M1-S1 PROBA TD

Omar Boukhadra

Dép. Mathématiques
Faculté des Sciences Exactes
Université de Constantine 1
boukhadra@umc.edu.dz

22 octobre 2023

Contenu

1 Probabilité et v.a.

Exercice 1.1 (a) Soit $(A_i)_{i=1}^n$ une collection d'évènements dans un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$. Montrer que $\cap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$.

(b) Si $\mathcal{G}$ est une autre tribu de Ω, montrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est aussi une tribu de Ω. Cependant, montrer que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ ne l'est pas nécessairement.

Exercice 1.2 Modéliser les expériences aléatoires suivantes par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

(a) une pièce de monnaie équilibrée est lancée trois fois.

(b) Une boule est tirée d'une urne qui contient un nombre donné de boules rouges et bleues.

(c) deux boules sont tirées sans remise d'une urne qui contient un nombre donné de boules rouges et bleues.

(d) Idem avec un tirage avec remise.

(e) une pièce de monnaie équilibrée est lancée répétitivement jusqu'à ce que pile apparaisse.

Exercice 1.3 (Inégalité de Boole) Prouver que

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Exercice 1.4 Montrer que

$$P(\limsup A_n) \geq \limsup P(A_n)$$

Exercice 1.5 Soit $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = \{A \text{ est dénombrable ou } A^c\}$. Et considérer sur $\mathcal{F}$, l'application

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } A^c \text{ est dénombrable} \end{cases}$$

(a) Montrer que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé.

(b) Montrer que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ est une variable aléatoire par rapport à $\mathcal{F}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ ssi il existe n tel que $(X^{-1}(\{n\}))^c$ est dénombrable (ssi il existe un n unique tel que $X^{-1}(\{n\})$ est non dénombrable).

Exercice 1.6 Soit deux v.a. X et Y. Montrer que $\min\{X,Y\}, X+Y$ et XY sont aussi des v.a.

Exercice 1.7 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble E muni de la tribu de ses parties, telle que $P(X=x)>0$ pour tout $x\in E$. Montrer que E est fini ou dénombrable.

Exercice 1.8 Soit F,G deux f.r. et $\lambda\in[0,1]$. Montrer que $\lambda F+(1-\lambda)G$ est une f.r. Est-ce que FG est une f.r. ? Particulièrement, si f et g sont les d.p. de ces dernières, montrer que $\lambda f+(1-\lambda)g$ est une d.p., celle de $\lambda F+(1-\lambda)G$. Est-ce que fg en est une ?

Exercice 1.9 Soit F une f.r. et $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que les fonction suivantes sont aussi des f.r. :

$$(a)\ F(x)^n \qquad (b)\ 1-(1-F(x))^n \qquad (c)\ F+(1-F)\log(1-F)$$

Exercice 1.10 Dire si les fonctions suivantes définissent des d.p. en déterminant la valeur de la constante c, et éventuellement la f.r. associée :

$$f(x)=c\,x^{-d}\,\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x), \quad g(x)=\frac{c\,e^x}{(1+e^x)^2}$$

Exercice 1.11 Soit F le f.r. de la v.a. X. Exprimer en fonction de F les f.r. des v.a. $-X$ et X^+.

Exercice 1.12 Soit X une v.a. de f.r. F. Trouver les f.r. des v.a. suivantes :

$$(a)\ aX+b \qquad (b)\ X^2 \qquad (c)\ \sqrt{X}$$

Exercice 1.13 Soit X une v.a. uniformément distribuée sur $[0,2]$. Poser $Y=X^2$ et calculer

$$(a)\ P(1\le X\le 2) \qquad (b)\ P(Y\le X) \qquad (d)\ P(X+Y\le 3/4)$$

Exercice 1.14 Soit une X une v.a. de f.r. F et U une v.a. de distribution uniforme sur $[0,1]$. Soit

$$F^{-1}(u)=\inf\{x:\ F(x)\ge u\}$$

Montrer que

$$X \overset{d}{=} F^{-1}(U) \tag{1.1}$$

Ensuite donner l'exemple d'une distribution exponentielle standard.

Exercice 1.15 Considérer la fonction suivante sur $\mathbb{R}_+^2$, $F(x,y) = 1 - e^{-xy}$. Est-elle une f.r. ?

Exercice 1.16 Soit X, Y deux v.a. de f.r. commune F. Montrer que

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$$

Exercice 1.17 Soit X une v.a. de Bernoulli de probabilité de succès p. Soit $Y = 1 - X$ et $Z = XY$. Trouver la distribution des couples (X, Y) et (X, Z).

Exercice 1.18 Soit X une v.a. telle que $E(|X|^p) < \infty$ pour $p \geq 1$. Montrer que

$$\lim_{x \to \infty} x^p \, P(|X| > x) = 0$$

Que peut-on dire alors à propos de l'inégalité de Tchebychev ?

Exercice 1.19 Soit X une v.a. telle que $\|X\|_2 = 1$ et pour un $\alpha > 0$, $\|X\| \geq \alpha$. Montrer que $E(|X|) < \infty$. Ensuite, prouver que pour tout $\beta \in [0, 1]$, on a

$$P(|X| \geq \alpha\beta) \geq (1 - \beta)^2 \alpha^2$$

Exercice 1.20 Soit X_n une v.a. de distribution $\mathcal{B}(n, p)$. Montrer que

$$E\Big(\frac{1}{1 + X_n}\Big) = \frac{1 - (1 - p)^{n+1}}{(n + 1)p}$$

Trouver la limite de cette moyenne quand $n \to \infty$ et $p \to 0$ et que $np \to \lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

2 Conditionnement & Indépendance

Exercice 2.1 Soit $P(B) \neq 0$ et poser $Q(A) = P(A \mid B)$. Soit $Q(C) \neq 0$. Montrer que $Q(A \mid C) = P(A \mid B \cap C)$.

Exercice 2.2 Supposer que $P(A)P(B) \neq 0$ et montrer la *formule de Bayes* :

$$P(A \mid B) = P(B \mid A) \, \frac{P(A)}{P(B)} \tag{2.1}$$

Ensuite, prouver que

$$P(A \mid B) > P(A) \Longrightarrow P(B \mid A) > P(B)$$

Exercice 2.3 Soit (A_n) une suite d'évènements. Soit $I = \liminf A_n$, $S = \limsup A_n$ et poser $I_n = \cap_{k \geq n} A_k$, $S_n = \cup_{k \geq n} A_k$. Montrer que I et S sont indépendant si I_n et S_n sont indépendants pour tout n. Si c'est le cas, et de plus, si $A_n \to A$, montrer que $P(A) = 0$ ou 1.

Exercice 2.4 Un nombre aléatoire N de dés sont jetés. Appeler S la somme des faces apparues. Supposer que $P(N = n) = 2^{-n}$. Trouver les probabilités :

$$P(N = 2 \mid S = 4), \qquad P(S = 4 \mid N \text{ est pair}).$$

Exercice 2.5 Soit X et Y deux v.a. i.i.d. dans $\mathbb{N}^*$ de distribution donnée par 2^{-n}. Trouver les probabilités suivantes :

$$(a)\, P(\min(X, Y) \leq n) \qquad (b)\, P(X = Y) \qquad (c)\, P(X > Y)$$

Exercice 2.6 Soit X et Y deux v.a. indépendantes de f.r. respectives F et G. Trouver les f.r. de $\min\{X, Y\}$ et $\max\{X, Y\}$. Ensuite, montrer que

$$P(a < m \leq M \leq b) = (F(b) - F(a))(G(b) - G(a))$$

Exercice 2.7 Soit X une v.a. de Bernoulli équiprobable indépendante de la v.a. Y qui est de distribution normale. Trouver la loi de XY.

Exercice 2.8 Soit X et Y deux v.a. de f.r. F et G. Supposer qu'elles soient positives et indépendantes. Trouver la f.r. de XY.

Exercice 2.9 Soit X et Y deux v.a. indépendantes de distributions exponentielles.
- (a) Déterminer la distribution de $\min\{X, Y\}$.
- (b) Calculer la probabilité de $\{X < Y\}$.
- (c) Montrer que $\min\{X, Y\}$ est indépendante de l'évènement $\{X < Y\}$.
- (d) Calculer la f.c. de XY.

Exercice 2.10 Soit X, Y et Z des v.a. indépendantes de distributions exponentielles de paramètres respectifs α, β et γ. Calculer $P(X < Y < Z)$.

Exercice 2.11 Soit $U = X + Y$ somme de deux v.a. i.i.d. suivant une loi exponentielle standard. Poser $V = X/U$. Trouver la distribution de (U, V) et en déduire celle de V.

Exercice 2.12 Soit maintenant (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de distribution exponentielle. Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Pour $t \geq 0$, soit

$$N(t) = \#\{n : S_n \leq t\}$$

Montrer que $N(t) \sim \mathcal{P}(t)$.

3 Fonction caractéristique

Exercice 3.1 Trouver les f.c. des fonctions suivantes :

$$(a)\, \frac{1}{\cosh(\pi x)} \qquad (b)\, \frac{1}{2}|x|e^{-|x|}$$

Exercice 3.2 Soit φ une f.c. Montrer que $\overline{\varphi}$ et φ^2 le sont aussi. Par contre, donner un exemple qui montre que $|\varphi|$ ne l'est pas nécessairement.

Exercice 3.3 Soit φ la f.c. d'une v.a. X. Montrer que pour tout $t > 0$,

$$P(|X| > 1/t) \leq \frac{7}{t} \int_0^t (1 - \mathrm{Re}(\varphi(s))\, \mathrm{d}s$$

Exercice 3.4 Soit X et Y deux v.a. indépendantes de distribution normale standard. Utiliser les f.c. pour trouver les distributions de X^2 et XY.

Exercice 3.5 Soit φ la f.c. de la loi normale standard. Montrer que φ vérifie l'équation différentielle $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$. En déduire la forme explicite de φ.

Exercice 3.6 Trouver des v.a. X et Y dépendantes telles que $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

Exercice 3.7 Trouver les distributions associées aux f.c. suivantes :

$$(a)\, \cos t \qquad (b)\, (1 - |t|)\, \mathbb{1}_{|t|\leq 1}(t)$$

Ensuite, dire si les fonctions suivantes sont des f.c. :

$$(c)\, (1 + t^4)^{-1} \qquad (d)\, e^{-t^4}$$

4 Modes de convergence de v.a.

Exercice 4.1 Soit (X_n) une suite de v.a. Supposer qu'il existe une série numérique $\sum u_n$ convergente telle que $\sum P(X_n \neq u_n) < \infty$. Montrer que $\sum X_n$ est p.s. convergente.

Exercice 4.2 Utiliser l'intégration par parties à la fonction $x^{-1}\, xe^{-x^2/2}$ pour obtenir l'estimation :

$$\left(x^{-1} - x^{-3}\right)\, e^{-x^2/2} \leq \int_x^{\infty} e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u \leq x^{-1} e^{-x^2/2}$$

Maintenant, soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de distribution $\mathcal{N}$. Montrer que

$$(a) \quad \limsup \frac{X_n}{\sqrt{2\log n}} = 1, \quad \text{p.s.}$$

$$(b) \quad \frac{\max_{1\leq i\leq n} X_i}{\sqrt{2\log n}} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 1$$

Exercice 4.3 Soit (X_n) et (Y_n) deux suites de v.a. convergeant en loi respectivement vers X et Y.

(a) Supposons que (X_n) et (Y_n) soient indépendantes et que X et Y le soient aussi. Montrer que $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + Y$. Donner un exemple qui montrer que l'hypothèse d'indépendance est nécessaire.

(b) Supposer que $Y = 0$. Montrer que $X_n + Y_n \Longrightarrow X$ et $X_n Y_n \Longrightarrow 0$

Exercice 4.4 Soit (X_n) une suite de v.a. de distributions respectives $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$. Supposer que $X_n \Longrightarrow X$.

(a) Montrer que (σ_n^2) converge. En déduite que X est normale. Ensuite, étudier le cas de v.a. non centrées.

(b) Montrer qu'il est vrai que

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \Longrightarrow X \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X$$

Corrigés ??

Corrigé ??. (a) Observons que

$$\cap_{i=1}^{n} A_i = (\cup_{i=1}^{n} A_i^c)^c$$

De ce fait, $\cap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.

(b) Vérifions que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est bien un tribu. Nous avons clairement $\Omega \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. En second lieu, soit $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Alors, $A^c \in \mathcal{F}$ et $A^c \in \mathcal{G}$, donc $A^c \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Enfin, soit $(A_n) \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Nous avons que $\cup A_n \in \mathcal{F}$ et aussi que $\cup A_n \in \mathcal{G}$. D'où, $\cup A_n \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

Cependant, considérons l'exemple suivant

$$\Omega = \{a, b, c\}, \quad \mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}, \quad \mathcal{G} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, \Omega\}$$

Alors, nous avons que

$$\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \Omega\}$$

sauf que ce n'est pas une tribu vu que $\{a\} \cup \{c\} = \{a, c\} \notin \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$.

Corrigé ??. (a) Posons $\Omega = \{\text{pile, face}\}^3$ et $\mathcal{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. La pièce étant équilibrée, les issues sont alors équiprobables ; nous pouvons donc munir $\mathcal{F}$ de la probabilité uniforme P telle que la probabilité d'une issue quelconque est de

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\#\Omega} = \frac{1}{2^3}$$

Par exemple, soit A l'évènement que le premier lancer donne pile. Alors, nous avons que

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2^2}{2^3} = \frac{1}{2}$$

(b) L'ensemble Ω des issues possibles est l'ensemble des boules de l'urne. Et nous pouvons prendre $\mathscr{P}(\Omega)$ comme tribu de référence. Soit a le nombre des boules rouges et b celui des bleues.