1 Mesure de probabilité et v.a.

Exercice 1.1 Modéliser les expériences aléatoires suivantes par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

(a) une pièce de monnaie équilibrée est lancée trois fois.

(b) une boule est tirée d'une urne qui contient un nombre donné de boules rouges et bleues.

(c) deux boules sont tirées sans remise d'une urne qui contient un nombre donné de boules rouges et bleues.

Exercice 1.2 Soit $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = \{A \text{ est dénombrable ou } A^c\}$. Et considérer sur $\mathcal{F}$, l'application

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } A^c \text{ est dénombrable} \end{cases}$$

Montrer que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé.

Exercice 1.3 Soit $A\Delta B$ l'évènement qu'un seul des évènements A ou B se produise. Montrer que

$$P(A\Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

Exercice 1.4 (Inégalités de Boole) Prouver que

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Exercice 1.5 Soit X et Y deux v.a. sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et soit $A \in \mathcal{F}$. Posons $Z(\omega) = X(\omega)$ si $\omega \in A$ et $Z(\omega) = Y(\omega)$ si $\omega \in A^c$. Montrer que Z est une v.a.

Exercice 1.6 Soit U une v.a. de distribution uniforme sur $[0, 1]$. Soit $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ une fonction continue et croissante. Montrer que $F^{-1}(U)$ est une v.a. et donner sa f.r. ?

Exercice 1.7 Soit F le f.r. de la v.a. X. Exprimer les f.r. des v.a. suivantes en fonction de F : $X^+, aX + b$ et X^2.

Exercice 1.8 Soit F, G deux f.r. et $\lambda \in [0, 1]$. Montrer que $\lambda F + (1 - \lambda)G$ est une f.r. Est-ce que FG est une f.r. ?

Exercice 1.9 Soit X une v.a. dans $\mathbb{N}^*$ de distribution (p_n). Dans chacun des cas suivants, trouver la valeur de c telle que (p_n) définit bien une distribution de probabilité :

$$(a)\, p_n = \frac{c}{2^n} \qquad (b)\, p_n = c\,\frac{2^n}{n!}$$

Ensuite calculer $P(X > 1)$ et $P(X \in 2\mathbb{N}^*)$ dans les deux cas (a) et (b).

Exercice 1.10 Soit $p = 1 - q \in (0, 1)$. Montrer que

$$1 + \left[\frac{\log U}{\log q}\right] \sim \mathcal{G}(p)$$

Exercice 1.11 Soit X une v.a. uniformément distribuée sur $[0, 2]$. Calculer

$$(a)\, P(X^2 \leq X) \qquad (b)\, P(X + X^2 \leq 3/4)$$

Exercice 1.12 Soit $X \sim U_{[0,\pi/2]}$ Trouver la d.p. de $\sin X$.

Exercice 1.13 Soit X une v.a. de distribution de Cauchy, i.e. la d.p. est définie par $(1 + x^2)^{-1}/\pi$. Montrer que $1/X$ suit la même distribution.

Exercice 1.14 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Soit S_k la somme des numéros de k boules tirées avec remise. Calculer $E(S_k)$ et $V(S_k)$.

Exercice 1.15 Soit X une v.a. continue de moyenne μ, de médiane m et de variance σ^2. Montrer que

$$(\mu - m)^2 \leq \sigma^2$$

Exercice 1.16 Soit (X, Y) le vecteur aléatoire discret de distribution donnée par

$$P((X, Y) = (x, y)) = c\, \frac{(x + y)\, a^{x+y}}{x!y!}$$

Trouver la distribution marginale de X, c et $E(X)$. Donner la distribution de $X + Y$.

Exercice 1.17 Un point (X, Y) est choisi au hasard dans le demi-disque unitaire supérieur. Quelle est la loi de X/Y.

Exercice 1.18 Soit X une v.a. telle que $\|X\|_2 = 1$ et pour un $\alpha > 0$, $\|X\| \geq \alpha$. Montrer que $E(|X|) < \infty$. Ensuite, prouver que pour tout $\beta \in [0, 1]$, on a

$$P(|X| \geq \alpha\beta) \geq (1 - \beta)^2\alpha^2$$

Exercice 1.19 Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et soit (X_n) une suite de v.a. telles que $X_n \sim \mathcal{B}(n, x)$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} E(f(X_n/n)) = f(x) \tag{1.1}$$