Remarque 3.15 *Si y_1, y_2 sont des solutions de (3.14), et que l'on impose des conditions initiale $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$, la solution est alors donnée sous la forme linéaire $y = c_1y_1 + c_2y_2$ où*

$$c_1 = \frac{1}{W(x_0)} \begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \qquad c_2 = \frac{1}{W(x_0)} \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix} \tag{3.17}$$

En effet, la solution au problème de valeur initiale (3.12) doit vérifier le système d'équations suivant

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= y_0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= y_0' \end{aligned} \tag{3.18}$$

En multipliant la première équation dans ce système par $y_2'(x_0)$ et la seconde par $y_2(x_0)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) y_2'(x_0) + c_2 y_2(x_0) y_2'(x_0) &= y_0\, y_2'(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) y_2(x_0) + c_2 y_0'(x_0) y_2(x_0) &= y_0'\, y_2(x_0) \end{aligned}$$

Par soustraction, cela donne

$$W(x_0)c_1 = y_2'(x_0)y_0 - y_2(x_0)y_0' = \begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \tag{3.19}$$

Ce qui donne c_1 sous la formule donnée dans (3.17). Pareillement, nous obtenons la formule de c_2 en multipliant la première équation dans le système par $y_1'(x_0)$ et la seconde par $y_1(x_0)$.

<u>Exemple</u> **3.16** Considérons l'équation homogène

$$x^2 y'' + xy' - 4y = 0 \tag{3.20}$$

Les fonctions x^2 et x sont continues sur tout $\mathbb{R}$. Cependant, la fonction x^2 est nulle à l'origine. D'après le Théorème 3.10, l'équation (3.20) avec des conditions initiales $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$, admet une solution unique sur chacun des intervalles $(-\infty, 0)$ et $(0, +\infty)$. On vérifie que la fonction $y_1 = x^2$ est une solution de l'équation (3.20) sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $y_2 = x^{-2}$ est une solution sur $\mathbb{R}^*$.

Posons $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Si l'on impose les conditions initiales $y(1) = 2, y'(1) = 0$. Par substitution, il vient que

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ c_1 - c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, l'unique solution de l'équation (3.20) sur $(0, +\infty)$ est donnée par

$$z = x^2 + x^{-2}$$

Remarquons aussi que la quantité $x^2/x^{-2} = x^4$ est non constante. Ce qui montre que les deux solutions sont bien indépendantes. En même temps, son Wronskian est donnée par

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^{-2} \\ 2x & -2x^{-3} \end{vmatrix} = -2x^{2-3} - 2x^{1-2} = -\frac{4}{x}$$

Et par la formule d'Abel, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, nous avons bien la même valeur,

$$W = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} t^{-1}\,\mathrm{d}t} = -\frac{4}{x_0}e^{-\log(x/x_0)} = -\frac{4}{x}$$

○

EDL^2 complètes

On appelle une équation différentielle linéaire du second ordre (complète) (en abrégé EDL^2), toute ED donnée par

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x) \tag{EDL^2}$$

où f, g et h sont des fonctions (continues) données. On dnote l'EDL^{2}H **associée** est

$$z'' + f(x)z' + g(x)z = 0 \tag{3.21}$$

En premier, nous avons le théorème suivant basé sur le théorème de Cauchy-Lipschitz qui donne des conditions nécessaires et suffisantes de l'existence et de l'unicité des solutions du problème de valeur initiale pour les EDL^2.

Théorème 3.17 *Soit f, g et h des fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Soit $x_0 \in I$ et y_0, y_0' deux nombres réels quelconques. Alors, le problème de valeur initiale*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x), \qquad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \tag{3.22}$$

possède une solution unique sur I.

Pour connaître la solution générale au problème (3.22), il est nécessaire de trouver la solution générale à l'équation homogène associée. En effet, si l'on connait une telle solution générale que l'on connaisse une solution particulière à l'équation complète, alors nous pouvons trouver la solution générale à l'équation complète (EDL^2). Explicitement, nous avons

Théorème 3.18 *Soit f, g et h des fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Soit y_p une solution particulière sur I de l'équation*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x) \tag{3.23}$$

Supposons que $\{z_1, z_2\}$ soit un ensemble fondamentale de solutions sur I de l'équation homogène associée

$$z'' + f(x)z' + g(x)z = 0$$

Alors y est une solution de (3.23) sur I ssi y s'écrit sous la forme

$$y = y_p + c_1 z_1 + c_2 z_2, \tag{3.24}$$

où c_1, c_2 sont des constantes réelles arbitraires.

Remarque 3.19 *Si la fonction h dans (3.23) s'écrit comme une somme de deux fonctions, $h = h_1 + h_2$, nous pouvons chercher par le* ***principe de superposition*** *une solution particulière de la forme $y_p = y_1 + y_2$ où les y_i sont respectivement les solutions particulières aux équations*

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h_i(x), \qquad i = 1, 2.$$

En effet, on vérifie facilement que $y_p = y_1 + y_2$ est une solution de (3.23).

Pour résoudre les (EDL[2]), nous pouvons utiliser la ***méthode d'intégration*** *qui consiste à trouver une solution (générale) de cette équation sous la forme $y = uz$ si l'on connaît une solution z de l'équation homogène associée. u est alors une solution de l'équation dite incomplète*

$$u''z + u'(2z' + z) = h(x)$$

Exemples **3.20** (1) Considérons l'ED suivante :

$$y'' + y = x$$

Par application du Théorème 3.23, remarquons en premier que les fonctions $f(x) = 0, g(x) = 1$ et $h(x) = 1$ sont continues sur tout $\mathbb{R}$. D'un autre côté, nous pouvons voir que la fonction x est une solution particulière de cette équation. En outre, il est facile de vérifier que les deux fonctions $z_1 = \sin x$ et $z_2 = \cos x$ forment un ensemble fondamental de solutions de l'équation homogène associée i.e. $z'' + z = 0$. Ainsi, la solution générale de la première équation est donnée sous la forme

$$y = x + c_1 z_1 + c_2 z_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(2) Soit l'ED suivante :

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = 2x^2$$

On vérifie que les fonctions $z_1 = x^2$ et $z_2 = 1/x^2$ sont des solutions indépendantes de l'équation homogène associé sur $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ($z_1/z_2 = x^4$ non constante). Pour trouver une solution particulière de l'équation complète, notons que si l'on choisit de l'écrire sous la forme $y_p = ax^4$ où a est une constante, on obtient une égalité entre deux polynômes du second degré. D'où, nous pouvons connaître éventuellement la valeur possible de a. Dans notre cas, nous avons

$$12ax^2 = 2x^2$$

Donc $a = 1/6$. Ainsi la solution générale à notre équation sur $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ est

$$y = \frac{x^4}{6} + c_1x^2 + \frac{c_2}{x^2}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(3) Soit maintenant l'équation à intégrer

$$y'' + y = x + e^x$$

En vertu de la Remarque 3.19, nous pouvons résoudre séparément les équations

$$\begin{aligned} y'' + y &= x \\ y'' + y &= e^x \end{aligned} \tag{3.25}$$

Or, par (1), nous connaissons déjà la solutions de l'équation $y'' + y = x$ avec le système fondamental de l'équation homogène associée. Quant à la seconde équation, nous avons que $e^x/2$ est une solution particulière. De ce fait, la solution de cette dernière est $e^x/2 + c_1 \sin x + c_2 \cos x$. Ainsi, la solution générale au problème est donnée par

$$y = \frac{e^x}{2} + x + c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

○

EDL^2 à coefficients constants

Nous considérons ici un cas particulier des équations (EDL^2) où les fonctions f, g sont des constantes réelles. On parle alors d'**EDL^2 à coefficients constants** qui s'écrivent sous la forme

$$y'' + ay' + by = h(x), \qquad a, b \in \mathbb{R} \tag{3.26}$$

Considérons l'équation homogène associée i.e.

$$z'' + az' + bz = 0 \tag{3.27}$$

Dans ce cas, il est clair que la solution générale sera vraie sur tout $\mathbb{R}$. Pour trouver la solution à cette équation, nous sommes tentés de prendre la fonction $z = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, nous avons $z' = re^{rx}$ et $z'' = r^2 e^{rx}$. Alors, il résulte que

$$z'' + az' + bz = (r^2 + ar + b)\, e^{rx}$$

Le polynôme en r à droite de cette équation est appelé **polynôme caractéristique**, et on appelle **équation caractéristique** associée, l'équation

$$r^2 + ar + b = 0 \tag{3.28}$$

Les solutions de l'équation homogène associée sont clairement données en fonctions des racines de l'équation caractéristique. Le théorème suivant résume les solutions possibles à l'équation homogène (3.27). Notons ici que dans le cas d'une solution double pour l'équation caractéristique, on obtient une seule solution de (3.27) de la forme e^{rx}. Pour trouver une deuxième solution indépendante, nous chercherons une solution sous la forme $z_2 = ue^{r_0 x}$ où u est une fonction à déterminer (voir le développement que nous donnons après le théorème).

Théorème 3.21 *Soit une* EDL^{2}H

$$z'' + az' + bz = 0 \tag{3.29}$$

Alors, on a que

(*i*) *si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, la solution générale est donnée par*

$$z = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \qquad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

(*ii*) *si l'équation caractéristique admet une racine réelle double r_0, la solution recherchée est*

$$z = (c_1 + c_2 x)e^{r_0 x}, \qquad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

(*iii*) *si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = p + iq$ et $r_2 = p - iq$ avec $p, q \in \mathbb{R}$, la solution générale est sous la forme*

$$z = e^{px}\big(c_1 \sin(qx) + c_2 \cos(qx)\big), \qquad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$$

<u>Exemples</u> **3.22** (1) Considérons l'ED

$$z'' + 6z' + 5z = 0$$

L'équation caractéristique de cette équation est

$$r^2 + 6r + 5 = 0$$

Ses racines sont $r_1 = -5$ et $r_1 = -1$. Les solutions à notre équation sont donc $z_1 = e^{-5x}$ et $z_2 = e^{-x}$. Notez que $z_1/z_2 = e^{-4x}$ est non constante, ce qui traduit leur indépendance. La solution générale est alors

$$z = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{-x}$$

(2) Soit

$$z'' + 6z + 9z = 0$$

L'équation caractéristique associée admet une racine double $r_0 = -3$. Nous chercherons la deuxième solution sous la forme $z_2 = ue^{-3x}$ où u est une fonction à déterminer (cette méthode pour déterminer une deuxième solution indépendante sera discutée plus bas). Supposons que $z_2 = ue^{-3x}$ est une solution de la première équation. Par substitution, nous obtenons

$$z'' + 6z + 9z = u''\, e^{-3x}$$

Ainsi, z_2 est une solution ssi $u'' = 0$, ce qui est équivalent à ce que u soit de la forme $u = \alpha + \beta x$ avec α, β des constantes arbitraires. La solution générale est alors

$$e^{-3x}(\alpha + \beta x), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(3) Soit l'équation à résoudre

$$z'' + 4z + 13z = 0$$

On vérifie que $r_1 = -2 + 3i$ et $r_2 = -2 - 3i$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique associée. La solution à l'ED est donnée par

$$z = e^{-2x}\left(c_1 \sin(3x) + c_2 \cos(3x)\right), \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

○

Dans le cas particulier des ED à coefficients constants avec une fonction h donnée par

$$h(x) = e^{\alpha x} P_n(x),$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$ et P_n est un polynôme de degré n, nous cherchons de manière générale la solution particulière y_p sous les formes suivantes :

1. si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique,

$$y_p = e^{\alpha x} Q_n(x)$$

2. Si α est une racine simple de l'équation caractéristique,

$$y_p = x e^{\alpha x} Q_n(x)$$

3. Si α est une racine double de l'équation caractéristique,

$$y_p = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$$

où Q_n est représente un polynôme de degré n.

Remarquons que si la fonction h est donnée sous la forme

$$h(x) = P_n(x)\sin(\alpha x) \qquad \text{ou} \qquad h(x) = P_n(x)\cos(\alpha x),$$

P_n étant un polynôme, on peut se ramener au cas ci-dessus en écrivant

$$\sin(\alpha x) = \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2}, \qquad \cos(\alpha x) = \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2}$$

<u>Exemples</u> **3.23** (1) Considérons l'ED

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + 3x - 1).$$

Les racines de l'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ sont 1 et 2. D'où, la solution générale de l'équation homogène associée est

$$z = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

Comme 3 n'est pas une racine de l'équation caractéristique, nous pouvons chercher une solution particulière sous la forme

$$y = u e^{3x}, \qquad u = ax^2 + bx + c \tag{3.30}$$

Par dérivation et substitution, u doit vérifier

$$u'' + 3u' + 2u = x^2 + 2x - 1.$$

Par comparaison, nous obtenons le système suivant

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b + 6a = 2 \\ 2c + 3b + 2a = -1 \end{cases}$$

Ce qui donne

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{4}.$$

d'où,

$$y_p = (2x^2 - 2x - 1)\,\frac{e^{3x}}{4}$$

La solution générale à l'équation complète est alors

$$y = (2x^2 - 2x - 1)\,\frac{e^{3x}}{4} + c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

(2) Soit à résoudre l'ED

$$y'' - 4y' + 3y = (12x^2 + 8x + 6)\,e^{3x}$$

L'équation caractéristique possède les racines 1 et 3. Par conséquent, la solution générale à l'équation homogène associée est

$$z = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$$

Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p = x(ax^2 + bx + c)e^{3x}$. Nous avons

$$\begin{aligned} y_p' &= e^{3x}\,\big(3ax^3 + 3(b+a)x^2 + (3c+2b)x + c\big) \\ y_p'' &= e^{3x}\,\big(9ax^3 + 9(b+2a)x^2 + 3(3c+4b+2a)x + 6c + 2b\big) \end{aligned}$$

Par substitution dans l'équation première, il vient que

$$6ax^2 + 2(3a+2b)x + 2(b+c) = 12x^2 + 8x + 6$$

Remarquons ici que l'on ne voit pas le terme x^3 dans la dernière équation et ce car 3 est une solution simple à l'équation caractéristique. Ainsi, par comparaison, il résulte que

$$a = 2, b = -1, c = 4$$

D'où,

$$y_p = xe^{3x}\left(2x^2 - x + 4\right)$$

donc,

$$y = x(2x^2 - x + 4)e^{3x} + c_1 e^x + c_2 e^{3x} = c_1 e^x + (2x^3 - x^2 + 4x + c_2)e^{3x}$$

(3) Considérons l'ED

$$y'' + y = \cos x$$

L'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ admet deux racines imaginaires $r = \pm i$. D'où, la solution générale à l'équation homogène associée est donnée par

$$z = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

Maintenant, rappelons que

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Nous pouvons alors résoudre notre équation en considérant séparément les équations

$$y'' + y = \frac{e^{ix}}{2}$$
$$y'' + y = \frac{e^{-ix}}{2}$$

Comme les valeurs $\pm i$ sont des racines de l'équation caractéristique, nous chercherons alors des solutions particulières à ces dernières sous la forme axe^{ix} et bxe^{-ix}, respectivement. Cependant, nous pouvons clairement, en considérant la somme, chercher une solution particulière à l'équation en question sous la forme $ax\cos x + bx\sin x$. Par dérivation et substitution, il vient que $a = 0$ et $b = 1/2$. Donc

$$y_p = \frac{x}{2}\sin x$$

Ainsi, la solution générale est

$$y = \frac{x}{2}\sin x + c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

○

4 Suites de fonctions

4.1 Définitions

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, associons une fonction réelle définie sur $E \subseteq \mathbb{R}$. Ainsi, on obtient une suite de fonctions (f_n) réelles définies sur $E \subseteq \mathbb{R}$. On dit que la suite (f_n) est (simplement ou ponctuellement) **convergente** sur E si, pour tout $x \in E$, la suite numérique $(f_n(x))$ est convergente, i.e.

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \; n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{4.1}$$

Notons que l'entier N associé à ε dépend généralement de x. Dans ce cas, la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E, f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{4.2}$$

est dite limite de la suite (f_n) et l'on écrit

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \quad \text{ou} \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f.$$

<u>Exemple</u> **4.1** Considérons la suite de fonctions

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, \quad E = \mathbb{R}_+$$

Pour tout $x > 0$, on a $\lim f_n(x) = 1$, et pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$. Ainsi, la suite (f_n) converge sur E et a pour limite la fonction suivante

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

En effet, pour tout $x \in E$, soit $\varepsilon > 0$ et trouvons N. En premier, si $x = 0$, nous avons $|f_n(0) - f(0)| = 0 < \varepsilon$. Par conséquent, nous pouvons choisir N arbitrairement. En second, si $x > 0$, nous avons

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+nx} < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon x}$$

Il suffit alors de prendre pour N un entier quelconque supérieur à $1/(\varepsilon x)$.

Notons ici que si l'on prend $\varepsilon \geq 1$, alors tout entier N convient pour tout x. Et on remarquera aussi que les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$ tandis que la fonction limite n'est pas continue en $x = 0$. ○

Exemple 4.2 (**Fonction exponentielle**) Nous avons ici un exemple important de convergence de suite de fonctions donne une propriété essentielle de la fonction exponentielle, laquelle propriété est en fait une définition équivalente à celle-ci, à savoir que

Proposition 4.3 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x \tag{4.3}$$

○

4.2 Convergence uniforme

On dit que la suite (f_n) **converge uniformément** sur E vers la fonction f si

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f_n(x)| =: \|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{4.4}$$

c'est-à-dire,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in E : n \geq N \Longrightarrow \left|f_n(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon \tag{4.5}$$

On écrit

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{U}} f$$

L'inégalité de la Proposition (4.5) donne

$$\left|f_n(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

Cela dit que pour tout $n \geq N$, le graphe de f_n est contenu dans une "bande" de largeur 2ε symétrique par rapport au graphe de f.

Notons ici la différence entre les propositions (4.1) et (4.5) pour le choix du nombre x qui vient après la valeur N dans la dernière, ce qui traduit l'uniformité de la convergence. Nous avons alors clairement la conséquence suivante.

Théorème 4.4 *La convergence uniforme des suites de fonctions implique la convergence simple.*

Remarque 4.5 *La réciproque de la proposition 4.4 est fausse comme le montre l'Exemple 4.1. En effet, nous avons*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq 0} \frac{1}{1+nx} = 1$$

Cependant, si nous restreignons la même suite de fonctions à l'ensemble $[\delta, \infty), \delta > 0$, nous obtenons alors que la suite (f_n) converge uniformément vers $f = 1$. En effet, il suffit de voir que

$$\sup_{x>\delta} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{1+n\delta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Par ailleurs, la combinaison linéaire de fonctions convergeant uniformément est une fonction convergeant uniformément. Explicitement, nous avons

Théorème 4.6 *Si (f_n) et (g_n) sont deux suites convergentes uniformément vers f et g, alors pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $(af_n + bg_n)$ converge uniformément vers $af + bg$.*

Preuve. Il suffit de regarder la preuve de (**??**). □

Pour établir la convergence uniforme sans avoir besoin de connaître la fonction limite, nous avons le critère de Cauchy.

Théorème 4.7 (Critère de Cauchy) *Soit (f_n) une suite de fonctions sur $E \subseteq \mathbb{R}$. Pour que la suite (f_n) soit uniformément convergente sur E, il faut et il suffit que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m : n \geq N, m \geq N \Longrightarrow \|f_n - f_m\| < \varepsilon \tag{4.6}$$

<u>Exemple</u> **4.8** Considérons la suite de fonctions

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad E = [0,1]$$

Nous avons $\lim f_n = f = 0$. Comme la borne supérieure de la fonction

$$y \longmapsto \frac{y}{1+y^2}, \quad y \in [0, \infty),$$

est égale à $1/2$ et est atteinte au point $y = 1$, nous avons

$$\|f_n\| = \sup_E |f_n| = \frac{1}{2}$$

La convergence $f_n \to 0$ n'est donc pas uniforme sur E.

Par contre, si l'on considère la même suite (f_n) sur $E_\delta = [\delta, \infty)$, $\delta > 0$, la convergence $f_n \longrightarrow 0$ est uniforme. En effet, nous avons

$$\forall n > N = [1/\delta] : \quad \sup_{E_\delta} |f_n| = f_n(\delta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

d'où la convergence uniforme de (f_n) sur E_δ. ○

4.3 Suites de fonctions continues

Il s'agit ici d'étudier la continuité de la limite d'une suite de fonctions. La question est : est-ce que la continuité d'une suite de fonctions continues est conservée à la limite ?!

Théorème 4.9 *Si $f_n \longrightarrow f$ uniformément sur un intervalle I et que toutes les fonctions f_n sont continues en un point $a \in I$, la fonction f est continue en a. On peut alors écrire*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) \tag{4.7}$$

Remarque 4.10 *La contraposée de ce résultat est l'assertion suivante : si une suite de fonctions continues converge vers une fonction non continue, la convergence n'est pas uniforme.*

Le théorème donne une condition suffisante pour que $f = \lim f_n$ soit continue, mais cette condition n'est pas nécessaire. Il est possible que les fonctions f_n et f soient continues sans que la convergence soit uniforme. Par exemple, nous avons la suite de fonctions définies sur $[0, 2]$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \le x \le 1/n \\ -n^2 x + 2n, & 1/n \le x \le 2/n \\ 0 & 2/n < x \le 2. \end{cases} \tag{4.8}$$

Les fonctions f_n sont continues et la suite (f_n) converge simplement vers $f = 0$. Le résultat est évident pour $x = 0$. Si $x > 0$, alors $f_n(x) = 0$ si $n > 2/x$. Cependant, la convergence n'est pas uniforme car

$$\|f_n - f\| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \longrightarrow \infty$$

Cependant, il existe un résultat plus général que le précédent et qui, sans exiger la continuité, donne des conditions suffisantes pour qu'on puisse, comme dans (4.7), intervertir les limites suivant n et suivant x sans changer le résultat final, lequel est souvent appelé à juste titre *double limite*. Il permet d'obtenir de nombreuses identités non évidentes en Analyse.

Théorème 4.11 (Double limite) *Si (f_n) est une suite de fonctions qui converge uniformément sur un intervalle I, et si, pour un certain $a \in I$ avec la possibilité $a = \infty$, $f_n(x)$ converge vers une limite finie quand $x \to a$, pour tout n, alors*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) \tag{4.9}$$

Par ailleurs, on peut savoir qu'une suite de fonctions continues est uniformément convergente vers une fonction continue si ladite suite est monotone.

Théorème 4.12 (Dini) *Soit (f_n) une suite de fonctions continues convergeant vers une fonction continue f sur $[a, b]$. Si la suite (f_n) est non-décroissante, i.e.*

$$\forall x \in [a, b], \forall n : \; f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$$

Alors la convergence est uniforme.

Remarque 4.13 *Notons que l'hypothèse que l'intervalle de définition $[a, b]$ soit fermé (compact) est nécessaire. Par exemple, prenons les fonctions*

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1}, \quad x \in (0, 1)$$

Nous avons $f_n \longrightarrow 0$ mais, clairement, la convergence sur $(0, 1)$ n'est pas uniforme.

Enfin, nous avons une condition nécessaire et suffisante pour la convergence uniforme des fonctions continues, à savoir l'**équicontinuité**.

Théorème 4.14 (Critère de Cauchy uniforme) *Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ et convergeant simplement vers f. Pour que cette convergente soit uniforme, il faut et il suffit que ladite suite soit uniformément de Cauchy sur $[a, b]$, on dit aussi* ***équicontinue*** *:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n, \forall x, y \in [a, b] : \; |x - y| < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \tag{4.10}$$

4.4 Suites de fonctions intégrables

Comme pour la continuité, il s'agit ici de savoir si l'on peut permuter l'intégration et la limite d'une suite de fonctions intégrables. Considérons d'abord la fonction de

Dirichlet $\varphi = [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Maintenant ordonnons les rationnels de $[0,1]$ en une suite (x_n) et posons $E_n = \{x_1, \dots, x_n\}$. Soit (f_n) une suite de fonction définie par $f_n = \mathbb{1}_{E_n}$, la fonction indicatrice de l'ensemble E_n.

Les fonctions f_n sont intégrables puisque l'ensemble de leur points de discontinuité est fini, en l'occurrence E_n. En même temps, il est évident que la limite ponctuelle de la suite (f_n) est φ qui n'est clairement pas intégrable. Ainsi, la convergence simple ne conserve pas l'intégrabilité. Cependant, on va voir que la convergence uniforme, sans être une condition nécessaire, suffit à garder à la limite le caractère d'intégrabilité.

Théorème 4.15 *Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur $[a,b]$ et convergeant uniformément vers f. Alors f est intégrable sur $[a,b]$, et on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \tag{4.11}$$

Remarque 4.16 *La condition de la convergence uniforme de la suite (f_n) vers f est suffisante mais pas nécessaire pour que (4.11) soit vraie, comme on peut le voir dans l'exemple suivant. Considérons la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,1]$, définie par*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x = 0, \\ 1 & \textit{si } 0 < x < 1/n, \\ 0 & \textit{si } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Il est clair que $\lim f_n = f = 0$, mais la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$ car $\forall n :\ \sup f_n = 1$. Cependant, nous avons

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

<u>Exemple</u> **4.17** Considérons la suite

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$$

Le même raisonnement de l'Exemple **??** montre que (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[0, b]$ vers e^{-x^2}. Ce qui, par le Théorème 4.15, entraine que

$$\forall b > 0 : \lim_{n\to\infty} \int_0^b \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x = \int_0^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Maintenant, choisissons $\varepsilon > 0$. Nous avons pour tout b assez grand

$$\left| \int_0^\infty \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x - \int_0^b \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et d'un autre côté,

$$\left| \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Il en résulte par l'inégalité triangulaire que pour n assez grand,

$$\left| \int_0^\infty \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x - \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

Par conséquent, nous obtenons que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Et par l'Exercice **??**, il vient que

$$\lim_{n\to\infty} \int^\infty 0 \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ainsi, nous avons

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \tag{4.12}$$

○

Le Théorème 4.15 entraîne directement la conséquence suivante.

Corollaire 4.18 *Posons $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in [a, b]$. Alors, on a*

$$\|f_n - f\| \longrightarrow 0 \Longrightarrow \|F_n - F\| \longrightarrow 0$$

Cette remarque nous mène donc à la définition suivante. Les fonctions f_n étant intégrables sur la droite réelle, on dit que f_n **converge en moyenne** vers f (on dira plus tard converge en L^1) si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x \longrightarrow 0 \tag{4.13}$$

Ce qui sous-entend que f est aussi intégrable. En effet, nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_n(x)| \, \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)| \, \mathrm{d}x$$

Or, par hypothèse, la première intégrable à droite tend vers 0 et la seconde est finie.

Comme on a

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) - f(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x,$$

la convergence en moyenne implique alors que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \, \mathrm{d}x \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$$

<u>Exemple</u> **4.19 (Pavé glissant)** Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0, \infty)$ par

$$f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}(x)$$

Pour $x \geq 0$ fixé, nous avons clairement $f_n(x) = 0$ pour n assez grand ($n > x$). Ainsi $f_n \longrightarrow f = 0$. Nous avons donc

$$\int \lim f_n \, \mathrm{d}x = \int f \, \mathrm{d}x = 0,$$

mais clairement pour tout $n > 0$,

$$\int f_n \, \mathrm{d}x = 1 = \text{surface du pavé}$$

Donc

$$\lim \int f_n \, \mathrm{d}x = \lim 1 = 1$$

Nous voyons ici que la limite de l'intégrale est différente de l'intégrale de la limite. La convergence simple n'entraîne pas la convergence en moyenne. ○

4.5 Suites de fonctions dérivables

Il reste la question de dérivabilité : est-elle conservée à la limite d'une suite de fonctions dérivables. En même temps, si $f_n \longrightarrow f$, est-ce que l'on a $f_n' \longrightarrow f'$?!

Considérons la suite (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

Nous avons

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

Ainsi la suite converge uniformément vers $f = 0$. Cependant, $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx \neq 0$. Nous voyons alors que la suite (f_n') est partout divergente.

Cette exemple nous apprend que si une suite (f_n) de fonctions dérivables converge, même uniformément, vers une fonction f dérivable sur $[a, b]$, il est généralement faux que la suite (f_n') converge vers f'. Toutefois, nous avons le théorème suivant qui donne des conditions suffisantes pour que ce phénomène soit vrai.

Théorème 4.20 *Soit (f_n) une suite de fonctions continûment dérivables sur $[a, b]$ vérifiant les propriétés :*

(i) la suite (f_n') converge uniformément sur $[a, b]$,

(ii) il existe un point $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ soit convergente.

Alors la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction continûment dérivable f et on a

$$\lim f_n' = (\lim f_n)' \tag{4.14}$$

En fait, nous pouvons alléger les conditions du Théorème 4.20 et ce en exigeant seulement que les fonctions f_n soient dérivables sur $[a, b]$. L'intérêt de donner un résultat plus général après un premier plus exigeant est de connaître deux démonstrations intéressantes :

Théorème 4.21 *Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables sur un intervalle non trivial I. On suppose que (f_n) converge simplement vers f sur I et que (f_n') converge uniformément sur I. Alors f est dérivable sur I et on a*

$$\lim f_n' = f' = (\lim f_n)' \tag{4.15}$$

En outre, la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur toute partie bornée de I.

5 Séries numériques

5.1 Définitions

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Posons

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Alors, (s_n) constitue une nouvelle suite associée à la première, appelée **suite des sommes partielles**. On appelle **série numérique** de terme général u_n, le couple (u_n, s_n) que l'on note simplement $\sum u_n$.

Si (u_n) est à support fini i.e. ses éléments non nuls sont d'un nombre fini, la somme des u_n existe bien évidemment. Nous cherchons à connaitre des cas où la somme des u_n existe, autrement dit donner un sens précis au $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

On dit que la série $\sum u_n$ **converge** ssi la suite (s_n) converge dans $\mathbb{R}$, sinon on dit que la série $\sum u_n$ **diverge**. Lorsque la série $\sum u_n$ est convergente, le nombre $s = \lim_n s_n$ s'appelle **somme de la série** $\sum u_n$, et est noté $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ (la lettre n jouant ici le rôle d'un indice muet), et la suite (r_n) définie par $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ s'appelle **suite des restes** de la série $\sum u_n$. Pour n donné, nous dirons que r_n est le reste d'ordre n. Clairement, une série $\sum u_n$ converge ssi la suite des restes (r_n) converge vers 0.

Remarquons que nous considérons ici que des séries à termes réels en rappelant l'étude des suites complexe revient à celle des suites numérique (voir (**??**)).

Nous appelons **somme de deux séries** $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série de terme général $(u_n + v_n)$ et nous écrivons

$$\sum u_n + \sum v_n = \sum (u_n + v_n).$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle **produit** de la série $\sum u_n$ par le nombre λ la série de terme général (λu_n) :

$$\lambda \sum u_n = \sum \lambda u_n.$$

Pour les opérations que nous venons de définir, nous vérifions facilement que l'ensemble des séries à termes réels est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'élément neutre de cette ensemble est bien évidemment la série de terme général 0. Le sous-ensemble des séries convergentes constitue un sous-espace vectoriel.

Il reste à définir le produit des séries. Ce que nous laissons à la fin de notre développement (cf. Section 5.6).

5.2 Propriétés élémentaires

L'étude d'une série revient à connaitre sa nature (convergente ou divergente), puis à calculer sa somme en cas de convergence. Nous commençons par le résultat basique suivant donne une condition nécessaire de convergence.

Théorème 5.1 *Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.*

Remarque 5.2 *La condition $\lim_n u_n = 0$ n'est pas suffisante. Par exemple, la série $\sum 1/n$, dite harmonique, est divergente (voir plus bas l'Exemple 5.8 (4) ou les séries de Riemann) encore que $\lim 1/n = 0$.*

On peut avoir à considérer les séries $\sum_{n=k}^{\infty} u_n$ avec k quelconque. Une telle série se ramène à la forme de la définition $\sum_{m=0}^{\infty} v_m$ à l'aide du changement de variable : $n = k+m, v_m = u_{k+m}$. En même temps, la nature d'une série est celle de n'importe lequel des ses restes. Ceci est donné dans le théorème suivant.

Théorème 5.3 *Nous avons*

(i) $\sum u_n$ *est convergente* $\Longrightarrow \forall k : \sum_{n\geq k} u_n$ *est convergente.*

(ii) $\exists k : \sum_{n\geq k} u_n$ *est convergente* $\Longrightarrow \sum u_n$ *est convergente.*

(iii) $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente* $\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \sum_{n\geq k} u_n = 0$.

Exercice 5.4 Montrer que la nature d'une série ne change pas si l'on modifie un nombre fini de ses termes.

Le théorème suivant nous donne un critère de convergence usuel sans parler de la valeur de la somme elle-même.

Théorème 5.5 (Critère de Cauchy) *Pour que la série $\sum u_n$ converge, il faut et il suffit que la suite (s_n) soit une suite de Cauchy, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, \forall m : n > N \text{ et } m > N \Longrightarrow |s_n - s_m| < \varepsilon. \tag{5.1}$$

Remarque 5.6 *Il est plus commode de considérer la proposition suivante qui est équivalente à (5.1) :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, \forall p : n > N \Longrightarrow \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon. \tag{5.2}$$

Exercice 5.7 Déduire le Théorème 5.1 en appliquant le critère de Cauchy.

Exemple **5.8** La série à termes constants ($\sum c$) est convergente ssi $c = 0$. En effet, le Théorème 5.1 nous dit que $\lim u_n = 0$. D'autre part, il est clair que si tous les termes sont nuls, alors la somme de la série est nulle.

Exemple **5.9** (**Série harmonique**) La série dite **harmonique** $\sum 1/n$ est divergente. En effet, pour $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

Ce qui contredit le critère de Cauchy. En prenant $\varepsilon = 1/2$ et en posant $p = n = N$ pour tout N, la négation du critère de Cauchy est vérifiée :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N, \exists n, \exists p : n \geq N \text{ et } \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| > \varepsilon$$

○

Exemple **5.10** (**Série géométrique**) Considérer la série dite géométrique $\sum a^n$ pour $a \in \mathbb{R}$. Si $a = 1$, c'est une série constante, donc divergente. Si $a \neq 1$, nous avons

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Alors, si $|a| > 1$, la série diverge puisque

$$\left| \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \right| \to \infty$$

Et sinon, la série converge vers

$$\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \to \frac{1}{1 - a}$$

○

Le résultat suivant permet de ramener l'étude d'une série à celle d'une suite :

Théorème 5.11 *La suite numérique (v_n) est convergente si, et seulement si, la série $\sum u_n$ où $u_n = v_n - v_{n-1}$ pour $n \geq 1$, $u_0 = v_0$, est convergente.*

Remarque 5.12 *Nous avons pu voir que l'étude d'une série se ramène théoriquement à celle de la suite de ses sommes partielles. Cependant, en pratique, on ne fait pas appel à s_n ; on cherche à reconnaître la nature de la série d'après le comportement des termes de la suite (u_n).*

<u>Exemple</u> **5.13** Le Théorème 5.11 peut être utilisé dans l'étude de l'Exemple 5.8-(2) avec
$$v_n = \log(n+1), \quad n = 1, 2, \ldots.$$
On peut aussi appliquer le théorème pour la série $\sum 1/[n(n+1)]$. ○

5.3 Séries à termes positifs.

Comme pour les suites numériques, nous avons le cas important des séries à termes non négatifs. Comme les termes nuls dans la somme d'une série peuvent être négligés, nous pouvons dire simplement séries à termes positifs.

5.3.1 Condition de convergence et commutativité

Une série à termes positifs est caractérisée par la propriété essentielle suivante.

Théorème 5.14 *Pour qu'une série à termes positifs soit convergente il faut et il suffit que la suite des sommes partielles soit majorée.*

<u>Exemple</u> **5.15** Considérons la série $\sum 1/n^2$. Pour tout $n \geq 1$, nous avons
$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$
d'où
$$s_n \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$
Ainsi la série est convergente ○

Est-ce qu'une somme infinie est commutative ? ! Nous allons voir maintenant que la réponse est positive pour les séries à termes positifs. Cependant, nous verrons plus bas que cela n'est pas vrai pour une série quelconque.

Théorème 5.16 *Soit* $\sum u_n$ *une série non négative convergente. Soit* $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une bijection. Alors,* $\sum u_{k(n)}$ *est convergente et nous avons*

$$\sum u_n = \sum u_{k(n)}$$

5.3.2 Règles de comparaison

Nous pouvons connaître la nature d'une série à termes positifs en comparant ses éléments avec ceux d'une autre série connue.

Théorème 5.17 *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs vérifiant, à partir d'un certain rang,* $u_n \leq v_n$*. Alors, on a*

$$\sum v_n < \infty \Longrightarrow \sum u_n < \infty$$

et inversement,

$$\sum u_n = \infty \Longrightarrow \sum v_n = \infty$$

De plus, si $u_n \leq v_n$ *pour tout* n*,* (*on dira que la série* $\sum u_n$ *est majorée par* $\sum v_n$)*, on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

<u>Exemple</u> **5.18** La série $\sum 1/\sqrt{n}$ est divergente par comparaisons avec la série harmonique $\sum 1/n$. ○

Plus généralement, nous avons

Théorème 5.19 *Soit* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs.*

(*i*) *S'il existe deux constantes* $a > 0, b > 0$ *et un naturel* k *tels que*

$$\forall n \geq k : a \leq \frac{u_n}{v_n} \leq b \tag{5.3}$$

alors les deux séries sont de même nature.

(*ii*) *S'il existe* $\ell > 0$ *tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell, \tag{5.4}$$

alors les deux séries sont de même nature.

<u>Exemple</u> **5.20** Soit la série

$$\sum \sin(2\pi\sqrt{n^2+1})$$

Observons que

$$2\pi\sqrt{n^2+1} = 2\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = 2\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+o(n^{-2})\right) = \frac{\pi}{n}+o(n^{-1})$$

De ce fait, nous avons

$$\lim \frac{\sin(2\pi\sqrt{n^2+1})}{\pi/n} = 1$$

Ainsi, par comparaison avec la série harmonique, notre série diverge. ○

Enfin, nous pouvons être moins exigeant et comparer juste les fractions successives des termes des séries.

Théorème 5.21 *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si à partir d'un certain rang, nous avons*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

alors

$$\sum v_n < \infty \Longrightarrow \sum u_n < \infty,$$
$$\sum u_n = \infty \Longrightarrow \sum v_n = \infty.$$

5.3.3 Comparaison avec une intégrale.

Nous avons vu que l'intégrale (généralisée) est par définition la somme d'une série. Nous allons utiliser ce fait pour tirer des règles de convergence pour les séries en fonction d'intégrales qui peuvent être plus faciles à calculer.

Théorème 5.22 *Soit $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive et non-croissante. Alors, on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) < \infty \Longleftrightarrow \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < \infty$$

En outre, pour tout n, le reste de la série vérifie

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(n) \leq \int_n^{\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{5.5}$$

Remarque 5.23 *Le théorème reste vrai si, au lieu de supposer f définie sur $\mathbb{R}^+$, on considère f définie sur $[c, \infty)$ où $c > 0$.*

EXEMPLE **5.24** (**Série de Riemann**) Considérons la série dite **de Riemann** $\sum n^{-\alpha}$ avec $\alpha \geq 0$. D'après le Théorème 5.22, cette série est de même nature que l'intégrale $\int_1^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x$. Ainsi, la série converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$ (voir Exemple 2.1). En particulier, on retrouve que la série harmonique diverge et que la série $\sum 1/n^2$ converge. ○

En combinant le dernier exemple et le Théorème 5.19 de comparaison, nous obtenons une règle de comparaison avec la série de Riemann.

Théorème 5.25 (Règle de Riemann) *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Si la limite $\lim n^\alpha u_n$ existe, alors*

(i) La série $\sum u_n$ est convergente si $\alpha > 1$.

(ii) La série $\sum u_n$ est divergente si $\alpha \leq 1$.

5.3.4 Règles de convergence usuelles.

Nous allons voir ci-après quelques règles de convergence usuelles et pratiques pour les séries à termes positifs, à savoir, règles de D'Alembert, de Duhamel, de gauss, et de Cauchy.

Dans la suite des règles de comparaison que nous venons de considérer, nous avons en premier la règle suivante basée sur l'étude du comportement de la fraction u_{n+1}/u_n.

Théorème 5.26 (Règle de D'Alembert) *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors, $\sum u_n$ converge si*

$$\limsup \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

et diverge si

$$\liminf \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

Remarque 5.27 *Remarquons que la règle de D'Alembert est plus facile si la limite de D'Alembert existe, i.e. si $\lim u_{n+1}/u_n < 1$, alors $\sum u_n$ converge et si $\lim u_{n+1}/u_n > 1$, celle-ci diverge.*

Par ailleurs, cette règle est en défaut si

$$\liminf \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \leq \limsup \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

ou plus particulièrement si

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

C'est en effet le cas pour les deux séries déjà traitées $\sum 1/n$ *et* $\sum 1/n^2$*, lesquelles sont respectivement divergente et convergente alors que la "limite de D'Alembert" donne* $\lim u_{n+1}/u_n = 1$.

<u>Exemple</u> **5.28** La série $\sum n!/n^n$ est convergente par la règle de D'Alembert. En effet,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \longrightarrow e^{-1}.$$

○

Quand la règle de D'Alembert est en défaut, la règle suivante peut donner la nature de la série en question.

Théorème 5.29 (Règle de Raabe-Duhamel) *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs. Alors,* $\sum u_n$ *converge si*

$$\liminf n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > 1$$

et diverge si

$$\limsup n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) < 1$$

Remarque 5.30 *La règle de Duhamel est un raffinement de la règle du D'Alembert mais elle n'apporte pas de réponse pour le cas où*

$$\liminf n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leq 1 \leq \limsup n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

ce qui se produit en particulier quand

$$\lim n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1$$

Ceci est le cas des deux séries de Bertrand $\sum (n \log n)^{-1}, \sum n^{-1}(\log n)^{-2}$ *alors que la première diverge et la seconde converge (Reportez-vous à la section précédente sur la comparaison avec une intégrale).*

Dans la pratique, il peut être plus facile d'utiliser le corollaire immédiat de la règle de Raabe-Duhamel :

Corollaire 5.31 *Si on a*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\ell}{n} + o(n^{-1}) \tag{5.6}$$

alors la série $\sum u_n$ *converge si* $\ell > 1$ *et diverge si* $\ell < 1$.

Exemple **5.32** Considérons la série

$$\sum \left[\frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times \cdots \times (2n)}\right]^2.$$

Il est facile de voir que la règle de D'Alembert est en défaut. Cependant, la règle de Duhamel nous donne

$$\lim n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim n\left(1 - \left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^2\right) = 2.$$

Par conséquent, la série diverge. ○

Encore mieux que ça, si la règle de Raabe-Duhamel est en défaut, il est possible d'arriver à la nature de la série en question par la règle suivante.

Théorème 5.33 (Règle de Gauss) *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs. Supposons que*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\ell}{n} + O(n^{-2})$$

Alors la série $\sum u_n$ *converge si* $\ell > 1$ *et diverge si* $\ell \leq 1$.

Exemple **5.34** (Série hypergéométrique) Considérons la série dite hypergéométrique $\sum u_n a^n$ où $a > 0$ et

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$$

avec $u_0 = 1$ et $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

Nous avons

$$\frac{u_{n+1}a^{n+1}}{u_n a^n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}\, a \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

Ce qui, par la règle de D'Alembert, montre que notre série est convergente si $a < 1$ et divergente si $a > 1$.

Intéressons-nous maintenant au cas $a = 1$ qui met la règle de D'Alembert en défaut. Observons que

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{u_{n+1}} &= \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)} = \frac{(1+1/n)\,(1+\gamma/n)}{(1+\alpha/n)\,(1+\beta/n)} \\ &= \frac{1+(\gamma+1)/n+\gamma/n^2}{1+(\alpha+\beta)/n+\alpha\beta/n^2} \\ &= \left(1+(\gamma+1)/n+\gamma/n^2\right)(1-(\alpha+\beta)/n+o(1/n)) \\ &= 1+\frac{\gamma+1-(\alpha+\beta)}{n}+O(n^{-2})\end{aligned}$$

Ainsi, par la règle de Gauss, la série géométrique est convergente si $\gamma > \alpha+\beta$, sinon divergente. ○

Il existe des situations où on est plus tenté de comparer les termes de la série en question avec une série géométrique. Et là, il est plus intéressant d'utiliser la règle suivante.

Théorème 5.35 (Règle de Cauchy) *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors, $\sum u_n$ converge si*

$$\limsup \sqrt[n]{u_n} < 1$$

et diverge si

$$\limsup \sqrt[n]{u_n} > 1$$

Remarque 5.36 *Ici aussi, nous ne pouvons pas connaitre la nature de la série si $\limsup \sqrt[n]{u_n} = 1$ comme le montre les deux séries connues $\sum 1/n$ et $\sum 1/n^2$. En même temps, notons qu'il est plus facile d'utiliser la règle de Cauchy si*

$$\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell$$

Dans ce cas, si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge et si $\ell > 1$, elle diverge.

<u>Exemple</u> **5.37** La série $\sum (n/(2n+1))^n$ est convergente d'après la règle de Cauchy car

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

○

Nous terminons par un résultat qui montre le lien entre les deux limites de D'Alembert et de Cauchy.

Théorème 5.38 *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs. Si la limite* $\lim_n u_{n+1}/u_n$ *existe alors on a*

$$\lim_n \sqrt[n]{u_n} = \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

<u>Exemple</u> **5.39** Appliquons cette dernière remarque à l'étude de la série suivante

$$\sum u_n = 1 + a + ab + a^2b + \cdots + a^nb^{n-1} + a^nb^n + \cdots ,$$

où $0 < a < b < 0$.

La règle de D'Alembert ne s'applique pas pour cette série. En effet, on

$$\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}} = a, \quad \frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = b.$$

Ainsi, la limite de D'Alembert n'existe pas. Toutefois, la règle de Cauchy nous donne

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \sqrt{ab}.$$

La série est donc convergente si $ab < 1$ et divergente si $ab > 1$. Si $ab = 1$, la série diverge car dans ce cas le terme général ne tend pas vers zéro. ○

5.4 Séries alternées.

Au lieu des séries à termes positifs, nous pouvons nous intéresser à des séries dont les termes sont de signes alternés. On appelle **série alternée** une série qui s'écrit sous la forme $\sum(-1)^n v_n$ où $(v_n) \subset \mathbb{R}_+$.

Avant de donner le résultat fondamental qui donne une règle de convergence des séries alternées, nous devons d'abord connaître une règle générale pour la convergence des séries qui est équivalente à la règle d'Abel pour les intégrales.

Théorème 5.40 (Règle d'Abel) *Soit* (u_n) *et* (v_n) *deux suites numériques telles que les sommes partielles de la première sont bornées et la seconde est à variation bornée, i.e.*

$$\exists M > 0, \forall n : \quad \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq M$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} |v_{n+1} - v_n| < \infty$$

en plus,

$$\lim v_n = 0$$

Alors, $\sum u_n v_n$ *est convergente.*

EXEMPLE **5.41** Considérons la série

$$\sum \frac{\sin(nx)}{n^{\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

Observons en premier que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha}} = 1 - \frac{1}{n^{\alpha}} \leq 1$$

Ainsi, $(n^{-\alpha})$ est à variation bornée et tend vers 0.

D'un autre côté, nous avons

$$|\sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx)| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

En effet, cela découle de la remarque suivante et des propriétés des fonctions sin et cos,

$$|e^{ix} + e^{i2x} + \cdots + e^{inx}| = \left| \frac{e^{ix}(1 - e^{inx})}{1 - e^{ix}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|}$$

Par conséquent, la règle d'Abel est vérifiée pour notre série qui est donc convergente. ○

Plus facile que la présente règle d'Abel, nous avons une conséquence immédiate.

Corollaire 5.42 *Si $\sum u_n$ est convergente et que (v_n) est une suite monotone et bornée, alors $\sum u_n v_n$ est convergente*

Revenons aux séries alternées.

Théorème 5.43 *Soit (v_n) une suite positive et décroissant vers zéro. Alors la série alternée $\sum(-1)^n v_n$ est convergente et nous avons*

$$\forall n : |r_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k v_k \right| \leq v_{n+1}. \tag{5.7}$$

Remarque 5.44 *Sous les conditions du Théorème 5.43, l'inégalité (5.7) permet d'évaluer l'erreur commise lorsque l'on remplace la somme de la série alternée par sa somme partielle.*

EXEMPLE **5.45** Le première exemple des série alternées convergentes est la série du type $\sum(-1)^n n^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$. ○

5.5 Convergence absolue et semi convergence

Après avoir connu les séries à termes positifs, il est naturel de se poser la question sur la convergence des valeurs absolues d'une série quelconque. Ainsi, on dit qu'une série de termes réelles quelconques $\sum u_n$ est **absolument convergente** si $\sum |u_n|$ est convergente. Et on dit qu'une série est **semi convergente** si elle est convergente sans être absolument convergente. Ce phénomène est possible comme pour la série alternée $\sum(-1)^n/n$.

Les critères de convergence des séries positives restent clairement tout aussi vrais pour la convergence absolue des séries. En plus, nous avons le résultat important suivant.

Théorème 5.46 *Toute série absolument convergente est convergente.*

Remarque 5.47 *L'ensemble des séries absolument convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des séries convergentes. Ceci est vérifiable par le critère de Cauchy.*

Par ailleurs, à propos de la commutativité des termes d'une série, nous avons un résultat plus général que le Théorème 5.16.

Théorème 5.48 *Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Soit $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Alors, $\sum u_{k(n)}$ est absolument convergente et nous avons*

$$\sum u_n = \sum u_{k(n)}$$

Cependant, on perd la commutativité si la série n'est pas absolument convergente.

Théorème 5.49 *Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente. Alors, pour tout $c \in \mathbb{R}$, il existe une permutation $k(n)$ des entiers naturels tels que*

$$\sum u_{k(n)} = c$$

En outre, on peut trouver une permutation $k(n)$ telle que

$$\left|\sum u_{k(n)}\right| = \infty$$

Remarque 5.50 *Ce résultat montre que la convergence absolue est nécessaire à la commutativité des termes d'une série donnée. Néanmoins, une série semi-convergente peut par permutation être convergente sans avoir la même somme de l'ordre premier des termes de la série.*

<u>Exemple</u> **5.51** Considérons la série alternée $\sum u_n = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}1/n$. Nous savons qu'elle est convergente. Permutons les termes de cette série de la façon suivante

$$\sum v_n :== 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \cdots$$

La somme partielle de la nouvelle série est alors donnée par

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

D'où, par passage à la limite, il vient que

$$\sum v_n = \frac{\sum u_n}{2}$$

○

5.6 Produit de convolution

Il reste à nous intéresser au produit des séries. Comment peut-on les multiplier ? ! Soit deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Définissons

$$u_n * v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \tag{5.8}$$

Notons qu'il est possible de ne pas commencer la somme à 0. Nous appelons **produit de convolution** (ou de Cauchy) la série donnée par

$$\sum u_n * \sum v_n = \sum u_n * v_n \tag{5.9}$$

Le résultat suivant justifie cette définition.

Théorème 5.52 *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries absolument convergentes, alors $\sum u_n * \sum v_n$ est absolument convergente et on a*

$$\sum u_n * \sum v_n = \sum u_n \times \sum v_n \tag{5.10}$$

Remarque 5.53 *Ce résultat ne s'étend pas aux séries semi-convergentes. Prenons par exemple*

$$u_n = v_n = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

Il est facile de voir que cette série alternée est convergente. Cependant, le produit de convolution est définie par le terme générale

$$u_n * v_n = (-1)^{n+1} \sum_{i+j=n+1} \frac{1}{\sqrt{i}\sqrt{j}}$$

Or, il est facile de voir que

$$\sqrt{i}\sqrt{j} \leq n+1$$

D'où, il vient que

$$|u_n * u_n| \geq 1$$

Par conséquent, il est impossible que $\sum u_n * u_n$ *converge.. Toutefois, si l'une des deux séries est absolument convergente et l'autre semi-convergente, on montre (cf. Exercice* **??**) *que le produit de convolution est convergent vers le produit des deux séries.*

<u>Exemple</u> **5.54** Nous avons pour tout x,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

En plus, c'est là une série absolument convergente par le critère de D'Alembert. Par ailleurs, remarquons que pour $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x^n}{n!} * \frac{y^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

où nous avons utilisé la formule du binôme. De ce fait, nous obtenons que

$$\sum \frac{x^n}{n!} * \sum \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}$$

Or, par le Théorème 7.8,

$$\sum \frac{x^n}{n!} * \sum \frac{y^n}{n!} = \sum \frac{x^n}{n!} \sum \frac{y^n}{n!} = e^x e^y$$

Ainsi, nous avons prouvé que

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

○

6 Séries de fonctions

6.1 Définitions et propriétés générales

Nous allons étendre des définitions déjà connues pour les séries numériques et les suites de fonction. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles définies sur un ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}$. Posons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_n$$

On appelle **séries de fonctions** (sur E) de terme général f_n la suite des sommes partielles (S_n) que l'on note par $\sum f_n$. D'un autre côté, soit

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n$$

C'est le reste d'ordre n de la série. On alors

$$\sum f_n = S_n + R_n$$

Une série $\sum f_n$ est dite (simplement) **convergente** en $x \in E$ si la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente, ce qui est équivalent à ce que la suite $(S_n(x))$ soit convergente. On dit que la série converge sur E si elle est convergente en tout point de E. Dans ce dernier cas, la fonction $S : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$S(x) = \lim_n S_n(x) = \sum f_n(x)$$

est appelée somme de la série.

<u>Exemple</u> **6.1** Considérons $\sum x^n$. Pour tout $x \in (-1, 1)$, nous avons là une série géométrique convergente telle que

$$\lim_n S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

○

De manière similaire aux séries numériques, si la série $\sum f_n$ est convergente sur E, alors n'importe lequel de ses restes d'ordre k, soit $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n$, est une série convergente sur E. Et nous avons

$$S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S(x) \Longleftrightarrow R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On dit que $\sum f_n$ est **absolument convergente** sur E si la série $\sum |f_n|$ est convergente sur E. Notons que toute série de fonctions absolument convergente sur E est convergente sur E. Par exemple, la série géométrique $\sum x^n$ est absolument convergente sur $(-1,1)$.

Quant aux opérations algébriques dans l'ensemble des séries de fonctions, cela découle immédiatement des opérations déjà définies pour les séries numériques. Ainsi, étant données deux séries de fonctions $\sum f_n$ et $\sum g_n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on définit la somme ou combinaison linéaire de ces dernières par

$$\lambda \sum f_n + \mu \sum g_n = \sum \lambda f_n + \mu g_n \tag{6.1}$$

Et, on définit le produit de séries de fonctions comme dans la Section 5.6. Soit deux séries $\sum f_n$ et $\sum g_n$. On appelle **produit de convolution** (ou de Cauchy) de f_n et g_n la fonction donnée par

$$(f * g)_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}$$

Ainsi, le produit de convolution des séries $\sum f_n$ et $\sum g_n$ est défini par

$$\sum (f * g)_n \tag{6.2}$$

Si $\sum f_n$ et $\sum g_n$ sont absolument convergentes sur E, nous avons alors que leur produit de convolution est encore une série absolument convergente sur E, et de plus, on a

$$\sum (f * g)_n = \sum f_n \sum g_n$$

<u>Exemple</u> **6.2** Considérons les deux séries absolument convergentes sur $(-1,1)$

$$\sum f_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum g_n = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+1)} = 2x$$

Nous avons alors

$$\sum (f * g)_n = \frac{2x}{1-x}$$

○

Une série $\sum f_n$ avec $f_n : E \to \mathbb{R}$, est dite **uniformément convergente** sur E si la suite (S_n) est uniformément convergente sur E, ou de manière équivalente si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N : \quad \sup_{x \in E} |R_n(x)| < \varepsilon \tag{6.3}$$

<u>Exemple</u> **6.3** (**Série géométrique**) Considérons la même série géométrique de terme général $\sum x^n$ définie sur $(-1,1)$. Nous savons que pour tout $x \in (-1,1)$, la série numérique $\sum x^n$ est convergente vers $1/(1-x)$. Cependant, la convergence n'est pas uniforme sur $(-1,1)$ car

$$\sup_{x \in (-1,1)} \left| S_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| = \lim_{x \to 1_-} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| = \infty$$

Par contre, la série $\sum x^n$ est uniformément convergente sur $[-a,b] \subset (-1,1)$. En effet, posons $c = a \vee b, d = a \wedge b$, respectivement la plus grande et la plus petite valeurs de a et b. Nous avons pour tout $x \in [a,b]$, le reste d'ordre n,

$$|R_n(x)| = \left|x^{n+1}\right| \left| \sum_{n \geq 0} x^n \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| \leq \frac{c^{n+1}}{1-d} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

○

Ici, nous avons aussi le **critère de Cauchy** pour la convergence uniforme des séries.

Théorème 6.4 *Pour qu'une série $\sum f_n$ soit uniformément convergente sur E, il faut et il suffit que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \geq 1 : \sup_{x \in E} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon \tag{6.4}$$

<u>Exemple</u> **6.5** Soit la série de fonctions $\sum x^{-n}$. Nous voyons facilement que c'est une autre écriture de la série géométrique en posant $y = 1/x$. Ainsi, elle est convergente sur $\mathbb{R} \setminus (-1,1)$ vers

$$\frac{1}{1 - 1/x} = \frac{x}{x-1}$$

En même temps, d'après l'exemple précédent, elle est uniformément convergente sur $\mathbb{R} \setminus (-a,a)$ pour tout $a > 1$. ○

6.2 Convergence normale

En plus des convergences simples, absolue et uniforme que nous venons de voir, nous avons un troisième type de convergence pour les séries de fonctions, à savoir la **convergence normale** : soit une série de fonctions $\sum f_n$ définies sur $E \subset \mathbb{R}$. Posons

$$\|f_n\| = \sup_{x \in E} |f_n(x)|$$

On dit que $\sum f_n$ est **normalement convergente** sur $E \subset \mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\sum \|f_n\| < \infty \tag{6.5}$$

La présente convergence est plus forte que la convergence absolue :

Proposition 6.6 *la convergence normale des séries de fonctions implique leur convergence absolue.*

<u>Exemple</u> **6.7** Soit la suite de fonction (f_n) définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}.$$

Il est facile de voir que

$$\|f_n(x)\| = \frac{1}{n^2}$$

D'où, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. ○

Les supremums des f_n ne sont généralement pas aussi faciles à connaître. C'est pourquoi on utilise une deuxième définition de la convergence normale équivalente à la première, laquelle donnée est dans le théorème suivant.

Théorème 6.8 *Une série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur E si et seulement s'il existe une série numérique non négative convergente $\sum u_n$ telle que*

$$\|f_n\| \leq u_n$$

Nous avons en plus que la convergence normale est plus forte que la convergence uniforme.

Théorème 6.9 *Si la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur E, alors elle est uniformément convergente sur E.*

Remarque 6.10 *En revanche, la convergence uniforme des séries de fonctions n'entraîne pas la convergence normale. En effet, la série considérée dans l'Exemple* **??** *est uniformément convergente sur tout intervalle* $[-1+a,\infty)$ *avec* $a>0$*, mais clairement, la même série,* $\sum(-1)^n/(n+x)$ *n'est pas normalement convergente puisqu'elle n'est même pas absolument convergente.*

Pour montrer la convergence uniforme, il existe une règle, une variante de la règle d'Abel (cf. Théorème 5.40) pour les séries de fonctions.

Théorème 6.11 (Règle d'Abel pour la convergence uniforme) *Soit* $\sum f_n g_n$ *une série de fonctions définie sur* E *telle que*

$$\exists M>0, \forall n: \quad \sup_{x\in E}\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \leq M$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|g_{n+1}-g_n\| < \infty \tag{6.6}$$

en plus,

$$\lim \|g_n\| = 0 \tag{6.7}$$

Alors, $\sum f_n g_n$ *est uniformément convergente.*

6.3 Continuité, intégration et dérivation

Nous nous intéressons dans cette partie aux problèmes de continuité, d'intégration et de dérivation des séries de fonctions. Les résultats concernant les suites de fonctions vus précédemment appliquées aux suites des sommes partielles entraînent des résultats similaires.

Le résultat suivant nous donne, par application directe du Théorème 4.9, une condition suffisante pour obtenir la continuité d'une somme de fonctions continues.

Théorème 6.12 *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions définies et continues sur un intervalle* $I\subset\mathbb{R}$*. Si* $\sum f_n$ *est uniformément convergente sur* I*, la somme de cette série est continue sur* I *et pour tout* $a\in I$*, on a*

$$\lim_{x\to a}\sum f_n(x) = \sum \lim_{x\to a} f_n(x) \tag{6.8}$$

<u>Exemple</u> **6.13** Reprenons la série de l'Exemple 6.7,

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$$

C'est là une série de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ convergeant normalement, donc uniformément. Par conséquent, la somme est continue sur $\mathbb{R}$. ○

Comme dans le Théorème 4.15, nous avons ici une condition suffisante pour conserver à la limite, l'intégrabilité de la somme partielle d'une série de fonctions intégrables.

Théorème 6.14 *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions intégrables sur un intervalle borné et fermé $[a,b]$. Si la série converge uniformément sur $[a,b]$, la somme de la série est intégrable sur $[a,b]$ et on a*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x. \tag{6.9}$$

En fait, on a que $\sum_n \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$ converge uniformément sur $[a,b]$ ver $\int_a^x \sum f_n(t)\mathrm{d}t$.

<u>Exemple</u> **6.15** En vertu de l'Exemple 6.3 sur les séries géométriques, la série suivante converge uniformément sur tout intervalle $[a,b] \subset (-1,1)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

Nous avons alors

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

○

Nous pouvons généraliser le Théorème 4.20 sur la dérivation des suites de fonctions aux séries de fonctions de la manière suivante.

Théorème 6.16 *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions réelles définies et dérivables sur un intervalle borné et fermé $[a,b]$. S'il existe un point $x_0 \in [a,b]$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ converge et que la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$, la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est dérivable sur $[a,b]$ et sa dérivée est donnée par*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)$$

EXEMPLE **6.17** Reconsidérons la série de l'Exemple **??**,

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+x}, \quad x \in (-1, \infty)$$

Les termes f_n de cette série sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $(-1, \infty)$, et pour tout k,

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{n+k} k!}{(n+x)^{k+1}}, \quad x > -1$$

Or,

$$\forall k, \forall x > -1 : \sum |f_n^{(k)}(x)| < \infty$$

De plus, notre série converge uniformément sur tout $[-1+a, \infty)$ avec $a > 0$. Donc, la somme $\sum f_n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $(-1, \infty)$, et pour tout k,

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \sum f_n = \sum \frac{(-1)^{n+k} k!}{(n+x)^{k+1}}$$

○

6.4 Séries entières

On appelle **série entière** (réelle) toute série de fonctions de la forme $\sum a_n x^n$ où (a_n) est une suite numérique. Le plus belle exemple est la série géométrique qui donne sur $(-1, 1)$, la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Il y a aussi la fonction exponentielle qui est (cf. Théorème **??**) définie par

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Cependant, notons qu'il est possible de faire une translation de ladite série entière à un point x_0 en considérant la série $\sum a_n (x - x_0)$, ce qui se ramène à la première forme par le changement de variables $y = x - x_0$.

6.4.1 Convergence

L'étude des séries entières repose sur le résultat fondamental suivant.

Lemme 6.18 (Lemme d'Abel) *Si une série $\sum a_n x^n$ converge en un point λ non nul, alors elle est absolument convergente sur $[-|\lambda|, |\lambda|]$.*

Nous pouvons déduire du lemme d'Abel les conséquences suivantes.

Corollaire 6.19 *Si la série $\sum a_n x^n$ diverge en λ, elle est divergente pour tout x tel que $|x| > |\lambda|$.*

En outre, nous avons :

Corollaire 6.20 *Si $\sum a_n \lambda^n$ converge, alors $\sum a_n x^n$ est normalement convergente sur $[-\lambda, \lambda]$.*

Ces derniers résultats conduisent machinalement à la définition suivante. Appelons D l'ensemble ou domaine de convergence de la série $\sum a_n x^n$. Nous définissons le **rayon de convergence** de la série entière par

$$R\left(\sum a_n x^n\right) = R = \sup_{x \in D} |x| = \sup\{|x| : \sum |a_n x^n| < \infty\} \tag{6.10}$$

L'intervalle $(-R, R)$ s'appelle **intervalle de convergence** de la série $\sum a_n x^n$.

<u>Exemples</u> **6.21** Nous avons que $R(\sum x^n) = 1$. De plus, $R(\sum x^n/n!) = \infty$. Cependant, $R(\sum n! x^n) = 0$ parce que $n!|x|^n \to \infty$ si $x \neq 0$. ○

En fait, le rayon de convergence détermine le domaine de convergence.

Théorème 6.22 *Soit $\sum a_n x^n$ avec un domaine de convergence D et un rayon de convergence R. Alors, $D = \{0\}$ ssi $R = 0$, et $D = \mathbb{R}$ ssi $R = \infty$, sinon, on a*

$$(-R, R) \subset D \subset [-R, R]$$

En outre, la série converge normalement sur tout $[a, b] \subset (-R, R)$.

Quant au comportement de la série au point R, toute éventualité est possible. Cependant, on a

Théorème 6.23 (Second lemme d'Abel) *Soit $\sum a_n x^n$ avec un rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. Si $\sum a_n R^n$ converge, alors*

$$\lim_{x \to R_-} \sum a_n x^n = \sum a_n R^n$$

Remarque 6.24 *La réciproque est fausse. Par exemple, si $a_n = (-1)^n$, alors nous avons*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1$$

Donc,

$$\lim_{x\to 1_-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

sauf que $\sum(-1)^n$ diverge.

<u>Exemple</u> **6.25** Considérons la série alternée $\sum(-1)^n x^n/n$ et observons que

$$|x| > 1 \Longrightarrow \frac{x^n}{n} \not\to 0$$

En même temps, en tant que série alternée, il est facile de voir que notre série converge si $|x| < 1$. Ainsi, son rayon de convergence est 1. En plus, $\sum(-1)^n/n$ converge aussi. Alors, par le second lemme d'Abel, nous avons que

$$\lim_{x\to 1_-} \sum(-1)^n \frac{x^n}{n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$$

Remarquons enfin que la série en question est divergente en -1. ○

Pour la détermination du rayon de convergence, on a

Théorème 6.26 (Hadamard) *Soit $\sum a_n x^n$ avec un rayon de convergence R. Alors, on a*

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{6.11}$$

<u>Exemples</u> **6.27** Soit la série $\sum x^n/n^2$. Nous avons

$$\lim_n \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{x^n} \right| = \lim_n \frac{n^2}{n^2+1} |x| = |x|$$

La série est donc absolument convergente pour $|x| < 1$. Pour $|x| > 1$, elle est évidemment divergente car

$$\lim_n \frac{|x|^n}{n^2} = \infty,$$

donc $R = 1$.

En second, étudions la série $\sum a_n x^n$ telle que

$$a_n = \frac{\big(3 + (-1)^n\big)^n}{n}$$

Comme $\sqrt[n]{n} \to 1$, nous avons

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = \limsup \big(3 + (-1)^n\big) = 4,$$

ce qui donne $R = 1/4$.

Notons ici que les règles de D'Alembert et de Cauchy ne s'appliquent pas directement sauf si l'on décide de décomposer la série en somme de deux séries suivant les puissances paires et impaires.

○

6.4.2 Continuité, dérivation et intégration

Quant à la continuité, la dérivation et l'intégration des séries entières, le théorème suivant reformule les résultats des Théorèmes 6.12–6.14 et 6.16.

Théorème 6.28 *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière, R son rayon de convergence. Alors, on a*

(i) $\sum a_n x^n$ est continue sur $(-R, R)$,

(ii) $\sum a_n x^n$ est dérivable sur $(-R, R)$ et sa dérivée donnée par

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{6.12}$$

Ce qui donne une nouvelle série entière avec le même rayon de convergence R.

(iii) $\sum a_n x^n$ est intégrable sur $(-R, R)$ et pour tout $x \in (-R, R)$,

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \tag{6.13}$$

En plus, la série obtenue par intégration possède le même rayon de convergence R.

<u>Exemple</u> **6.29** Reprenons la série géométrique $\sum x^n$ qui est converge sur $(-1, 1)$. Alors, par le Théorème 6.28, nous avons

$$\frac{-1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

et

$$-\log(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

○

Nous avons en plus quelques conséquences directes des derniers résultats.

Corollaire 6.30 *Soit $\sum a_n x^n = S(x)$ une série entière. Alors, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ à l'intérieur de son intervalle de convergence. En outre, on a*

$$\forall n : \qquad a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} \tag{6.14}$$

Preuve. Par itération du résultat (*ii*) du Théorème 6.28, nous obtenons qu'une série donnée est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle de convergence. Quant à l'égalité (6.14), il suffit de noter que

$$S^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k x^{k-n}$$

□

Par ailleurs, on a aussi

Corollaire 6.31 *Deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont égales, i.e. $a_n = b_n$ pour tout n, si elles coïncident dans un voisinage de* 0.

6.4.3 Séries de Taylor

Quant peut-on développer une fonction donnée en série entière, en ce sens l'écrire sous la forme $\sum a_n x^n$?

Nous venons de voir dans le Théorème 6.28 que la somme $S(x)$ d'une série entière est infiniment dérivable dans son intervalle de convergence et qu'elle est alors donnée sous la forme

$$S(x) = \sum \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Le problème inverse qui se pose alors, c'est de reconnaitre si une fonction f infiniment dérivable, peut être représentée sous cette forme dans un voisinage de zéro ?

Soit f une fonction infiniment dérivable dans un voisinage de zéro. Nous avons ladite **série de Taylor** ou **de Maclaurin**,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Généralement, une fonction f infiniment dérivable n'admet pas de développement en série de Taylor au voisinage d'un point donné comme le montre l'exemple suivant.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

C'est là une fonction infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Cependant, la représentation en série de Taylor n'est possible dans aucun voisinage de zéro, car

$$\forall n : f^{(n)}(0) = 0$$

La série de Taylor est donc nulle en tout point alors que f n'est nulle qu'en zéro.

La formule de Taylor peut nous aider à déterminer une condition **nécessaire et suffisante** permettant de représenter une fonction par sa série de Taylor avec reste de Lagrange. Nous rappelons ici la formule de Taylor pour une fonction f dérivable n fois dans un voisinage de zéro $(-r, r)$ et telle que $f^{(n)}$ est continue sur $(-r, r)$ et dérivable dans $(-r, r)$. Alors, pour tout $x \in (-r, r)$, nous avons que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

où

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$\theta \in (0, 1)$ est une valeur qui dépend de x.

Théorème 6.32 *Soit f une fonction infiniment dérivable dans un voisinage de zéro $(-r, r)$. Pour que f soit développable en série de Taylor dans $(-r, r)$, i.e.*

$$\forall x \in (-r, r) : \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

il faut et il suffit que le reste $R_n(x)$ dans la formule de Taylor tende vers zéro quand n tend vers l'infini, i.e.

$$\forall x \in (-r, r) : \qquad \lim_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) = 0$$

où $\theta \in (0, 1)$.

Le résultat suivant fournit une condition suffisante pour qu'une fonction soit développable en série de Taylor.

Théorème 6.33 *Soit f une fonction infiniment dérivable dans $(-r,r)$. S'il existe une constante $M>0$ telle que pour tout $x \in (-r,r)$,*

$$\forall n : \qquad |f^{(n)}(x)| \leq M \tag{6.15}$$

on a

$$\forall x \in (-r,r) : \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

6.4.4 Développements usuels

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + \cdots + x^n + \cdots && R=1 \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^n}{n!} + \cdots && R=\infty \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots && R=1 \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots && R=\infty \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots && R=\infty \\
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} && R=1 \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots && R=1 \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots && R=1
\end{aligned}$$

7 Transformation de Laplace

7.1 Définition et exemples

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle et t une valeur réelle donnée. On appelle **transformation de Laplace** de f au point t, si tant est qu'elle existe, l'intégration suivante

$$\mathcal{L}(f)(t) = F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{7.1}$$

Ainsi, ladite transformation de la fonction f est une opération qui génère une fonction associée $\mathcal{L}(f)$, dite **transformée de Laplace** de f, définie sous forme d'intégrale impropre dépendant de l'argument t, appelée **intégrale de Laplace**. Le domaine de définition de $\mathcal{L}(f)$ est donc le domaine de convergence de l'intégrale impropre en fonction de t.

Remarquons qu'il est possible de considérer des fonctions complexes de variable complexe, et de plus, de prendre t dans $\mathbb{C}$. Cependant, nous restons pour notre part dans le réel.

<u>Exemple</u> **7.1** Considérons la fonction $f = 1$. Alors, nous avons pour tout $t > 0$,

$$\mathcal{L}(1)(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\,\mathrm{d}x = \left[-t^{-1}e^{-tx}\right]_0^\infty = \frac{1}{t}$$

○

<u>Exemple</u> **7.2** En vertu d'une intégration par parties, nous avons $t > 0$,

$$\mathcal{L}(x)(t) = \int_0^\infty e^{-tx} x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x}{t}e^{-tx}\right]_0^\infty + \frac{1}{t}\int_0^\infty e^{-tx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2}$$

○

<u>Exemple</u> **7.3** Prenons les fonctions trigonométriques jumelles cos et sin. Alors, en utilisant l'intégration par parties, nous avons pour tout $t \geq 0, s > 0$,

$$\int_0^s e^{-tx} \cos x \, \mathrm{d}x = \left[e^{-tx} \sin x\right]_0^s + t \int_0^s e^{-tx} \sin x \, \mathrm{d}x$$

et aussi,

$$\int_0^s e^{-tx} \sin x \, \mathrm{d}x = -\left[e^{-tx} \cos x\right]_0^s - t \int_0^s e^{-tx} \cos x \, \mathrm{d}x$$

Ce qui, par un calcul simple, donne

$$\int_0^\infty e^{-tx} \cos x \, \mathrm{d}x = \lim_{s \to \infty} \frac{t}{1+t^2} \left[e^{-tx}(\sin x - t \cos x)\right]_0^s = \frac{t}{1+t^2}$$

et

$$\int_0^\infty e^{-tx} \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}$$

○

7.2 Existence

Vu les derniers exemples, l'existence de la transformée de Laplace d'une fonction donnée dépend de sa variation. Ce qui nous amène à vouloir établir des critères généraux de son existence. En même temps, étant donné que le facteur e^{-tx} à l'intérieur de l'intégrale de Laplace est décroissant en fonction de t, il est alors logique de vouloir croire que l'intégrale existe pour tout $t > t_0$ si elle existe pour t_0. En effet, ceci est l'assertion du théorème important suivant.

Théorème 7.4 (Théorème fondamental) *Si $\mathcal{L}(f)(t_0)$ existe alors $\mathcal{L}(f)(t)$ existe pour tout $t > t_0$ et, de plus, converge absolument. Alors, $\mathcal{L}(f)(t)$ peut être exprimée sous la forme*

$$\mathcal{L}(f)(t) = (t - t_0) \int_0^\infty e^{-(t-t_0)x} \varphi(x) \, \mathrm{d}x \tag{7.2}$$

où

$$\varphi(x) = \int_0^x e^{-t_0 u} f(u) \, \mathrm{d}u$$

En outre, on a

$$\mathcal{L}(f)(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \tag{7.3}$$

Remarque 7.5 *L'assertion (7.3) peut être utilisée comme critère général d'existence de la transformée de Laplace. Par exemple, t^2 ne peut être la transformée de Laplace d'aucune fonction.*

Dans la pratique, il peut se révéler difficile de trouver une valeur t_0 de convergence de l'intégrale de Laplace. C'est pourquoi il serait intéressant de déterminer une classe de fonctions suffisamment large, lesquelles admettent une transformée de Laplace. Nous avons effectivement une telle classe dont les fonctions doivent satisfaire les conditions des deux définitions suivantes.

Une fonction est **continue par morceaux** sur $[0, \infty)$ si $f(0_+)$ existe, et que pour tout $b > 0$, elle est continue sur $(0, b)$ sauf, peut-être, à un nombre de points fini, $x_1, \ldots, x_n$, où elle admet des sauts bornés, i.e. pour tout i,

$$\Delta f(x_i) = |f(x_{i+} - f(x_{i-})| < \infty$$

Une telle fonction est donc continue et bornée sur les intervalles (x_i, x_{i+1}), et nous avons

$$\int_0^b e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{x_1} e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_n}^{b} e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x$$

On appelle une **fonction d'ordre exponentiel** α toute fonction telle que

$$|f(x)| = O(e^{\alpha x}) \tag{7.4}$$

Par exemple, une fonction polynomiale est d'ordre exponentiel α pour tout $\alpha > 0$; une fonction bornée, comme cos et sin, est d'ordre exponentiel 0 ; la fonction e^{ax} est d'ordre exponentiel a ; la fonction e^{x^2} ne possède aucun ordre ou on dit qu'elle est d'ordre infini.

Le résultat qui caractérise ladite classe est alors le suivant.

Théorème 7.6 *Si f est une fonction continue par morceaux sur $[0, \infty)$ et qu'elle est d'ordre exponentiel α, alors $\mathcal{L}(f)$ existe pour $t > \alpha$, et de plus, converge absolument, i.e.*

$$\int_0^\infty e^{-tx}|f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$$

Les exemples suivants montrent toutefois que les conditions du Théorème 7.6 ne sont pas nécessaires.

<u>Exemple</u> **7.7** Soit la fonction

$$f(x) = 2xe^{x^2}\cos x^2$$

Cette fonction continue n'a pas d'ordre exponentiel. En effet, il suffit de prendre les valeurs de x tels que $x^2 = 2\pi n, n \in \mathbb{N}$. Cependant, une intégration par parties donne

$$\mathcal{L}(f)(t) = \left[e^{-tx} \sin e^{x^2}\right]_0^\infty + t \int_0^\infty e^{-tx} \sin e^{x^2} \,\mathrm{d}x = -\sin 1 + t\mathcal{L}(\sin e^{x^2})(t)$$

où $L(\sin e^{x^2})(t)$ existe en vertu du Théorème 7.6. ○

7.3 Propriétés basiques

Nous allons voir ici quelques unes des propriétés basiques de la transformation de Laplace, lesquelles aideront à trouver des transformées de Laplace.

Théorème 7.8 (Linéarité) *Soit f et g deux fonctions qui admettent des transformées de Laplace. Alors, $\mathcal{L}(f+g)$ existe sur l'intersection des deux domaines respectifs de f et g, et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a*

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{L}(f) + \beta\mathcal{L}(g) \tag{7.5}$$

<u>Exemple</u> **7.9** Soit le polynôme

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

En itérant n fois l'intégration par parties, nous obtenons

$$\mathcal{L}(x^n)(t) = \frac{n!}{t^{n+1}} \tag{7.6}$$

Ce qui, par linéarité, donne

$$\mathcal{L}(f)(t) = a_n\mathcal{L}(x^n)(t) + \cdots + a_0\mathcal{L}(1)(t) = a_n\frac{n!}{t^{n+1}} + \cdots + \frac{a_0}{t}$$

○

Le résultat suivant fournit une condition suffisante pour garantir la transformation des séries entières, laquelle exige que la fonction en question soit d'un ordre exponentiel donné.

Théorème 7.10 (Séries entières) *Soit $f(x) = \sum a_n x^n$ une série entière qui converge pour $x \geq 0$. Supposons que pour n suffisamment grand, il existe $\alpha > 0, K > 0$ tels que*

$$a_n \leq K\frac{\alpha^n}{n!} \tag{7.7}$$

Alors, $\mathcal{L}(f)$ existe pour $t > \alpha$ et est donnée par

$$\mathcal{L}(f)(t) = \sum a_n \mathcal{L}(x^n)(t) = \sum a_n \frac{n!}{t^{n+1}} \tag{7.8}$$

<u>Exemple</u> **7.11** Soit la fonction

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Les coefficients d'ordre impair de cette série entière sont nuls et le reste vérifie alors

$$a_{2n} = \frac{1}{(2n+1)!} \leq \frac{1}{(2n)!}$$

En même temps, la fonction en question est continue sur $(0, \infty)$ et par prolongement en 0. Donc, en vertu du Théorème 7.10, sa transformée de Laplace existe et nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{\sin x}{x}\right)(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} L(x^{2n})(t) && (7.9) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! t^{2n+1}} && (7.10) \\ &= \arctan t && (7.11) \end{aligned}$$

○

7.4 Transformation de Laplace Inverse

La transformation de Laplace, par définition, associe une fonction *originale* à sa transformée de Laplace, autrement dit son *image*. Intéressons-nous maintenant à la question inverse, celle qui consiste à chercher la ou les fonctions originales à partir d'une fonction image donnée. Cette opération *inverse* est notée par $\mathcal{L}^{-1}$, et $\mathcal{L}^{-1}(F)$ est dite la **transformée de Laplace inverse** pour une fonction donnée F.

Clairement, la transformée de Laplace inverse ne peut être unique à cause de l'intégration (de Riemann) elle-même. En effet, l'intégrale ne change pas si la fonction intégrée est changée sur un nombre de points fini dans un intervalle fini.

Par exemple, si, à la place de la fonction identiquement égale à 1 sur $\mathbb{R}_+$ (cf. Exemple 7.1), on prend la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Alors, on a toujours $\mathcal{L}(f)(t) = 1/t$. D'où la question : si f_1 et f_2 sont des fonctions originales telles que pour tout $t \geq 0$,

$$\int_0^t (f_1 - f_2)(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

est-ce que $\mathcal{L}(f_1) = \mathcal{L}(f_2)$? Et est-ce que c'est là la seule différence entre les fonctions originales ? La réponse aux deux questions est heureusement affirmative !

Introduisons la **fonction intégrablement nulle** qui doit vérifier la propriété d'intégration suivante

$$\forall s \geq 0 : \quad \int_0^s \nu(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{7.12}$$

Pour une telle fonction, nous pouvons utiliser l'intégration par parties généralisée (cf. Remarque 1.25) pour obtenir que

$$\int_0^s e^{-tx}\nu(x)\,\mathrm{d}x = \left[e^{-tx}\int_0^x \nu(x)\,\mathrm{d}x\right]_0^s - t\int_0^s e^{-tx}\,\mathrm{d}x \int_0^x \nu(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

De ce fait, nous obtenons que

$$\mathcal{L}(\nu)(t) = 0$$

Ainsi, nous venons de montrer que le fait de rajouter une fonction intégrablement nulle à une fonction donnée ne change pas sa transformée de Laplace. Et le théorème important qui permet d'utiliser rigoureusement L^{-1} est le suivant.

Théorème 7.12 (Unicité) *Si $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ alors $f - g$ est une fonction intégralement nulle.*

Remarque 7.13 *Ce résultat est connue sous la nom de théorème de Lerch et dit en d'autres mots que deux originaux à la même image ne peuvent différer que d'une fonction intégrablement nulle. Ainsi, l'unicité est définie par l'égalité à une fonction intégrablement nulle près, laquelle égalité établit en fait une relation d'équivalence dans l'ensemble des fonctions originales. On parle alors plus d'une classe de fonctions originales égales entre elles à une fonction intégrablement nulle près. Ce type d'égalité sera retrouvé à la généralisation de l'intégrale de Riemann à l'**intégrale de Lebesgue**.*

Clairement, l'assertion du théorème de l'unicité est équivalente à la proposition que $\mathcal{L}(f) = 0$ implique que f est une fonction intégrablement nulle. Nous allons prouver ledit théorème, "officieusement" en utilisant le théorème d'approximation de Weierstrass et l'intégration par parties généralisée (cf. Remarque 1.25), en donnant la démonstration d'un résultat plus fort sous une hypothèse plus faible : $\mathcal{L}(f)$ prend la valeur 0 sur une séquence infinie de points séparées à intervalle égale.

Théorème 7.14 *Soit $\mathcal{L}(f)$ qui converge au point t_0. Supposons que $\mathcal{L}(f)$ s'annule aux points de la suite périodique $(t_0 + n\sigma)$ pour une certaine valeur $\sigma > 0$, i.e.*

$$\mathcal{L}(f)(t_0 + n\sigma) = 0, \quad \forall n \geq 1$$

Alors, f est une fonction intégrablement nulle.

Remarque 7.15 *Une drôle de conséquence néanmoins importante de ce résultat est que si $\mathcal{L}(f)$ est nulle sur des points à distance égale, alors $\mathcal{L}(f) = 0$. Toutefois, il est possible qu'une fonction image soit nulle sur une infinité de points sans qu'elle soit nulle et ce pourvu que lesdits points ne soient pas à distance égale, comme par exemple,*

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \cos\frac{1}{x}\right)(t) = \frac{e^{-\sqrt{2t}}}{\sqrt{t}} \cos\sqrt{2t}$$

Auparavant, nous avons besoin du résultat suivant.

Théorème 7.16 *Soit ψ une fonction continue. Supposons que tous les moments de ψ s'annulent sur l'intervalle (a, b), i.e.*

$$\int_a^b x^n \psi(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.13}$$

Alors, $\psi = 0$ sur (a, b).

Dans l'application, il serait utile de pouvoir savoir si les fonctions originales sont identiques. La continuité à gauche ou à droite sont suffisantes pour avoir l'égalité. Explicitement, nous avons

Théorème 7.17 *Si $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$, alors $f = g$ sur tous les points où f et g sont continues à gauche ou à droite.*

Après l'unicité et le Théorème 7.17 qui permet de distinguer les fonctions originales, il y a à savoir la linéarité de $\mathcal{L}^{-1}$ héritée de celle de L :

Théorème 7.18 (Linéarité de la transformation inverse) *Si F et G sont deux fonctions images, alors on a pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha F + \beta G) = \alpha \mathcal{L}^{-1}(F) + \beta \mathcal{L}^{-1}(G)$$

<u>Exemple</u> **7.19** Nous avons

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

○

<u>Exemple</u> **7.20** (**Fonction de saut**) Soit

$$u_a(x) = u(x-a) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq a \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction est dite *fonction de saut* et est fréquemment utilisée en science de l'électronique. Nous avons

$$\mathcal{L}(u_a)(t) = \int_a^{\infty} e^{-tx}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-at}}{t}$$

Par conséquent, nous obtenons que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-at}}{t}\right) = u_a(x)$$

○

Il reste à savoir qu'une formulation explicite de la transformation de Laplace inverse existe bien sauf que pour la démontrer, nous aurons besoin de l'analyse de la variable complexe ; un autre cours, une autre théorie ! Pour énoncer la formule d'inversion, faisons l'extension naturelle et simple de l'intégrale de Riemann : soit la fonction à valeurs complexes

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$$

où et f_1 et f_2 sont deux fonction réelles d'une variable réelle. On dit que f est intégrable sur un intervalle I si f_1 et f_2 le sont et on écrit

$$\int_I f(x) + ig(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x + i\int_I g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (7.14)$$

Nous avons alors le résultat célèbre suivant dont une démonstration est disponible dans (cf. [?]).

Théorème 7.21 (Théorème d'inversion de Fourier) *Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $F = \mathcal{L}(f)$. Supposons que f' existe et qu'elle soit aussi continue par morceau sur $\mathbb{R}$. En plus, supposons que f est absolument intégrable, i.e.*

$$\int |f(x)| \,\mathrm{d}x < \infty$$

Alors, en tout x où f est continue, on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{itx} F(t) \,\mathrm{d}t \tag{7.15}$$

où

$$F(t) = \int e^{-itx} f(x) \,\mathrm{d}x \tag{7.16}$$

ce que l'on appelle transformée de Fourrier de f. En un point de discontinuité x, (7.15) est donnée par

$$\frac{F(x_+) + f(x_-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int e^{itx} F(x) \,\mathrm{d}t \tag{7.17}$$

7.5 Translation

Dans cette section, nous donnons quelques propriétés de la transformation de Laplace et son inverse qui sont en même temps des outils pour obtenir l'une ou l'autre et qui permettent une utilisation plus large du tableau de la transformation de Laplace fourni à la fin. En premier, nous avons un résultat qui permet de connaître les transformées de Laplace de fonctions exprimées sous une forme particulière de fonctions dont la transformée est déjà connue.

Théorème 7.22 (Premier théorème de translation) *Soit $\mathcal{L}(f)(t)$ pour $t > 0$. Alors, pour $t > a$, on a*

$$\mathcal{L}\left(e^{ax} f(x)\right)(t) = \mathcal{L}(f)(t-a) \tag{7.18}$$

<u>Exemple</u> **7.23** Nous savons déjà que $\mathcal{L}(x)(t) = t^{-2}$. Alors

$$\mathcal{L}(e^{ax}x)(t) = \frac{1}{(t-a)^2}, \quad t > a$$

Et de manière générale, nous avons pour $n \geq 0$ et $t > a$,

$$\mathcal{L}\left(e^{ax}x^n\right)(t) = \frac{n!}{(t-a)^{n+1}}$$

○

En second, il y a le résultat suivant qui fait l'inverse du Théorème 7.22 en permettant de tirer des fonctions originale à partir de fonctions images particulières. Rappelons-nous de l'Exemple 7.20 la fonction de saut u_a.

Théorème 7.24 (Second théorème de translation) *Soit $\mathcal{L}(f)(t)$ pour $t > 0$ et $a \geq 0$. Alors, on a*

$$\mathcal{L}\left(u_a(x)f(x-a)\right)(t) = e^{-at}\mathcal{L}(f)(t) \tag{7.19}$$

Remarque 7.25 *Si $F = \mathcal{L}(f)$, l'expression (7.19) peut être donnée sous la forme*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-at}F\right)(x) = u_a(x)f(x-a) \tag{7.20}$$

Cette dernière fonction est la ***translatée*** *de f au point a.*

<u>Exemple</u> **7.26** Soit la fonction x^2 translatée à 1, i.e.

$$f(x) = u_1(x)(x-1)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1) \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Alors,

$$\mathcal{L}(f(x))(t) = e^{-t}L(x^2)(t) = \frac{2e^{-t}}{t^3}$$

○

7.6 Dérivée de transformée

Peut-on dériver $\mathcal{L}(f)$? La réponse est affirmative et plus qu'une fois !

Théorème 7.27 *Soit $\mathcal{L}(f) = F$ et supposons que $F(t_0)$ existe. Alors, F est infiniment dérivable pour tout $t > t_0$ et ses dérivées sont données par*

$$F^{(n)}(t) = (-1)^n\mathcal{L}(x^n f(x))(t) \tag{7.21}$$

Remarque 7.28 *Ce résultat est d'autant plus vrai si f est continue par morceaux et qu'elle est d'ordre exponentiel α. Par ailleurs, l'expression (7.21) donne la formule utile suivante*

$$f(x) = -\frac{1}{x}\mathcal{L}^{-1}(F'(t))(x) \tag{7.22}$$

<u>Exemple</u> **7.29** En vertu des exemples précédents, nous avons

$$\mathcal{L}(x\cos(bx)(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}(\cos(bx)(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{t^2}{t^2+b^2} = \frac{t^2-b^2}{(t^2+b^2)^2}$$

et d'autre part,

$$\mathcal{L}(x\sin(bx)(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}(\sin(bx)(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{b}{t^2+b^2} = \frac{2bt}{(t^2+b^2)^2}$$

○

Il est naturel de se poser la question de l'intégration de la transformée de Laplace après sa dérivation. En fait, nous avons une conséquence directe du Théorème 7.27.

Théorème 7.30 *Soit $F = \mathcal{L}(f)$ qui converge en t_0. Supposons que $\mathcal{L}(f(x)/x)$ existe. Alors, $\mathcal{L}(f(x)/x)(t)$ converge en t_0 et on a pour tout $t > t_0$,*

$$\int_{t_0}^{t} F(s)\,\mathrm{d}s = \left[\mathcal{L}\left(\frac{f(x)}{x}\right)(s)\right]_{t_0}^{t} \tag{7.23}$$

<u>Exemple</u> **7.31** En vertu de (**??**), nous avons pour $t > 0$,

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin x}{x}\right)(t) = \int_t^{\infty}\frac{\mathrm{d}s}{s^2+1} = [\arctan s]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan t = \arctan\frac{1}{t}$$

○

7.7 Transformée de dérivée

À l'opposé de la Section 7.6, nous allons nous intéresser ici à l'opération inverse, à savoir transformer les dérivées de fonction, ce qui, par la suite, permettra de résoudre les EDL en les transformant.

Théorème 7.32 *Soit f une fonction continue sur $(0,\infty)$. En plus, supposons que f soit d'ordre exponentiel α et que f' soit continue par morceaux sur $[0,\infty)$. Alors, $\mathcal{L}(f')$ existe pour $t > \alpha$ et on a*

$$\mathcal{L}(f')(t) = t\mathcal{L}(f)(t) - f(0_+) \tag{7.24}$$

Remarque 7.33 *Remarquons qu'il n'est pas exigé que f' soit d'un ordre exponentiel. Par exemple, La fonction $\sin(e^{x^2})$ entre dans ce cadre. Ce serait alors une condition plus forte. En effet, si f' est d'ordre exponentiel α, i.e. pour un certain $M > 0$ et tout x assez grand*

$$|f'(x)| \leq Me^{\alpha x}$$

alors nous avons par le théorème fondamental du calcul intégral, avec a choisi arbitrairement grand,

$$|f(x)| = \left| \int_a^x f'(u)\,\mathrm{d}u \right| \leq M \int_a^x e^{\alpha u}\,\mathrm{d}u \leq \frac{M}{\alpha} e^{\alpha x} \textit{ ou } Mx \textit{ si } \alpha = 0$$

Par conséquent, f est aussi d'ordre exponentiel α.

D'autre part, si f a des sauts $\Delta f(x_i)$ aux points $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, alors le même argument donne facilement que

$$\mathcal{L}(f')(t) = t\mathcal{L}(f)(t) - f(0_+) + \sum_{i=1}^{n} e^{-tx_i} \Delta f(x_i) \tag{7.25}$$

Enfin, on obtient par itération sous les conditions que $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ soient continues par morceaux sur $(0, \infty)$ et d'ordre exponentiel, et que $f^{(n)}$ soit continue sur $\mathbb{R}_+$,

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(t) = t^n \mathcal{L}(f)(t) - \sum_{k=1}^{n} t^{n-k} f^{(k-1)}(0_+) \tag{7.26}$$

Ainsi, on peut voir que ***la transformation de Laplace transforme les dérivées en polynômes****.*

<u>Exemple</u> **7.34** Soit la fonction

$$f(x) = x^n e^{-x}$$

Nous voulons la transformée du polynôme dit polynôme de Laguerre

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} f^{(n)}(x)$$

En vertu de (7.26), du premier théorème de translation et (7.6), nous obtenons que

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(t) = t^n \mathcal{L}(f)(t) = \frac{t^n n!}{(t+1)^{n+1}}$$

D'où,

$$\mathcal{L}(L_n)(t) = \frac{(t-1)^n}{t^{n+1}}, \quad t > 1$$

○

7.8 EDL

Nous arrivons à l'objectif principal de ce chapitre sur la transformation de Laplace, qui est de résoudre les équations différentielles par ladite transformation et ce grâce au Théorème 7.32 et la formule générale (7.26). Nous considérerons les EDL à coefficient constants dont la formule générale d'ordre n est donnée par

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = h(x) \tag{EDL^{n}C}$$

où les a_i sont des constantes et h une fonction de x.

La méthode générale consiste à appliquer L des deux côtés de l'ED. (EDL^{n}C) ; cela suppose qu'il soit possible de transformer $y^{(n)}$, i.e. $\mathcal{L}\left(y^{(n)}\right)$ existe pour $n = 0, 1, \ldots$, et aussi que $\mathcal{L}(h)$ existe. De ce fait, (EDL^{n}C) entraîne une équation de la forme

$$\mathcal{L}(y) \sum_{k=0}^{n} a_k t^k - \sum_{\ell=0}^{n} y^{(\ell)}(0) \sum_{k=0}^{n} a_k t^{k-1} = \mathcal{L}(h)(t) \tag{7.27}$$

D'où,

$$\mathcal{L}(y) = \frac{\mathcal{L}(h)(t) + \sum_{\ell=0}^{n} y^{(\ell)}(0) \sum_{k=0}^{n} a_k t^{k-1}}{\sum_{k=0}^{n} a_k t^k} = F(t) \tag{7.28}$$

Enfin, il reste à faire l'opération inverse en appliquant $\mathcal{L}^{-1}(F)$ pour "essayer" d'obtenir une expression explicite de y.

<u>Exemple</u> **7.35** Soit le problème de valeur initiale

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Si nous prenons la transformée de Laplace des deux côtés en supposant que l'opération est possible alors nous obtenons en vertu de (7.26) que

$$t^2 L(y) - t y(0) - y'(0) + \mathcal{L}(y)(t) = \frac{1}{t}$$

D'où,

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}$$

Ce qui donne en appliquant la transformation inverse

$$y = 1 - \cos x$$

○

Références

[1] K. Allab. (1984). *Éléments d'Analyse*, office des publications universitaires.

[2] J. M. J. Ablowitz, A. S. Fokas. (2003). *Complexe variable, Introduction and Applications, second edition*, Combridge University Press.

[3] J. M. Arnaudies, H. Fraysse. (1988). *Cours de mathématiques-2*, edition Dunod.

[4] Sylvie Benzoni-Gavage. (2010). *Calcul différentiel et équations différentielles*, edition Dunod.

[5] O. Boukhadra. (2020). *Introduction à l'Analyse*. La première version, intitulé *Analyse* a été publiée par l'Univ. Constantine 1.

[6] O. Boukhadra. (2020-21). *Algèbre*. Telum : https://telum.umc.edu.dz/course/.

[7] M. Queysanne. (1984). *Algèbre*, office des publications universitaires.

[8] M. R. Spiegel. (1973). *Theorie et applications de l'analyse*, Série SCHAUM.

[9] M. R. Spiegel and R. Wrede (2002). *Theory and problems of advanced calculus*, second edition, Série SCHAUM.

[10] William F. Trench. (2013), Elementary differential equations with boundary value problems. Free Edition 1.