2 Conditionnement *&* Indépendance

Exercice 2.1 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé. Soit $B \in \mathcal{F}$ tel que $P(B) \neq 0$ et poser $Q(A) = P(A \mid B)$. Montrer que $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ est un espace probabilisé. Ensuite, si $Q(C) \neq 0$, montrer que $Q(A \mid C) = P(A \mid B \cap C)$.

Exercice 2.2 Supposer que $P(A)P(B) \neq 0$ et montrer la *formule de Bayes* :

$$P(A \mid B) = P(B \mid A) \, \frac{P(A)}{P(B)} \tag{2.1}$$

Ensuite, prouver que

$$P(A \mid B) > P(A) \Longrightarrow P(B \mid A) > P(B)$$

Exercice 2.3 Si A et B sont indépendants, prouver que la différence symétrique donne

$$P(A \Delta B) = P(A)P(B^c) + P(B)P(A^c)$$

Exercice 2.4 Soit X une v.a. de Bernoulli équiprobable indépendante de la v.a. Y qui est de distribution normale. Trouver la loi de $Z = XY$.

Exercice 2.5 Soit X et Y deux v.a. de Bernoulli indépendantes et équiprobables sur $\{\pm 1\}$. Poser $Z = XY$ et montrer que X, Y et Z sont indépendantes deux à deux. Sont-elles indépendantes ?

Exercice 2.6 Soit X et Y deux v.a. suivant des distributions de Bernoulli sur $\{\pm 1\}$ telles que $E(XY) = E(X)E(Y)$. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 2.7 Soit X et Y deux v.a. i.i.d. dans $\mathbb{N}^*$ de distribution donnée par 2^{-n}. Trouver les probabilités suivantes :

$(b)\, P(X = Y)$ $\qquad$ $(c)\, P(X > Y)$ $\qquad$ $(d)\, P(X \text{ divise } Y)$

Exercice 2.8 Soit X et Y deux v.a. indépendantes de f.r. respectives F et G. Trouver les f.r. de $U = \min\{X, Y\}$ et $V = \max\{X, Y\}$. Ensuite, montrer que

$$P(a < U \leq V \leq b) = (F(b) - F(a))(G(b) - G(a))$$

Exercice 2.9 Soit X et Y deux v.a. i.i.d. de distribution uniforme sur $[0, 1]$. Soit $U = \min\{X, Y\}$ et $V = \max\{X, Y\}$. Calculer $E(U)$ et $\mathrm{Cov}(U, V)$.

© O. Boukhadra [3]. TD de PROBA II. 4 mars 2024.

Exercice 2.10 Soit X et Y deux v.a. i.i.d. suivant des lois exponentielles. Trouver les distributions respectives de $\min\{X, Y\}$ et $X + Y$ et calculer $P(X < Y)$.

Exercice 2.11 ($\mathcal{E}(\lambda)$ est sans mémoire) Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

(a) Établir que pour tous $s, t \geq 0$, on a

$$P(X \geq t + s \mid X > t) = P(X > s) \tag{2.2}$$

(b) Prouver que

$$\lim_{h \to 0} h^{-1} P(X \in (t, t + h] \mid X > t) = \lambda$$

Exercice 2.12 Soit X une v.a. positive de f.r. F qui admet une d.p. f. On définit le *taux de hasard* de X par

$$h(x) = \lim_{r \to 0} r^{-1} P(X \in (x, x + r] \mid X > x)$$

On appelle alors *fonction de hasard* la quantité $H(x) = \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que

(a) $H(x) = -\log(1 - F(x))$

(b) $H(x)/x$ croissante si h l'est.

Exercice 2.13 Soit T la distance entre deux points choisis au hasard dans un segment de longueur a. Poser $F(t, a) = P(T \leq t)$ et montrer que pour $t \in (0, a)$,

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{2}{a} F = \frac{2t}{a^2}$$

En déduire F et $E(T^n)$.

Exercice 2.14 Soit X une v.a. continue de moyenne μ et de variance σ^2, et de plus, soit m sa médiane, i.e.

$$P(X \leq m) \geq 1/2 \leq P(X \geq m)$$

Montrer que

$$(\mu - m)^2 \leq \sigma^2$$

Exercice 2.15 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Soit S_k la somme des numéros de k boules tirées avec remise. Calculer $E(S_k)$ et $V(S_k)$.

Exercice 2.16 Une urnes A contient n boules rouges et une autre B contient n boules bleues. Une boule est tirée de chaque urne, les deux boule obtenues sont alors échangées. Quelle est la moyenne des boules rouges dans A après k opérations d'échange.

Exercice 2.17 (Égalisation) Soit X et Y deux v.a. indépendantes et continues. Prouver que $P(X = Y) = 0$. Ensuite, montrer que ceci reste vrai si au moins une des v.a. est continue.

Exercice 2.18 (Rendez-vous) A et B se sont donné rendez-vous entre 17h et 18h en s'entendant sur le fait qu'il n'attendraient pas l'autre plus de 10 minutes. Supposer qu'ils arrivent indépendamment à des instants uniformément distribués à l'heure fixée. Calculer la probabilité d'une rencontre.

Exercice 2.19 Soit X et Y deux v.a. indépendantes de variances finies. Poser $U = X+Y$ et $V = XY$. Sous quelle condition U et V seraient-elles non corrélées ?

Exercice 2.20 Soit X et Y deux v.a. continues et indépendantes et soit Z une v.a. de Bernoulli sur $\{\pm 1\}$ de probabilité $1/2$ et indépendante des deux premières. Soit $U = ZX$ et $V = ZY$. Montrer que U^2 et V^2 sont indépendantes. Est-ce que U et V sont indépendantes ?