Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Université Frères Mentouri Constantine 1, Constantine جامعة الإخوة منتوري قسنطينة 1، قسنطينة

Polycopié

2023-2024

Algèbre 4

[Résumé de Cours et Exercices Corrigés]

PAR : BOUDELIOU AMMAR

Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Des Frères Mentouri, Constantine1
Faculté Des Sciences Exactes
Département De Mathématiques

Polycopié

ALGEBRE 4:

« Résumé de Cours et Exercices Corrigés »

Par :

BOUDELIOU AMMAR

Table des matières

Introduction

Cet ouvrage est destiné à tous les étudiants qui peuvent s'exercer sur l'algèbre bilinéaire. Bien sûr, les étudiants en deuxième année de licence de mathématiques sont les premiers concernés, mais il ne fait aucun doute que les étudiants d'autres filières qui étudient ces notions pourraient avoir besoin du contenu de ce manuel.

Cet ouvrage est le fruit des cours et travaux dirigés destinés aux étudiants de la deuxième année LMD Mathématiques qui ont déjà fait leur cours en algèbre linéaire de la première année et l'algèbre 3. Il est constitué de l'algèbre 4 qui traite le sujet de la réduction des formes quadratiques (la diagonalisation des endomorphismes réels auto adjoints, donc la diagonalisation des matrices symétriques) est leurs applications aux quelques aspects mathématiques.

La réduction des formes quadratiques est un outil puissant pour la détermination de plusieurs notions de l'algèbre linéaire comme le rang d'une matrice, la puissance d'une matrice, l'inverse d'une matrice inversible, etc., en plus aux notions de la géométrie comme l'orthogonalité. Comme elle a plusieurs applications dans d'autres aspects mathématiques, comme la géométrie algébrique la théorie des nombre, la topologie et les équations aux dérivées partielles.

Le but de ce polycopié est d'exposer un résumé du cours d'algèbre 4 et de donner un nombre important d'exercices corrigés.

Le polycopié est divisé en cinq chapitres, chaque chapitre est constitué de trois section : un résumé du cours, une série d'exercices et le corrigé de ces exercices.

Le premier chapitre expose quelques notions et théorèmes nécessaires des formes linéaires et la dualité et des exercices avec corrigé.

Le deuxième chapitre traite les formes bilinéaires en général et en particulier les formes bilinéaires symétriques et leur présentation matricielle dans des différentes bases, les noyaux des formes bilinéaires, l'orthogonalité pour une forme bilinéaire et des exercices avec corrigé.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des espace euclidiens, produit scalaire, ... et la donnée d'une série d'exercices avec corrigé.

Dans le quatrième chapitre on donne un résumé sur les formes quadratiques associées aux formes bilinéaires symétriques, les notions de l'orthogonalité, les vecteurs isotropes, les formes quadratiques définies, non définies, positives, négatives. On présente les différentes méthodes de la réduction d'une forme quadratique. On termine par des exercices avec corrigé et quelques examens

Le cinquième chapitre expose quelques notions de l'espace Hermitien que les étudiants doivent connaitre pour leurs études de géométrie, topologie et la théorie des opérateurs linéaires. Des exercices avec corrigé type sont donnés pour éclairée les notions théoriques.

Dans toute la partie, on désigne par E un espace vectoriel sur un corps K de dimension finie n (sauf exception), où K est le corps des réels ou les complexes.

Cet ouvrage est à but pédagogique, c'est donc un document rédigé d'une manière simple de sorte que le lecteur puisse avoir une bonne conception des notions algébriques et les appliqua à la résolution de différents problèmes et exercices qui y sont traitées.

Des erreurs peuvent surgir après la lecture de ce document, des erreurs qui peuvent être dues par de multiples causes (l'erreur est humaine), je tiens à remercier vivement et d'avance toute personne qui me communiquera toute critique constructive pour l'élaboration de ce document.

Chapitre 1

Formes linéaire et dualité

1.1 Résumé du cours

1.1.1 Formes linéaires, espace dual

Dans tout ce chapitre K désignera un corps commutatif et E un K-espace vectoriel (de dimension finie ou non)

Définition 1.1. Soit E un K espace vectoriel. On appelle **forme linéaire** sur E toute application linéaire de E dans K.

On appelle **espace dual** de E, noté E^*, l'espace vectoriel des formes linéaires sur E. Autrement dit, $E^* = L(E,K)$ et $\varphi \in E^*$ signifie que $\varphi : E \to K$ est une application linéaire telle que : $\forall (x,y) \in E^2$ et $\forall (\alpha,\beta) \in K^2, \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$.

Proposition 1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in K^n$. L'application de K^n dans K qui à tout $x = (x_1, ..., x_n) \in K^n$ associe le scalaire $\varphi(x) = \sum_1^n \lambda_j x_j$, est une forme linéaire sur K^n.

(b) Réciproquement, pour toute forme linéaire φ sur K^n, il existe un $n-$uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in K^n$ tel que pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in K^n$, on ait $\varphi(x) = \sum_1^n \lambda_j x_j$.

Proposition 1.2. Soit E un $K-$espace vectoriel de dimension finie. Alors son dual E^* est de dimension finie et $\dim E = \dim E^*$.

1.1.2 Hyperplans

Définition 1.2. Soit E un $K-$espace vectoriel. On appel **hyperplan** de E, le noyau de toute forme linéaire sur E autre que la forme nulle.

Autrement dit, une partie H de E est un hyperplan de E s'il existe $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \ker(\varphi)$. On dit alors que la relation $\varphi(x) = 0$ est une équation de l'hyperplan H.

Proposition 1.3. Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) H est un hyperplan de E.

(b) Il existe dans E une droite vectorielle D **supplémentaire** de H telle que $E = H \oplus D$.

Si E est de dimension finie, les conditions précédentes sont équivalentes à

(c) $\dim(H) = \dim(E) - 1$ (autrement dit, H est de codimension 1).

(d) Toute droite vectorielle de E engendrée par un vecteur n'appartenant pas à H est un supplémentaire de H.

Remarque 1.1. Si E est de dimension finie n et $B = (e_j)_{j=1}^n$ une base de E. Relativement à la base B un hyperplan H de E admet une équation unique, de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$ où on a noté $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées des vecteurs $x \in E$ par rapport à B.

Corollaire 1.1. Deux formes linéaires non nulles sur un espace vectoriel E sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau.

1.1.3 Base duale

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $n \geq 1$.

Proposition 1.4. Soit $B = (e_j)_{j=1}^n$ une base de E. La famille des formes coordonnées $B^* = (e_i^*)_{i=1}^n$ est une base de l'espace dual E^*, appelée base duale de B.

De plus, pour tout $i, j \in [1, n]$, on a les relations (d'orthogonalité) de Kronecker :

$$e_i^*\left(e_j\right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Corollaire 1.2. Soient $B = (e_j)_{j=1}^n$ une base de E et $B^* = (e_i^*)_{i=1}^n$ sa base duale, alors on a les relations suivantes :

- $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i$.
- $\forall \varphi \in E^*, \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$.
- $\forall f \in L(E), a_{ij} = e_i^*\left(f\left(e_j\right)\right)$, où $\left(a_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n} = Mat_B(f)$.

Proposition 1.5. (a) Si φ est une forme linéaire non nulle sur E, il existe un vecteur $x \in E$ (non nul) tel que $\varphi(x) = 1$.

(b) Si x est un vecteur de E non nul, il existe une forme linéaire $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = 1$.

Proposition 1.6. Toute base de E^* est la base duale d'une unique base de E, appelée **base préduale**.

Proposition 1.7. (**Changement de base duale**)

Soient B_1 et B_2 deux bases de E, et soit P la matrice de passage de B_1 à B_2. Alors la matrice de passage de B_1^* à B_2^* est ${}^tP^{-1}$.

Corollaire 1.3. (**Calcul pratique de la base duale**)

Soient $B_0 = (e_i)_{i=1}^n$ la base canonique de E et $B_0^*= (e_i^*)_{i=1}^n$ sa base duale. Soit $B = (v_i)_{i=1}^n$ une autre base de E et $B^* = (v_i^*)_{i=1}^n$ sa base duale. Les vecteurs v_i (respectivement v_i^*) étant exprimés dans la base B_0 (respectivement B_0^*). Alors

$$Mat_{B_0^*}(B^*) =^t \left(Mat_{B_0}(B)\right)^{-1}.$$

1.1.4 Bidual d'un espace vectoriel

Définition 1.3. Soit E un espace vectoriel. Le dual de E^*, noté E^{**} est appelé bidual de E.

Proposition 1.8. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et considérons l'application

$$\begin{aligned} \Phi : E &\to E^{**} \\ x &\mapsto \widetilde{x} : E^* \to K \\ &\qquad\qquad \varphi \mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Cet isomorphisme permet d'identifier le bidual E^{**} à E.

1.2 Exercices

Exercice 1.1. 1) Déterminer la forme linéaire f définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que : $f(1,1,1) = 0, f(2,0,1) = 1, f(1,2,3) = 4$.
2) Donner un hyperplan H de $\mathbb{R}^3$, une base de H et tous ses supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1.2. Dans $E = \mathbb{R}^4$, muni de sa base canonique $B_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, on considère l'application :

$f : E \to R, f(x) = x_1 + x_2 - x_3 - x_4$.

1) Montrer que f est une forme linéaire.
2) Soit F un sous-ensemble de E tel que : $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$. Justifier que F est un hyperplan de E, en déduire sa dimension, puis en donner une base, toutes ses équations et tous ses supplémentaires dans E.
3) Soit un réel $m \in \mathbb{R}$ et $v = (m, m+1, 2m, m-2)$: pour quelles valeurs de m les sous-espaces F et $\triangle = vect(v)$ sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice 1.3. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la base $B = (1, X, \ldots, X^n)$. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, on définit une forme linéaire f_i sur E par

$$\forall j \in \{0, \ldots, n\}, f_i(X^j) = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases}$$

1. Démontrer que $(f_0, \ldots, f_n)$ est une base de E^*.
2. On considère les deux éléments ϕ et ψ de E^* définis par :

$$\forall P \in E, \quad \phi(P) = P(1), \quad \psi(P) = P\prime(0). \tag{1.1}$$

Déterminer les coordonnées de chacune des formes ϕ et ψ dans la base $(f_0, \ldots, f_n)$.

3. $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est-il un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$? Si oui, en donner tous ses supplémentaires.
4. $\mathbb{R}^{n-1}$ est-il un hyperplan de $\mathbb{R}^n$? En déduire une caractérisation de ses hyperplans

Exercice 1.4. I) Soient f_1, f_2 les deux éléments de $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = \left(\mathbb{R}^2\right)^*$ définis par $f_1(x,y) = x + y$ et $f_2(x,y) = x - y$.

a) Montrer que $B^* = (f_1, f_2)$ forme une base de $\left(\mathbb{R}^2\right)^*$.

b) Exprimer dans la base B^* les formes linéaires suivantes : $g(x,y) = x, h(x,y) = 2x - 6y$.

II) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soient

f_1^*, f_2^*, f_3^* des formes linéaires sur E définies par $f_1^* = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*, f_2^* = -e_1^* + 2e_3^*, f_3^* = e_1^* + 3e_2^*$.

Montrer que (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est une base de E^* et déterminer sa base pré-duale (f_1, f_2, f_3) de E.

Exercice 1.5. 1) Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère : $F = \{P \in E : P(1) + P\prime(0) = 0\}$. Justifier que F est un hyperplan de E, en déduire sa dimension, puis en donner une base et tous ses supplémentaires dans E.
2) Soit $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On définit $F = \{f \in E : \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = f(\frac{\pi}{2})\}$.
(a) Montrer que F est un hyperplan de E.
b) Soit $D_1 = vect\{sin(t)\}$ et $D_2 = vect\{cos(t)\}$. D_1 et D_2 sont-ils des supplémentaires de F.
3) On considère les formes linéaires φ_1, φ_2 et φ_3 définies sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_3 \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \varphi_3(x_1, x_2, x_3) = -4x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$$

Montrer que $B^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de l'espace dual $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$. Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base B pré-duale de B^*.

Exercice 1.6. 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$. Pour $a \in \mathbb{C}$, on définit l'application φ_a par : $\forall P \in E, \varphi_a(P) = P(a)$. Montrer que pour tout $a \in E, \varphi_a \in E^*$.
2. Soient $a_0, ..., a_n$ $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille $\left(\varphi_{a_0}, ..., \varphi_{a_n}\right)$ est une base de E^* et déterminer sa pré-duale.
3. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \int_0^1 P(t)dt = \lambda_0 P(a_0) + ... + \lambda_n P(a_n)$ puis donner la valeur des λ_i sous la forme d'une intégrale.

Exercice 1.7. Dans $E = \mathbb{R}^5$, muni de sa base canonique $B_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$. On considère l'ensemble F_1 des vecteurs (x, y, z, s, t) de E vérifiant

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4s + 5t = 0 \\ x + y + z + s + t = 0 \\ 5x + 4y + 3z + 2s + t = 0 \end{cases}$$

1. Justifier que F_1 est un s.e.v de E et que $2 \leq dim(F) \leq 4$.
2. Les vecteurs $u = (6, -9, 1, 1, 1)$ et $v = (2, -1, 1, -2, 1)$ appartiennent-ils à F_1 ?
3. Déterminer une base de F_1, en déduire sa dimension.
4. Déterminer un supplémentaire G_1 de F_1 dans E, en donner un système

d'équations.
5. On pose $F_2 = Vect(e_1, e_2)$. Déterminer $F_1 \bigcap F_2$.

Exercice 1.8. (Supplémentaire)

On se propose de prouver que pour toute forme linéaire φ sur $M_n(K)$ existe une unique matrice A de $M_n(K)$ telle que : $\forall X \in M_n(K)$, $\varphi(X) = tr(AX)$.
1. Soit $A \in M_n(K)$. Justifier que l'application φ_A de $M_n(K)$ dans K définie par : $\varphi_A(X) = tr(AX)$ est une forme linéaire sur $M_n(K)$.
2. On note ϕ l'application de $M_n(K)$ dans son dual $(M_n(K))^*$ définie par : $\phi(A) = \varphi_A$.
(a) Justifier la linéarité de ϕ.
(b) Montrer que $ker(\phi) = O_n$. [Indication : Calculer $\varphi_A(E_{ij})$.]
(c) En déduire que ϕ est un isomorphisme, puis conclure (c'est-à-dire : décrire $(M_n(K))^*$).

Exercice 1.9. (Supplémentaire)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $(f_1,...,f_n)$ une famille d'éléments de E^*. Notons $\varphi : E \longrightarrow K^n$ l'application $x \longmapsto (f_1(x),...,f_n(x))$.
1. On suppose que la famille $(f_1,...,f_n)$ est une base de E^*.

a) Démontrer que φ est injective. En déduire qu'elle est bijective.

b) Démontrer qu'il existe une base B de E telle que $\varphi(B)$ soit la base canonique de K^n.

2. En déduire que toute base de E^* est duale d'une base de E.
3. Démontrer que l'on a les équivalences suivantes :

φ est injective si et seulement si la famille $(f_1,...,f_n)$ est génératrice ;

φ est surjective si et seulement si la famille $(f_1,...,f_n)$ est libre.

Exercice 1.10. (Supplémentaire)

Soit K un corps commutatif et $E = M_n(K)$. Soit $\left(E_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de E.
1. Montrer que pour tout $i \neq j$, $E_{ij}E_{ji} = E_{ii}$, $E_{ij}E_{jj} = E_{ij}$ et $E_{jj}E_{ij} = 0$.
2. Soit φ une forme linéaire de E telle que $\varphi(AB) = \varphi(BA)$, pour tout $(A,B) \in E^2$.

a) Montrer que l'application trace "TR" est un exemple de telle forme linéaire.

b) Montrer que $\varphi(E_{ii}) = \varphi\left(E_{jj}\right)$, pour tout $i,j \in \{1,2,...,n\}$. On note cette valeur λ.

c) Montrer que $\varphi\left(E_{ij}\right) = 0$ pour tout $i \neq j$.

d) En déduire que $\varphi(A) = \lambda Tr(A)$, pour tout $A \in E$.

3. Soit φ une forme linéaire de E. Montrer qu'il existe une unique matrice A telle que :

$$\varphi(M) = Tr(AM),\ \forall M \in E.$$

Exercice 1.11. (Supplémentaire)

Pour toute matrice $M \in E = M_n(\mathbb{R})$, on définit la trace de la matrice M par :

$$Tr(M) = \sum_{n}^{n} m_{ii} = m_{11} + ... + m_{nn},$$

somme des termes de la diagonale de $M = (m_{ii})_n$.

1. Montrer que Tr est une forme linéaire sur $E = M_n(\mathbb{R})$.

2. On pose $H = \{M \in E \ : \ Tr(M) = 0\}$. Montrer que H est un hyperplan de E. Un cas particulier : si $n = 2$, donner une base de H.

3. Soit une matrice $A \in E$ telle que $Tr(A) \neq 0$.
On définit l'application Φ :

$$\Phi : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto \Phi(M) = Tr(A)M - Tr(M)A. \end{cases}$$

Montrer que Φ est un endomorphisme de $E = M_n(\mathbb{R})$.

4. Prouver $ker(\Phi) = Vect(A)$.

5. Montrer que H et $ker(\Phi)$ sont des sous-espaces supplémentaires de E.

6. Montrer : $Im(\Phi) = H$.

7. Pour quelles matrices A l'application Φ est-elle un projecteur de E ? Lorsque c'est le cas, préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 1.12. (Supplémentaire)

Soit un entier $n \in \mathbb{N}$ et $n+1$ réels $a_0, a_1, ..., a_n$ vérifiant $a_0 < a_1 < ... < a_n$. Sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$, on définit les applications φ_i par, pour tout $i \in \{0, 1, ..., n\}$:

$$\forall P \in E, \ \varphi_i(P) = P(a_i).$$

a) Montrer que, pour chaque $i \in \{0, 1, ..., n\}$, φ_i est une forme linéaire non nulle sur l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$.

b) Pour tout $i_0 \in \{0, 1, ..., n\}$, on définit le polynôme (polynôme d'interpolation de Lagrange) :

$$L_{i_0}(X) = \frac{\Pi_{k=0}^{n}(X - a_k)}{\Pi_{k=0}^{n}(a_{i_0} - a_k)}, \ k \neq i_0$$

Si $n = 2$, on a donc

$$L_0(X) = \frac{(X-a_1)(X-a_2)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}, \ L_1(X) = \frac{(X-a_0)(X-a_2)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)}, \ L_2(X) = \frac{(X-a_0)(X-a_1)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)}.$$

Pour tout $(i,j) \in \{0,1,...,n\}^2$, simplifier $\Phi_j(L_i(X))$.

c) Montrer que la famille $(\varphi_0,\ \varphi_1,\ ...,\ \varphi_n)$ est une famille libre de vecteurs de $L(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des formes linéaires sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.

d) Application :

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on définit $\psi(P) = \int_0^2 P(t)dt$.

• Vérifier que ψ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

• Montrer qu'il existe, sans les calculer, trois constantes α, β et γ uniques, telles que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \int_0^2 P(t)dt = \alpha P(0) + \beta P(1) + \gamma P(2). \tag{1.2}$$

• Maintenant, calculer les valeurs de ces trois constantes α, β et γ.

• Vérifier que la formule (1.2) est encore valable pour tout polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$.

• Une application numérique : calculer $\int_0^2 \left(t^3 - 3t^2 + 2t + 1\right)dt$.

1.3 Corrigé d'exercices

Solution. 1.1 1) Si f est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$, alors

$$f(x,y,z) = ax + by + cz,$$

d'où

$$\begin{cases} f(1,1,1) = 0 \\ f(2,0,1) = 1 \\ f(1,2,3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 0 \\ 2a+c = 1 \\ a+2b+3c = 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases},$$

d'où, $f(x,y,z) = -x - 2y + 3z$.

2) Soit H un hyperplan, d'où

$$\begin{aligned} H &= \ker(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x - 2y + 3z = 0\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y + 3z\right\} \\ &= \{(x,y,z) = (-2y+3z, y, z) = y(-2,1,0) + z(0,0,1); y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect\{v_1 = (-2,1,0), v_2 = (0,0,1)\}. \end{aligned}$$

Puisque $\dim(H) = 2$, d'où $\{v_1 = (-2,1,0), v_2 = (0,0,1)\}$ est une base de H.

Supplémentaire de H : Le supplémentaire de H est une droite vectorielle D telle que :

$$H \oplus D = \mathbb{R}^3, \qquad D = Vect\{v\}; v \in \mathbb{R}^3, v \notin H,$$

si $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, alors $-x - 2y + 3z \neq 0$, d'où

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x - 2y + 3z \neq 0\right\}.$$

Solution. 1.2 1) Montrons que f est linéaire : Il est facile de vérifier que

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^4, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y),$$

d'où f est une forme linéaire.

2) On remarque que :

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0\} = Ker(f).$$

Puisque $f(1,0,0,0) = 1 \neq 0$, d'où $f \neq 0$. Donc, F est le noyau d'une forme linéaire non nulle f, alors F est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ de dimension $dim(F) = 3$.
D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} F &= \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -x_2 + x_3 + x_4\right\} \\ &= \{(-x_2 + x_3 + x_4, x_2, x_3, x_4) = x_2(-1,1,0,0) + x_3(1,0,1,0) + x_4(1,0,0,1); x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect\{(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)\}, \end{aligned}$$

puisque $\dim(F) = 3$, d'où $\{(-1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)\}$ est une base de F.

Les équations de F sont de la forme

$$\alpha(x_1 + x_2 - x_3 + -x_4) = 0, \alpha \in \mathbb{R}^*.$$

Les suplémentaires de F : Un suplémentaire de F est une droite vectorielle D de $\mathbb{R}^4$ engendrée par un vecteur n'appartenant pas à F. Donc

$$D = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \neq 0\right\},$$

par exemple, $D = vect\{e_1 = (1,0,0,0)\}$.
3) Si $v \notin F$ alors $F \oplus \Delta = E$. Or $v \in F \Leftrightarrow m + m + 1 - 2m + m - 2 = m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$. Pour $m \neq 1$, on a $F \oplus \Delta = E$. Si $m = 1$, le générateur de Δ est dans F donc $\Delta \subset F$ et ainsi $F \cap \Delta = \Delta \neq \{0\}$, la somme n'est pas directe, ils ne sont pas supplémentaires.

Solution. 1.3 1) Par définition de la base duale, on déduit que $B^* = (f_0, \ldots, f_n)$ est la base duale de la base B, donc c'est une base de l'espace dual E^*.
2) On a : $\forall P \in E, P(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$, d'où

$$\phi(P) = P(1) = \sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{j=0}^{n} f_j(P),$$

alors,

$$\phi = \sum_{j=0}^{n} f_j = f_0 + ... + f_n = (1, ..., 1)_{B^*}.$$

De même,

$$\psi(P) = P'(0) = a_1 = f_1(P),$$

d'où

$$\psi = f_1 = (0,1,0,...,0)_{B^*}.$$

3) Il est évident que $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$, est-il un s.e.v. ?

On a : $P = 0 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et $\forall P,Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\deg(\alpha P + Q) \leq n-1$, donc $\alpha P + Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'où $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus la famille $\left(1, X, ..., X^{n-1}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc $\dim\left(\mathbb{R}_{n-1}[X]\right) = n$.

N.B. Pour monter que $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est un sous-espace de $\mathbb{R}_n[X]$, il suffit de montrer que c'est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$. En fait, l'application

$$\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}, \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = a_n,\ P(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j,$$

est une forme linéaire non nulle ($\varphi(X^n) = 1 \neq 0$) et $Ker(\varphi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Les supplémentaires de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$: On a : $\mathbb{R}_{n-1}[X] \oplus D = \mathbb{R}_n[X]$, où $D = vect\{P\}, P \notin \mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'où $P(X) = a_n X^n, a_n \neq 0$, il suffit de prendre $a_n = 1$, on a : $D = vect\{X^n\}$.

4) On remarque que $\mathbb{R}^{n-1} \not\subset \mathbb{R}^n$, donc $\mathbb{R}^{n-1}$ n'est pas un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

Une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ est de la forme :

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

où $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et donc les hyperplans de $\mathbb{R}^n$ sont de la forme

$$\{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + ... a_n x_n = 0\}.$$

Solution. 1.4

I) a) $f_1(x;y) = x + y$ et $f_2(x;y) = x - y$, d'où

$$f_1 = e_1^* + e_2^*,\ f_2 = e_1^* - e_2^*,$$

où $\left\{e_1^*, e_2^*\right\}$ est la base canonique duale de $\left(\mathbb{R}^2\right)^*$. Donc, on peut vérifier que pour tous $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

d'où f_1, f_2 sont libres, de plus $card(B^*) = \dim\left(\mathbb{R}^2\right)^* = 2$. En conséquence $B^* = \{f_1, f_2\}$ est une base de $\left(\mathbb{R}^2\right)^*$.
b) On a :

$$\begin{cases} g(x,y) = x \\ h(x,y) = 2x - 6y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} g = e_1^* \\ h = 2e_1^* - 6e_2^* \end{cases}.$$

D'autre part on a :

$$\begin{cases} f_1 = e_1^* + e_2^* \\ f_2 = e_1^* - e_2^* \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e_1^* = \frac{1}{2}(f_1 + f_2) \\ e_2^* = \frac{1}{2}(f_1 - f_2) \end{cases}.$$

D'où

$$\begin{cases} g = \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2 \\ h = -2f_1 + 4f_2 \end{cases}$$

II) ▲ On peut montrer facilement que f_1^*, f_2^*, f_3^* sont libres et puisque $card\left\{f_1^*, f_2^*, f_3^*\right\} = \dim E^* = 3$, alors $\left\{f_1^*, f_2^*, f_3^*\right\}$ est une base de E^*.
▲ Déterminant la base pré-duale $\{f_1, f_2, f_3\}$ de la base $\left\{f_1^*, f_2^*, f_3^*\right\}$:
1$^{\text{ère}}$ méthode : Soit $M_{B_0}(B)$ et $M_{B_0^*}(B^*)$ les matrices de passage de B_0 à B et de B_0^* à B^* respectivement, où $B_0 = (e_1, e_2, e_3), B = (f_1, f_2, f_3), B_0^* = \left(e_1^*, e_2^*, e_3^*\right), B^* = \left(f_1^*, f_2^*, f_3^*\right)$. Donc

$$M_{B_0}(B) = \left(M^{-1}\right)^T = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \text{ où } M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où $f_1 = \frac{1}{13}(6, -2, 3), f_2 = \frac{1}{13}(-3, 1, 5), f_3 = \frac{1}{13}(-2, 5, -1)$.
2$^{\text{ème}}$ méthode : f_1, f_2, f_3 sont des vecteurs de E, donc ils s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} f_1 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \\ f_2 = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 \\ f_3 = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3 \end{cases}$$

Calculons f_1 : On a

$$\begin{cases} f_1^*(f_1) = 1 \\ f_2^*(f_1) = 0 \\ f_3^*(f_1) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6}{13} \\ x_2 = \frac{-2}{13} \\ x_3 = \frac{3}{13} \end{cases}$$

D'où $f_1 = \frac{1}{13}(6, -2, 3)$. Par le même procédé on calcule f_2 et f_3.

Solution. 1.5 1) $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \{P \in E : P(1) + P'(0) = 0\} \subset E$. Montrant que F

est un hyperplan de E. Il suffit de trouver une forme linéaire non nulle φ telle que $F = \ker(\varphi)$. On définit l'application

$$\begin{array}{ccc} \varphi & : & E \longrightarrow \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \varphi(P) = P(1) + P'(0) \end{array}$$

Il est facile de vérifier que :

$$\forall P, Q \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \varphi(\alpha P + \beta Q) = \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q).$$

Donc, φ est une forme linéaire. De plus, on a : pour $P(x) = X$, $\varphi(X) = 2 \neq 0$, alors φ est une forme linéaire non nulle et

$$\ker(\varphi) = \{P \in E : \varphi(P) = P(1) + P'(0) = 0\} = F.$$

D'où F est un hyperplan de E. $\dim(F) = \dim(E) - 1 = 3 - 1 = 2$.
Déterminant une base de F : $\forall P \in E$, $P(X) = a + bX + cX^2$, d'où

$$F = \{P \in E : \varphi(P) = P(1) + P'(0) = 0\} = \{P \in E : a + 2b + c = 0\}.$$

Alors, $P(X) = -2b - c + bX + cX^2 = b(-2+X) + c(-1+X^2)$. Donc, $F = Vect\left\{-2 + X, -1 + X^2\right\}$.
Et puisque $\dim(F) = 2$, alors $\left\{-2 + X, -1 + X^2\right\}$ est une base de F.
Supplémentaire de F : Tout supplémentaire de F est une droite vectorielle D engendré par un vecteur non nul de E n'appartenant pas à F. D'où

$$D = \left\{P \in E \backslash \{0\} : P(X) = a + bX + cX^2;\ a + 2b + c \neq 0\right\}.$$

2) $F = \left\{f \in E : \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = f(\frac{\pi}{2})\right\}$.

(a) Montrons que F est un hyperplan de E : Soit l'application :

$$\begin{array}{rcl} \psi & : & E \longrightarrow \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \psi(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt - f(\frac{\pi}{2}) \end{array}$$

On peut montrer que ψ est une forme linéaire c-à-d : $\forall \mathbb{R} : \psi(\alpha P + \beta Q) = \alpha\psi(f) + \beta\psi(g)$. De plus, pour $f(t) = 1$, $\psi(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 1 \neq 0$. D'où ψ est une forme linéaire non nulle et

$$\ker(\psi) = \left\{ f \in E : \psi(f) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt - f(\frac{\pi}{2}) = 0 \right\} = F.$$

D'où F est un hyperplan de E.

b) Soit $D_1 = vect\{\sin(t)\}$ et $D_2 = vect\{\cos(t)\}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \psi(\sin(t)) & = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt - \sin(\frac{\pi}{2}) = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - 1 = 0 \\ \psi(\cos(t)) & = & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt - \cos(\frac{\pi}{2}) = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - 0 = 1 \neq 0. \end{array}$$

D'où $\sin(t) \in F, \cos(t) \notin F$. Donc D_1 n'est pas supplémentaire de F, par contre D_2 est supplémentaire de F.
3) La réponse à cette question découle de la même méthode utilisée dans Ex. 4 partie II.

Solution. 1.6 1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(P, Q) \in E^2$.

$$\varphi_a(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(a) = \lambda P(a) + \mu Q(a) = \lambda \varphi_a(P) + \mu \varphi_a(Q).$$

Donc, φ_a est une forme linéaire sur E.
2. On a déjà $card\left(\varphi_{a_j}\right)_{0 \le j \le n} = n+1 = dim(E) = dim(E^*)$. Il suffit donc de vérifier que la famille $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0 \le j \le n}$ est libre.
Pour $k \in [0, n]$, on pose $P_k(X) = \Pi_{j \neq k} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$. Chaque P_k est un élément de E et de plus

$$\forall (j,k) \in [0,n]^2, \varphi_{a_j}(P_k) = \delta_{j;k} = \begin{cases} 1 \text{ si } j \neq k \\ 0 \text{ si } j = k \end{cases} \qquad (*)$$

Soit alors $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_{a_j} &= 0 \Longrightarrow \forall P \in E, \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_{a_j}(P) = 0 \Longrightarrow k \in [0,n], \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_{a_j}(P_k) = 0 \\ &\Longrightarrow k \in [0,n], \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \delta_{j;k} = 0 \Longrightarrow k \in [0,n], \lambda_k = 0.\end{aligned}$$

Ceci montre que la famille $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\le j\le n}$ est libre et donc une base de E^*. Les égalités $(*)$ montrent alors que la pré-duale de la base $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\le j\le n}$ de E^* est la famille $(P_k)_{0\le k\le n}$.
3. Pour $P \in E$, posons $\varphi(P) = \int_0^1 P(t)dt$, où φ est une forme linéaire sur E et donc, puisque la famille $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\le j\le n}$ est une base de E^*, il existe $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\varphi = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_{a_j}$ ou encore il existe $(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que pour tout $P \in E, \int_0^1 P(t)dt = \lambda_0 P(a_0) + ... + \lambda_n P(a_n)$ (les λ_j étant indépendants de P).
En appliquant cette dernière égalité au polynôme $P_k, 0 \le k \le n$, on obtient

$\lambda_k = \int_0^1 P_k(t)dt = \int_0^1 \Pi_{j\ne k} \frac{t-a_j}{a_k-a_j} dt$. D'où

$$\forall P \in E, \int_0^1 P(t)dt = \lambda_0 P(a_0) + ... + \lambda_n P(a_n), \text{ où } \forall k \in [0,n], \lambda_k = \int_0^1 \Pi_{j\ne k} \frac{t-a_j}{a_k-a_j} dt.$$

Solution. 1.7

1. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in E^*$ les 3 formes linéaires définies par

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,y,z,s,t) &= x + 2y + 3z + 4s + 5t \\ \varphi_2(x,y,z,s,t) &= x + y + z + s + t \\ \varphi_3(x,y,z,s,t) &= 5x + 4y + 3z + 2s + t\end{aligned}$$

On a alors $F_1 = ker\varphi_1 \cap ker\varphi_2 \cap ker\varphi_3$. Ainsi, F_1 est bien un s.e.v de E. Soit $r = rang(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Puisque les formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont non nulles, on voit que $1 \le r \le 3$. On sait que $dim(F_1) = n - r$ et donc $2 \le dim(F_1) \le 4$.

2. On remarque que $u \in F_1$ et que $v \notin F_1$ puisque $2 - 1 + 1 - 2 + 1 = 1 \ne 0$.

3. On a

$$\left\{\begin{array}{c} x + 2y + 3z + 4s + 5t = 0 \\ x + y + z + s + t = 0 \\ 5x + 4y + 3z + 2s + t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x + 2y + 3z + 4s + 5t = 0 \\ -y - 2z - 3s - 4t = 0 \\ -6y - 12z - 18s - 24t = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x + 2y + 3z + 4s + 5t = 0 \\ -y - 2z - 3s - 4t = 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, les vecteurs de F_1 s'écrivent

$$\begin{pmatrix} z+2s+3t \\ -2z-3s-4t \\ z \\ s \\ t \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On voit facilement que les 3 vecteurs u_1, u_2, u_3 ci dessus forme une base de F_1.
Ainsi $dim(F_1) = 3$.

4. Vu la forme de u_1, u_2, u_3, on voit que $Vect(e1, e2)$ forme un supplémentaire de F_1 dans E. En effet, la famille $\Big\{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(1,-2,1,0,0),(2,-3,0,1,0),(3,-4,0,0,1)\Big\}$ est clairement de rang 5 (famille libre).

5. On a vu que F_2 était un supplémentaire de F_1, donc $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Chapitre 2

Formes bilinéaires sur un espace vectoriel de dimension finie

Dans tout ce chapitre K désignera un corps commutatif et E un K-espace vectoriel de dimension finie.

2.1 Résumé du cours

2.1.1 Définitions

Définition 2.1. Une application

$$\begin{aligned} b : E \times E &\to K \\ (x,y) &\mapsto b(x,y) \end{aligned}$$

est dite forme bilinéaire sur E lorsqu'elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables, c-à-d

— Pour $y \in E$ fixe, l'application $x \mapsto b(x,y)$ est linéaire ;
— Pour $x \in E$ fixe, l'application $y \mapsto b(x,y)$ est linéaire.

Autrement dit, pour tout $x,y,z \in E, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$:

$$\begin{aligned} b(\alpha_1 x + \beta_1 y, z) &= \alpha_1 b(x,z) + \beta_1 b(y,z). \\ & \quad et \\ b(x, \alpha_2 y + \beta_2 z) &= \alpha_2 b(x,y) + \beta_2 b(x,z). \end{aligned}$$

► Pour toute forme bilinéaire b sur E on a : $\forall x \in E, b(x,0) = b(0,x) = 0$.

Définition 2.2. Soit $b : E \times E \to K$ une forme bilinéaire sur E. On dit que b est :
► Symétrique si pour tout $x,y \in E, b(x,y) = b(y,x)$.

- ▶ Antisymétrique si pour tout $x, y \in E, b(x,y) = -b(y,x)$.
- ▶ Alternée si pour tout $x \in E, b(x,x) = 0$.

Proposition 2.1. Toute forme bilinéaire alternée sur E est antisymétrique.

La réciproque est vraie si $car(K) \neq 2$. ($car(K)$ = Caractéristique de K)

Notation 2.1. On note par $L_2(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur E et par $S_2(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E et par $A_2(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques sur E.

Proposition 2.2. L'ensemble $L_2(E)$ muni de la lois interne (+) telle que :$(b_1 + b_2)(x,y) = b_1(x,y)+b_2(x,y)$, et de la multiplication par un scalaire (.) (lois externe) telle que : $(\lambda.b)(x,y) = \lambda.b(x,y), \lambda \in K$ est un K-espace vectoriel.

L'ensemble $S_2(E)$ et $A_2(E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $L_2(E)$.

Proposition 2.3. $S_2(E)$ et $A_2(E)$ sont deux supplémentaires de $L_2(E)$. c-à-d. $L_2(E) = S_2(E) \oplus A_2(E)$.

2.1.2 Matrice associée à une forme bilinéaire

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $B = (e_1, ..., e_n)$ et b une forme bilinéaire sur E. Pour tout $x, y \in E$, on a : $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$.

Posons X, Y les matrices colonnes des coordonnées de x et y, donc $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, d'où on a :

$$\begin{aligned} b(x,y) &= b(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i b(e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j) \quad (\textit{linéarité par rapport à } x) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j b(e_i, e_j) \quad (\textit{linéarité par rapport à } y) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j b(e_i, e_j). \end{aligned}$$

Si on suppose $b(e_i, e_j) = a_{ij}$, on obtient $b(x,y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j$. La matrice $M = \left[a_{ij}\right]_{1 \leq i,j \leq n}$ est appelée la matrice associée à la forme bilinéaire b.

L'expression précédente s'écrit sous la forme matricielle suivante

$$\begin{aligned} b(x,y) &= x_1 \sum_{i,j=1}^{n} a_{1j} y_j + ... + x_n \sum_{i,j=1}^{n} a_{nj} y_j \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

d'où, $b(x,y) =^t XMY$.

Si b est symétrique alors $b(e_i,e_j) = b(e_j,e_i)$. c.à.d $a_{ij} = a_{ji}$, donc M est une matrice symétrique.

Dans l'autre sens si M est une matrice symétrique dans $M_n(K)$ alors l'application b définie par $b(x,y) =^t XMY$, telles que X,Y sont des matrices colonnes des coordonnées de x et y respectivement dans la base B est une forme bilinéaire symétrique.

2.1.3 Changement de base

Soient B_1, B_2 deux bases de E et P la matrice de passage de B_1 à B_2, si X_1 et Y_1 sont les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y respectivement dans B_1 et X_2, Y_2 sont dans B_2 on a : $X_1 = PX_2,\ Y_1 = PY_2$.

Théorème 2.1. *Soit b une forme bilinéaire sur E alors $M_{B_2}(b) =^t P.M_{B_1}(b).P$.*

Remarque 2.1. Soit $M_B(b)$ la matrice associée à b dans la base B telle que $M_B(b) = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

1. Si b est symétrique alors $a_{ij} = b(e_i,e_j) = b(e_j,e_i) = a_{ji}$, donc $M_B(b)$ est symétrique c.à.d ${}^tM_B(b) = M_B(b)$.

2. Si b est antisymétrique, alors : ${}^tM_B(b) = -M_B(b)$.

3. Toute forme bilinéaire (si $car(K) \neq 2$) sur E se décompose en la somme d'une forme bilinéaire symétrique et une forme bilinéaire antisymétrique.

$$b(x,y) = \frac{b(x,y)+b(y,x)}{2} + \frac{b(x,y)-b(y,x)}{2} = \underbrace{b_1(x,y)}_{\in S_2(E)} + \underbrace{b_2(x,y)}_{\in A_2(E)}.$$

Remarque 2.2. Soit b une forme bilinéaire sur un $K-$ espace vectoriel E de dimension finie n muni d'une base B et $M = mat_B(b)$. On a

$$M = \frac{M+^tM}{2} + \frac{M-^tM}{2} = M_1 + M_2,$$

il est facile de vérifier que M_1 est une matrice symétrique et M_2 est une matrice antisymétrique. Ainsi M_1 est la matrice de la partie symétrique b_1 de b et M_2 est la matrice de la partie antisymétrique b_2 de b.

2.1.4 Noyau et rang d'une forme bilinéaire

Définition 2.3. Soit $b : E\times E \longmapsto K$ une forme bilinéaire symétrique ou alternée.

On appelle le noyau de b l'ensemble

$$\begin{aligned} \ker(b) &= \{x \in E, \forall y \in E : b(x,y) = 0\} \\ &= \{x \in E,\ \forall y \in E :\ b(y,x) = 0\} \end{aligned}$$

Définition 2.4. Le rang d'une forme bilinéaire symétrique ou alternée noté $rg\,(b)$ est le rang de sa matrice associée dans une base quelconque.

Proposition 2.4. Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, b une forme bilinéaire symétrique ou alternée et B une base de E. Soit $A = M_B(b)$ la matrice associée à la forme bilinéaire b dans la base B. Alors

$$\dim\ker(b) = n - rg(b) = n - rg(A).$$

Définition 2.5. Une forme bilinéaire b sur E est dite non dégénérée (ou régulière) si $\ker b = \{0\}$.

Elle est dite dégénérée si $ker(b) \neq \{0\}$.

2.1.5 L'équivalence entre formes bilinéaires

Proposition 2.5. Soient E, F deux K-espaces vectoriels de dimension finie et soient $u : E \to F$ un isomorphisme, b une forme bilinéaire sur F. L'application

$$\begin{aligned} \rho \quad &: \quad E\times E \longmapsto K \\ (x,y) \quad &\longmapsto \quad b(u(x),u(y)) \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire sur E.

Définition 2.6. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, b une forme bilinéaire sur E .

Soit F un espace vectoriel de dimension finie, ρ une forme bilinéaire sur F.

On dit que b et ρ sont équivalentes s'il existe $u : E \to F$ un isomorphisme tel que

$$b(x,y) = \rho(u(x),u(y)).$$

2.1.6 Orthogonalité

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et b une forme bilinéaire sur E .

Définition 2.7. Soient $x, y \in E$, on dit que x est b-orthogonal à y (ou orthogonal par rapport à b) si $b(x, y) = 0$. On note $x \perp_b y$ si pas d'ambiguïté $x \perp y$.

Remarque 2.3. 1. Si b est symétrique ou alternée la relation $\perp_b$ est symétrique ($x \perp y \Rightarrow y \perp x$).

2. Si x est b-orthogonal à $y_1, ..., y_r$ alors x est b-orthogonal à toute combinaison linéaire des y_i.

3. Les éléments de $\ker(b)$ sont b-orthogonaux à tout élément de E.

Définition 2.8. (**Base orthogonale**)

Une base $B = (e_1, ..., e_n)$ de E est dite b-orthogonale si et seulement si pour tout $i, j \in [1, n]; i \neq j, b(e_i, e_j) = 0$. c-à-d. les vecteurs de B sont deux à deux b-orthogonaux.

Elle est dite b-orthonormée si et seulement si $b(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & si\ i = j \\ 0, & si\ \ i \neq j \end{cases}$

Définition 2.9. (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel) Soit b une forme bilinéaire symétrique ou alternée sur E et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. L'orthogonal de F est l'ensemble

$$F^{\perp} = \{x \in E,\ \forall y \in F, b(x, y) = 0\}.$$

Remarque 2.4. (1) Dans la pratique, pour calculer $F^{\perp}$ on donne successivement comme valeurs à y les éléments d'une base de F, ce qui aboutit à un système d'équations à résoudre.

(2) Si b est une forme bilinéaire ni symétrique ni antisymétrique, on définit l'orthogonal de F par rapport à b à gauche et à droite comme suit

$$\begin{aligned} F_g^{\perp} &= \{x \in E,\ \forall y \in F, b(x, y) = 0\}, \\ F_d^{\perp} &= \{x \in E,\ \forall y \in F, b(y, x) = 0\}. \end{aligned}$$

(3) Si b une forme bilinéaire symétrique ou alternée sur E, alors $\ker(b) = E^{\perp}$.

Définition 2.10. Soient $A, B \subset E$, on dit que A et B sont b-orthogonaux et on note $A \perp B$ si et seulement si

$$\forall x \in A, \forall y \in B,\ b(x, y) = 0.$$

Proposition 2.6. Soient E un K-espace vectoriel, b une forme bilinéaire symétrique sur E, A et B deux parties non vides de E. On note par $vect(A)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par A. On a les propriétés suivantes

1. Si $A \subset B$ alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
2. $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. $A^{\perp} = (vect(A))^{\perp}$.
4. Soient A, B deux sous-espaces vectoriels de E alors

$$(A+B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}.$$

5. Soit A un sous espace vectoriel de E, $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.

Définition 2.11. On appelle vecteur isotrope tout vecteur orthogonal à lui même, c-à-d. $x \in E$ est un vecteur isotrope **ssi** $b(x,x) = 0$.

Définition 2.12. • Une forme bilinéaire b sur E est dite positive si pour tout $x \in E, b(x,x) \geq 0$.

• Elle est dite définie si pour tout $x \in E, b(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

• Elle est dite définie positive si elle est positive et définie ; c.à.d. pour tout $x \in E \setminus \{0\}, b(x,x) > 0$.

Proposition 2.7. Une forme bilinéaire symétrique et positive est non dégénérée **ssi**

$$b(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Corollaire 2.1. Toute forme bilinéaire symétrique définie positive est non dé générée.

2.2 Exercices

Exercice 2.1. Les fonctions suivantes sont-elles des formes bilinéaires ? Sont-elles symétriques ?

1. $\phi \ : \ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x,y) = x_1y_2 + x_2y_2, \quad$ où $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$.
2. $\phi \ : \ \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x,y) = ix_1y_2 + ix_2x_1, \quad$ où $x = x_1 + ix_2, y = y_1 + iy_2$.
3. $\phi \ : \ C([0,1],\mathbb{C}) \times C([0,1],\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad$ où $\phi(f,g) = \int_0^1 f(x)g(1-x)dx$.

Exercice 2.2. 1. On considère la forme bilinéaire suivante

$$\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x,y) = x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_3 + 5x_3y_2.$$

Calculer la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, donner son rang et calculer son noyau.
2. On considère la forme bilinéaire symétrique suivante

$$\phi : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(P,Q) = \int_{-1}^1 P(x)Q(-x)dx.$$

Déterminer l'orthogonal pour ϕ du sous-espace vectoriel W de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $W = Vect(X)$, et en donner une base et la dimension.

Exercice 2.3. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, on considère l'application $b : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$b(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q'(t)dt.$$

1. Justifier que b est une forme bilinéaire sur E.
2. Déterminer la matrice M représentant b dans la base canonique $B_0 = (1, X, X^2)$ de E.
3. Quel est le rang de b ?
4. b est-elle symétrique ? antisymétrique ? Déterminer la partie symétrique M_1 et la partie antisymétrique M_2 de $M = mat(b, B_0)$.
5. A-t-on $b(P,P) \geq 0$ pour tout polynôme P ? à quelle condition sur P a-t-on $b(P,P) = 0$?

Exercice 2.4. On considère les applications : $b_1 : C^1([0,1]) \times C^1([0,1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ et

$b_2 : \mathbb{R}_3[X] \times \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$b_1(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt, \quad b_2(P,Q) = P(0)Q(1).$$

1) Vérifier qu'il s'agit de deux formes bilinéaires. Sont-elles symétriques ?
2) Écrire la matrice de b_2 relativement à la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ et préciser si b_2 est dégénérée.

Exercice 2.5. Soit $E = \mathbb{R}^3$ munit de la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ et b une forme bilinéaire définie par :

$$b(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 13x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 - 5x_2y_3 - 5x_3y_2.$$

a) Écrire la matrice M de b dans la base B et déterminer le noyau et le rang de b.
b) Soient $u \in L(E)$ un endomorphisme de E et $g : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, telle que : $b(x,y) = g(u(x),y), \forall x,y \in E$.
- Déterminer la matrice A de u dans la base B en fonction des matrices M et S de b et g respectivement.
- Montrer que les vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes sont g−orthogonaux et b−orthogonaux à la fois.

Exercice 2.6. Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $B = (e_1, e_2)$ sa base canonique.
1) Soit la forme bilinéaire b_1 définie sur E par : $b_1(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$.
a) Vérifier que b_1 est symétrique. b_1 est-elle positive ? Calculer $Ker(b_1)$, que peut-on déduire ? Déduire $rang(b_1)$.
b) Calculer l'ensemble des vecteurs isotropes.
2) Soit la forme bilinéaire b_2 définie sur E par : $b_2(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$.
a) Vérifier que b_2 est symétrique et définie positive. Que peut-on déduire ?
b) Déduire l'ensemble des vecteurs isotropes.

Exercice 2.7. Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
1. Montrez que l'application φ définie sur $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ par : $\varphi(A,B) = trace(A^tB)$ est une forme bilinéaire symétrique.
2. On note $S_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ le sous espace des matrices symétriques. Montrez que la restriction de φ à $S_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R})$ est définie positive.
3. Quel est l'orthogonal de $S_n(\mathbb{R})$ pour φ ? Déduire la signature de φ.
4. On prend : $n = 2$. Calculer la distance de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ à $S_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2.8. (Supplémentaire)

1. Parmi les expressions ci-dessous, déterminer celles qui définissent une

forme bilinéaire sur l'espace E indiqué.

$$\begin{aligned}
&(1) \quad b_1(u,v) = 2u_1v_1 - 4u_2v_2 + 3u_1v_2,\ \ E = \mathbb{R}^2\\
&(2) \quad b_2(u,v) = u_1v_1 + 8u_2v_4 - 3u_2,\ \ E = \mathbb{R}^4\\
&(3) \quad b_3(u,v) = 2u_1v_1 + 3u_1v_2 + 6u_2v_2 + 3u_2v_1\ \ E = \mathbb{R}^2\\
&(4) \quad b_4(u,v) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3,\ \ E = \mathbb{R}^3\\
&(5) \quad b_5(u,v) = u_1u_2 - 8v_1u_2,\ \ E = \mathbb{R}^2\\
&(6) \quad b_6(u,v) = 0,\ \ E = \mathbb{R}^2\\
&(7) \quad b_7(u,v) = 3,\ \ E = \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

2. Écrire la matrice de chacune des formes bilinéaires.
3. Quelles formes bilinéaires sont symétriques ?
4. Calculer $b_1(u,v)$ pour $u = (2,3)$ et $v = (4,-1)$ de deux façons :
   (a) en utilisant l'expression de b_1
   (b) avec des produits matriciels.

Exercice 2.9. (Supplémentaire)
Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ et

$$\begin{aligned}
f_{(a,b,c,d)} &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\\
((u,v),(x,y)) &\mapsto aux + bvy + cuy + dvx.
\end{aligned}$$

Montrer que :
1. $f_{(a,b,c,d)}$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.
2. $f_{(a,b,c,d)}$ est symétrique si et seulement si $d = c$.
3.
$$\begin{aligned}
g &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\\
((u,v),(x,y)) &\mapsto -2ux + 3vy + uy + vx.
\end{aligned}$$
est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$.
4.
$$\begin{aligned}
h &: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\\
((u,v),(x,y)) &\mapsto 2ux + vy - uy + 2vx.
\end{aligned}$$
est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$ non symétrique.

Exercice 2.10. (Supplémentaire)
Soit l'application $\varphi : R_2[X] \times R_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(P,Q) = P(1)Q(-1) + P(-1)Q(1)$.

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique en donnant sa matrice dans la base canonique de $R_2[X]$.

2. On considère la famille $B' = (1 - X^2, X, X^2)$.

a) Montrer que B' est une base de $R_2[X]$ et déterminer la matrice de φ dans cette base.

b) En déduire l'expression de φ dans cette base.

c) Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes pour φ.

3. Soit $F = \left\{P \in R_2[X] : P(0) = 0\right\}$.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $R_2[X]$ et déterminer une base de F.

b) Déterminer l'orthogonal de F relativement à φ.

Exercice 2.11. (Supplémentaire)

Soit E un K-espace vectoriel de dimension quelconque.

1. Soit φ et ψ deux élément de E^* telles que $Ker(\varphi) \subset Ker(\psi)$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $\psi = \lambda\varphi$.

2. Soit $f \in L_2(E)$ (une forme bilinéaire sur E), montrer que f est nulle ou f est surjective.

3. Soit $f, g \in L_2(E)$ telle que $\forall (x, y) \in E^2,\ f(x, y) = 0 \Leftrightarrow g(x, y) = 0$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in K^*$ tel que $g = \lambda f$.

4. En déduire que si $f \in L_2(E)$ telle que $\forall (x, y) \in E^2,\ f(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(y, x) = 0$, alors f est

symétrique ou antisymétrique.

2.3 Corrigé d'exercices

Solution. 2.1 1. Forme bilinéaire non symétrique.
2. $\phi(\alpha x, y) = \alpha i x_1 y_2 + \alpha^2 i x_2 x_1 \neq \alpha\phi(x,y)$, donc ϕ n'est pas une forme bilinéaire.
3. Forme bilinéaire non symétrique.

Solution. 2.2 1. La matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque la troisième colonne est égale à deux fois la première, le rang de M est inférieur ou égal à deux. Et puisque les deux premiers vecteurs sont linéairement indépendants, on en déduit que le rang de M est égal à deux. Ou par la méthode de Gauss, on peut écrire :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - 5L_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T$$

$M \sim T$, où T matrice triangulaire supérieure, d'où : $rang(M) = rang(T) = 2$.

Calculons le noyau de M : le vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ appartient au noyau si et seulement si $MX = 0$, soit

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 5x_2 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = -2x_1 \end{cases}, \quad x_1 \in \mathbb{R},$$

ce qui aboutit à $X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ainsi $Ker(M) = Ker(\phi)$ est de dimension un (ce que l'on savait déjà d'après le théorème du rang) et c'est la droite vectorielle engendrée par $x = (1, 0, -2)$.
2. On a par définition

$$W^{\perp_\phi} = \{P \in \mathbb{R}_2[X]; \phi(P, w) = 0, \quad \forall w \in W\}.$$

Puisque $W = Vect(X)$, on en déduit que $P(X) = a + bX + cX^2$ appartient à $W^{\perp_\phi}$

si et seulement si

$$\int_{-1}^{1}(a+bX+cX^2)(-x)dx = 0,$$

soit, en utilisant le fait que les intégrales de monômes de degré impair sont nulles : $b=0$.
Ainsi $P=a+cX^2$ et on conclut que $W^{\perp\phi} = Vect(1,X^2)$ est de dimension deux.

Solution. 2.3 1. Soient $P,Q,R\in\mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} b(P+\lambda Q,R) &= \int_0^1 (P+\lambda Q)(t).R'(t)dt = \int_0^1 [P(t)+\lambda Q(t)].R'(t)dt \\ &= \int_0^1 P(t).R'(t)dt+\lambda\int_0^1 Q(t).R'(t)dt = b(P,R)+\lambda b(Q,R) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b(P,Q+\lambda R) &= \int_0^1 P(t).(Q+\lambda R)'(t)dt = \int_0^1 P(t)[Q'(t)+\lambda R'(t)]dt \\ &= \int_0^1 P(t).Q'(t)dt+\lambda\int_0^1 P(t).R'(t)dt = b(P,Q)+\lambda b(P,R) \end{aligned}$$

L'application b est donc bien une forme bilinéaire sur E.

2. On calcule successivement

$$\begin{aligned}
b(1,1) &= 0 \\
b(1,X) &= \int_0^1 dX = 1 \\
b(1,X^2) &= \int_0^1 2XdX = 1 \\
b(X,1) &= \int_0^1 X.0dX = 0 \\
b(X,X) &= \int_0^1 XdX = \frac{1}{2} \\
b(X,X^2) &= \int_0^1 2X^2dX = \frac{2}{3} \\
b(X^2,1) &= \int_0^1 X^2.0dX = 0 \\
b(X^2,X) &= \int_0^1 X^2dX = \frac{1}{3} \\
b(X^2,X^2) &= \int_0^1 2X^3dX = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

donc, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3. On voit facilement que $rg(b) = rg(M) = 2$.

4. La forme bilinéaire b n'est ni symétrique, ni antisymétrique puisque sa matrice représentative n'est ni symétrique, ni antisymétrique. La matrice représentative de la partie symétrique b_1 est $M_1 = \frac{M+{}^tM}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, celle de la partie antisymétrique b_2 est $M_2 = \frac{M-{}^tM}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$.

5. On a

$$b(P,P) = \int_0^1 P(t).P'(t)dt = \left[\frac{1}{2}P^2(t)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[P^2(1) - P^2(0)\right]$$

et donc

$$b(P,P) \leq 0 \Leftrightarrow |P(0)| \geq |P(1)|,$$

ce qui est le cas pour, par exemple, $P(t) = 1 - t$. Donc on n'a pas $b(P,P) \geq 0$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$.

Par ailleurs, on a $b(P,P) = 0 \Leftrightarrow P(0) = \pm P(1)$, ce qui est le cas pour, par exemple : $P(t) = t(1-t)$. D'où la condition sur P pour que $b(P,P) = 0$ est $P(0) = P(1)$.

Solution. 2.4 Laisser au lecteur.

Solution. 2.5 a) La matrice de b dans la base B est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & -5 & 13 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Le noyau de b : Si $X \in Ker(b)$ alors, on a : $MX = 0$, ce qui donne :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 13x_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}, \quad x_3 \in \mathbb{R},$$

d'où $Ker(b) = \{x = (-x_3, 2x_3, x_3), x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,2,1)\rangle$.
Le rang de b est donc : $rg(b) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(Ker(b) = 2$.

b)- On a : $b(x,y) = g(u(x),y), \forall x,y \in E$. Si A est la matrice de u, alors $u(x) = AX$. D'où $b(x,y) = X^t MY$ et $g(u(x),y) = (AX)^t SY = X^t(A^t S)Y$, donc on déduit que $M = A^t S \Leftrightarrow A = (S^{-1})^t M^t$.

- Soit x et y deux vecteurs propres de u associés à deux valeurs propres distinctes λ et μ resp. d'où $u(x) = \lambda x$, $u(y) = \mu y$, alors :

$$b(x,y) = g(u(x),y) = g(\lambda x,y) = \lambda g(x,y), \tag{2.2}$$

et

$$b(y,x) = g(u(y),x) = g(\mu y,x) = \mu g(y,x) = \mu g(x,y), \tag{2.3}$$

de (2.2) et (2.3), on déduit que

$$\lambda g(x,y) = \mu g(x,y) \Rightarrow (\lambda - \mu) g(x,y) = 0 \Rightarrow g(x,y) = 0, \text{ car } \lambda \neq \mu.$$

D'où $b(x,y) = 0$, on déduit que x et y sont g−orthogonaux et b−orthogonaux.

Solution. 2.6

1) a) ▹ La symétrie : Pour tout $x,y \in \mathbb{R}^2$, $b_1(y,x) = y_1x_1 - y_2x_2 = x_1y_1 - x_2y_2 = b_1(x,y)$. D'où b_1 est symétrique.

▹ b_1 est-elle positive ? Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ on a : $b_1(x,x) = x_1^2 - x_2^2$. Pour $x = e_2 = (0,1)$, $b_1(e_2,e_2) = -1 < 0$ donc b_1 n'est pas positive.

▹ $Kerb_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2, \forall y \in \mathbb{R}^2 : b_1(x,y) = 0\right\}$

$$\begin{cases} b_1(x,e_1) = 0 \\ b_1(x,e_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1) = 0 \\ x_2) = 0 \end{cases}$$

D'où $Kerb_1 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. On déduit que b_1 est non dégénérée. Par conséquent le rang de b_1 est $rg(b_1) = 2$.

b) L'ensemble des vecteurs isotropes :

$b_1(x,x) = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \pm x_1$. Donc l'ensemble des vecteurs isotropes de $\mathbb{R}^2$ par rapport à b_1 est la réunion des vecteurs de deux droites vectorielles $(\triangle_1) : x_2 = x_1$ et $(\triangle_1) : x_2 = -x_1$.

2. Par la même méthode que la question 1.

Solution. 2.7 1. Montons que φ est une forme bilinéaire symétrique : $\forall A, B, C \in M_n(\mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(A,B) = Tr(A^T B) = Tr(A^T B)^T = Tr(B^T A) = \varphi(B,A),$$

d'où φ est symétrique. D'autre part :

$$\begin{aligned} \varphi(A+\alpha C, B) &= Tr\left((A+\alpha C)^T B\right) = Tr(A^T B + \alpha C^T B) = Tr(A^T B) + \alpha Tr(C^T B) \\ &= \varphi(A,B) + \alpha \varphi(C,B), \end{aligned}$$

puisque φ est symétrique, alors : $\varphi(A, B+\alpha C) = \varphi(B+\alpha C, A) = \varphi(A,B) + \alpha\varphi(A,C)$. D'où φ est bilinéaire, donc φ est une forme bilinéaire symétrique.

2. En prenant la restriction de φ à $S_n(R) \times S_n(R)$, on obtient :

$$\forall S \in S_n(\mathbb{R}), \varphi(S,S) = Tr(S^T S) = Tr(SS) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} s_{ji} \right) = \sum_{i,j=1}^{n} s_{ij}^2 \geq 0,$$

de plus

$$\varphi(S,S) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} s_{ij}^2 = 0 \Longleftrightarrow s_{ij} = 0, \forall i,j \in [1,n] \Longleftrightarrow S = 0,$$

d'où φ est définie positive. On déduit que φ est un produit scalaire appelé produit scalaire usuel de $M_n(\mathbb{R})$ (Chapitre 3).

3. Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$. Alors $\varphi(S,A) = Tr(S^T A)$. Par ailleurs, $\varphi(A,S) = Tr\left(A^T S\right) = Tr(-AS) = -Tr(AS)$. Par symétrie du produit scalaire, $\varphi(A,S) =$

$-\varphi(A,S)=0$: les s.e.v $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont donc bien orthogonaux. Donc, $S_n(\mathbb{R})^\perp = A_n(\mathbb{R})$.
Un argument de dimension permet de conclure : en effet, $\dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ et $\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$, or $n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$. On en déduit que la signature de b est $\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$.
4. On considère maintenant le cas $n=2$. Rappel : $d(M, S_2(\mathbb{R})) = \left\|M - p_{S_2(\mathbb{R})}(M)\right\|$.
D'après ce qui précède, $M - p_{S_2(\mathbb{R})}(M) = p_{A_2(\mathbb{R})}(M) = M - M^T$.
Alors

$$
\begin{aligned}
d(M, S_2(\mathbb{R})) &= \left\|M - M^T\right\| \\
&= \sqrt{\varphi(M-M^T, M-M^T)} \\
&= \sqrt{Tr\left((M-M^T)^T(M-M^T)\right)} \\
&= \sqrt{2Tr(M^TM) - Tr(MM) - Tr(M^TM^T)} \\
&= \sqrt{6-2-2} = \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

(Étape de vérification ? Si M est symétrique, la distance est bien nulle. C'est bon signe !).

Chapitre 3

Espaces euclidiens

3.1 Résumé de cours

Soit E un K-espace vectoriel.

3.1.1 Produit scalaire

Définition 3.1. On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive. Il est noté par $\langle .,. \rangle$ ou $\langle .|. \rangle$. c-à-d.

1) $\langle .,. \rangle$ forme bilinéaire symétrique.

2) $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$ avec égalité seulement pour $x = 0$. ($\forall x \in E \setminus \{0\}, \langle x, x \rangle > 0$).

Exemple 3.1. (1) Soit $E = \mathbb{R}^n$, la forme linéaire $\langle .,. \rangle$ sur E définie par : $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i =^t X.Y$ est un produit scalaire appelé produit scalaire canonique (ou usuel) de $\mathbb{R}^n$.

(2) Soit $E = C([a,b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[a,b]$, la forme linéaire $\langle .,. \rangle$ sur E définie par : $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire.

(3) $E = M_n(K)$ l'espace des matrices carrées, $\langle A, B \rangle = Tr({}^t AB)$ est un produit scalaire.

3.1.2 Espace euclidien

Définition 3.2. Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

En général tout espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est appelé **espace pré-hilbertien**.

Définition 3.3. (**La norme**) Soit E un espace pré-hilbertien, l'application :

$$\begin{aligned} \|.\| : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \end{aligned}$$

est appelée **norme** associée au produit scalaire. Si E est un espace euclidien, $\|.\|$ est appelée **norme euclidienne**.

De plus l'application

$$\begin{aligned} d : E \times E &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \left\|x-y\right\| \end{aligned}$$

est appelée **distance euclidienne**.

Proposition 3.1. (Propriétés de la norme)

(1) Pour tout $x \in E, \|x\| \geq 0$ et $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$.

(2) Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in K, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

(3) Si $x \in E \backslash \{0\}, \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$, $\frac{x}{\|x\|}$ est appelé vecteur unitaire de E.

(4) (**Inégalité de Cauchy-Schwarz**)

Pour tout $x,y \in E$, $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, avec égalité si x,y sont liés.

(5) (**Inégalité de Cauchy-Schwarz dans** $\mathbb{R}^n$)

$$\left|\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \text{ ou } \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

(6) (**Inégalité de Minkovski ou inégalité triangulaire**)

Pour tout $x,y \in E, \left\|x+y\right\| \leq \|x\| + \left\|y\right\|$, avec égalité si $x = 0$ ou $y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}_+$.

(7) Pour tout $x,y \in E, \left\|x+y\right\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \left\|y\right\|^2$.

(8) (**Théorème de Pythagore**)

Les vecteurs $x,y \in E$ sont orthogonaux si et seulement si $\left\|x+y\right\|^2 = \|x\|^2 + \left\|y\right\|^2$.

3.1.3 Orthogonalité

Définition 3.4. (**Base orthogonale**)

Soit E un espace euclidien muni d'une base $B = (u_1, ..., u_n)$. La base B est dite orthogonale si les vecteurs $u_1, ..., u_n$ sont deux à deux orthogonaux. i.e. $\langle u_i, u_j\rangle = 0, i \neq j$. Elle est dite orthonormée si

$$\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j \\ 0, \text{ si } i \neq j \end{cases}.$$

Proposition 3.2. Toute famille orthogonale $B = \left\{u_1, ..., u_p\right\}_{p \leq n}$ de E est libre.

Théorème 3.1. ***(Existence d'une base orthonormée)***

Tout espace euclidien admet des bases orthonormées pour son produit scalaire.

Théorème 3.2. ***(Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt)***

Soit E un espace euclidien. On peut construire à partir d'une base $B = (v_1, ..., v_n)$ de E une base orthogonale $B' = (u_1, ..., u_n)$. La normalisation étant ensuite évidente en prenant $w_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}, 1 \leq i \leq n$, on obtient une base orthonormée $\{w_1, ..., w_n\}$.

Démonstration. (**Algorithme de Gram-Schmidt**) On prend

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 \\
u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \\
u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \\
&\vdots \\
u_n &= v_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $i \in [2, n]$, $u_i = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle v_i, u_k\rangle}{\|u_k\|^2} u_k$. On peut vérifier facilement que pour tout $i \neq j$, $\langle u_i, u_j\rangle = 0$, d'où on obtient une base orthogonale $B' = (u_1, ..., u_n)$ pour E. Il est évident que $\left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, ..., \frac{u_n}{\|u_n\|}\right)$ est une base orthonormée pour E. □

Proposition 3.3. Soit E un espace euclidien et F un sous-espace de E, on a

(1) $F^{\perp} = \{x \in E, \ \forall y \in F : \langle x, y\rangle = 0\}$

(2) $(F^{\perp})^{\perp} = F$

(3) $E = F \oplus F^{\perp}$ (ou $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$)

(4) $F^{\perp}$ est l'unique supplémentaire de F orthogonale à F.

3.1.4 Matrices orthogonales

Définition 3.5. On appelle matrice orthogonale toute matrice carrée réelle P d'ordre n telle que ${}^tPP = I_n$. C-à-d. c'est une matrice inversible et son inverse égale à sa transposée.

Corollaire 3.1. Les vecteurs colonnes d'une matrice orthogonale forment une base orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 3.3. *Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée B. Une nouvelle base B' de E est orthonormée pour ce produit scalaire **ssi** la matrice de passage de B à B' est orthogonale.*

Exemple 3.2. La matrice

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 7 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale. En effet ${}^tAA = I_3$, et on pourra aussi vérifier que ces vecteurs colonnes forment une base orthonormée pour $\mathbb{R}^3$.

Proposition 3.4. Les seuls valeurs propres possibles dans $\mathbb{R}$ d'une matrice orthogonale $A \in M_n(\mathbb{R})$ sont -1 et 1.

3.1.5 Diagonalisation des matrices symétriques réelles

Si $A = \left(a_{ij}\right)_n$ est une matrice carrée d'ordre n, on définit la transposée de A en posant : ${}^tA = \left(a_{ji}\right)_n$. On peut voir les matrices symétriques comme les matrices invariantes par transposition ; on dit que A est symétrique si ${}^tA = A$.

La diagonalisation des matrices symétriques repose sur l'interprétation de la transposition en termes d'endomorphismes. La question est : que peut-on dire d'un endomorphisme dont la matrice est symétrique ? Ou encore : si f est un endomorphisme de matrice M, que peut-on dire de l'endomorphisme défini par ${}^tM$? C'est ici qu'intervient le produit scalaire.

Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Soient E un espace euclidien, $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée, $f \in L(E)$ et $x, y \in E$. On pose $X = mat_B(x)$, $Y = mat_B(y)$ et $A = mat_B(f)$. On a

$$\langle f(x), y\rangle =^t (AX)Y =^t X\left({}^tAY\right) = \langle x, f^*(y)\rangle,$$

où f^* est l'endomorphisme de E défini par

$$f^*(y) =^t AY, \text{ d'où } mat_B(f^*) =^t A.$$

Ainsi, le transposer de A revient à définir l'endomorphisme qui permet de « commuter f » dans $\langle f(x), y\rangle$. Commuter signifie ici que pour tous $x, y \in E$ on a

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle.$$

On notera que

1. Il n'y a qu'un seul endomorphisme f^* permettant de commuter f dans $\langle f(x), y\rangle$,

2. La matrice de f^* dans une base orthonormée s'obtient en transposant celle de f.

Définition 3.6. Soient E un espace euclidien et $f \in L(E)$.

L'adjoint de f est l'endomorphisme f^* de E tel que

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$$

pour tout $x, y \in E$.

Les propriétés de la transposition des matrices se traduisent en termes d'endomorphismes :

Proposition 3.5. Soient E un espace euclidien, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in L(E)$.

1. $f^{**} = f$
2. $Id^* = Id$
3. $(f+g)^* = f^* + g^*$
4. $(\lambda f)^* = \lambda f^*$
5. $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
6. $rang(f^*) = rang(f)$
7. $\det mat_B(f^*) = \det mat_B(f)$.

On notera que l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array}$$

se traduit par l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} L(E) & \to & L(E) \\ f & \mapsto & f^*. \end{array}$$

On peut utiliser cette application pour caractériser les endomorphismes orthogonaux.

Proposition 3.6. Soient E un espace euclidien et $f \in L(E)$. Alors f est **orthogonal** si et seulement si $f^{-1} = f^*$ (où $f^* \circ f = Id_E$).

L'endomorphisme orthogonal conserve le produit scalaire, c-à-d, si pour tous x, y de E, on a : $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$, il est appelé aussi une **isométrie**.

Définition 3.7. Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme f de E est dit **normal** (relativement au produit scalaire de E), s'il commute avec son adjoint.

Il s'agit donc d'un endomorphisme f vérifiant l'égalité $f^* \circ f = f \circ f^*$. On peut aussi dire que f est normal si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée quelconque commute avec sa transposée.

Théorème 3.4. *Soient E un espace euclidien, $f \in L(E)$ et F un sous-espace de E. Si F est stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f^*.*

Lemme 3.1. Soit f un endomorphisme quelconque d'un espace euclidien E, et soit F un sous-espace de E. Si F est stable par f et par f^*, il en est de même de $F^\perp$.

Lemme 3.2. Si l'endomorphisme f de l'espace euclidien E est normal, f et f^* ont les mêmes valeurs propres, et pour chaque valeur propre, ils ont le même sous-espace propre.

Endomorphisme auto-adjoint

Soient E un espace euclidien et $f \in L(E)$.

Définition 3.8. On dit que f est un endomorphisme **auto-adjoint** ou **symétrique** ssi $f = f^*$ ou $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.

Proposition 3.7. 1) f est **auto-adjoint** ssi il existe une base orthonormée de E dans laquelle sa matrice est symétrique.

2) f est **auto-adjoint** ssi dans toute base orthonormée de E sa matrice est symétrique.

Diagonalisation des matrices symétriques

Alors qu'une matrice réelle n'a pas forcement de valeurs propres réelles, par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres i et $-i$ dans $\mathbb{C}$. Nous allons montrer qu'une matrice symétrique réelle ou de manière équivalente, un endomorphisme symétrique a toute ses valeurs propres réelles est diagonalisable dans une base orthonormée.

Lemme 3.3. Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles.

Du lemme précédent on déduit le résultat suivant

Corollaire 3.2. Toute matrice symétrique réelle a n valeurs propres réelles distinctes ou confondues.

Lemme 3.4. On suppose que $n \geq 2$.

Si λ, μ sont deux valeurs propres distinctes de $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors les sous-espaces propres E_λ et E_μ sont orthogonaux.

Proposition 3.8. On suppose que $n \geq 2$.

Si λ_1 est une valeur propre de $f \in S(E)$ (ou de $A \in S_n(\mathbb{R})$), e_1 un vecteur propre associé à λ_1 de norme égale à 1 ($\|e_1\| = 1$), alors l'hyperplan $H = (\mathbb{R}e_1)^\perp$ est stable par f et la restriction de f à H est symétrique.

Théorème 3.5. ***(Spectral)***

Soit A une matrice symétrique de $S_n(\mathbb{R})$. Alors, on a les propriétés équivalentes suivantes :

1. *A est diagonalisable.*
2. *Il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de A.*
3. *Il existe une matrice orthogonale $P \in M_n(\mathbb{R})$, telle que $P^{-1}AP = {}^t PAP = D$ soit diagonale.*

En termes d'endomorphismes on a le théorème spectral suivant :

Théorème 3.6. *Soit $f \in S(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors, on a les propriétés équivalentes suivantes :*

1. *f est diagonalisable.*
2. *Il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f.*

3.2 Exercices

Exercice 3.1. Montrer que :
1. $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $tr(M)| \leq \sqrt{ntr(M^t M)}$.
2. Montrer que : pour tous $x, y \in E$ (E espace euclidien).
a) $||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\langle x,y\rangle + ||y||^2$
b) $||x-y||^2 = ||x||^2 - 2\langle x,y\rangle + ||y||^2$
c) $\langle x+y, x-y\rangle = ||x||^2 - ||y||^2$
3) $||PX|| = ||X||$, où P matrice orthogonale.
4) Pour tout endomorphisme $f \in L(E)$, où E espace euclidien et tous sous-espaces F, G de E :
a) $Ker(f^*) = (Im(f))^\perp$
b) $Im(f^*) = (Ker(f))^\perp$
c) $rang(f^*) = rang(f)$.
d) $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$.
5) En utilisant les concepts des espaces Euclidiens, montrer :

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} \leq n(1+4+...+n^2.$$

Exercice 3.2. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées. On définit une application : $(u|v) : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u|v) = \sum_{n=0}^{\infty)} \frac{u_n v_n}{2^n}$.
1. Montrer que $(u|v)$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le s.e.v des suites nulles à partir d'un certain rang. Montrer que : $F^\perp = \{0\}$. Commenter.

Exercice 3.3. Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est diagonalisable et trouver une base orthonormée formée de vecteurs propres dans laquelle il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telle que : ${}^tPAP = D$.

Exercice 3.4. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2)P(x)Q(x)dx.$$

1. Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. On pose :

$$\forall P \in E, \phi(P) = \left(\left(x^2 - 1\right)P\right)''.$$

Montrer que ϕ est un endomorphisme symétrique de $(E, \langle .,. \rangle)$.

Exercice 3.5. Soit

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1. Prouver que la suite de matrices (M^n) converge.

2. Soit $N = \lim_{n \to \infty} M^n$. Caractériser géométriquement l'endomorphisme associé à N.

3. Soit (X_n) la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et $X_{n+1} = MX_n$.

Prouver que la suite (X_n) converge et déterminer sa limite en fonction de u_0, v_0 et w_0.

Exercice 3.6. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose :

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt.$$

On suppose que : $\forall R \in E,\ \int_{-\infty}^{+\infty} R(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$ converge.

1. Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. On pose : $\forall P \in E,\ \varphi(P) = XP' - P''$.

a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

b) Montrer que : $\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle P, \varphi(Q) \rangle = \langle P', Q' \rangle$ (on pourra d'abord dériver $t \longrightarrow Q'e^{\frac{-t^2}{2}}$).

On déduire que φ est un endomorphisme symétrique.

Exercice 3.7. Soit $n \in [3, +\infty[$. E un espace vectoriel euclidien de dimension n et (u, v) une famille libre de E. α et β sont deux réels non nuls. On pose :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \alpha \langle v, x \rangle u + \beta \langle u, x \rangle v.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E. Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$.

2. Montrer que $F = Vect(u, v)$ est stable par f.

3. Soit g l'endomorphisme de F qui à tout élément x de F associe $f(x)$.

▹ Montrer que les valeurs propres non nulles de f sont les valeurs propres de g.

▹ Qu'en déduire sur le nombre de valeurs propres de f ?

4. a) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un endomorphisme symétrique de E.

b) On suppose que : $\alpha = \beta$. Écrire la matrice de g dans la base $B = (u, v)$ de F. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Exercice 3.8. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n non nulle. $f_1, f_2, ..., f_p$ sont p endomorphismes symétriques de E tels que :

$$\sum_{k=1}^{p} rg(f_k) = n, \ \forall x \in E, \ \sum_{k=1}^{p} \langle f_k(x), x\rangle = \|x\|^2. \quad p \geq 2.$$

1. a) Montrer que si g est un endomorphisme symétrique de E tels que : $\forall x \in E, \ \langle g(x), x\rangle = 0$ alors g est l'endomorphisme nul (on pourra utiliser $x + y$).

b) Montrer que : $\sum_{k=1}^{p} f_k = id_E$.

2. a) Montrer que E est somme directe des sous-espaces vectoriels $Imf_1, Imf_2, ..., Imf_p$.

b) Montrer que :

$$\forall x \in E, \ \forall i \in [1, p], \ f_i(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k\left(f_i(x)\right).$$

c) Montrer que $f_1, f_2, ..., f_p$ sont des projecteurs orthogonaux. (i.e. $\forall i \in [1, p], \ f_i \circ f_i = f_i$)

Exercice 3.9. (Supplémentaire)

Soit $B = (e_1, \ e_2, \ ..., \ e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. f et g sont les endomorphismes de E dont les matrices sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et B^2.

2. Trouver une base orthonormale de E constitué de vecteurs propres de f et de g.

3. Trouver une matrice orthogonale P de $M_4(\mathbb{R})$ telle que les matrices ${}^tPAP$ et ${}^tPBP$ soient toutes les deux diagonales.

Exercice 3.10. (Supplémentaire)

Soit A et B les matrices de $M_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. a) Montrer que A et B sont diagonalisable.

b) Montrer que $A^2 = I_3$ et calculer B^2.

c) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. Même chose pour B.

2. Trouver une matrice orthogonale P de $M_3(\mathbb{R})$ telle que les matrices ${}^tPAP$ et ${}^tPBP$ soient toutes les deux diagonales.

3. Soit F l'application définie sur $M_3(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in M_3(\mathbb{R}),\ F(M) = AM - MB.$$

a) Montrer que F est un endomorphisme de $M_3(\mathbb{R})$.

b) Soit U un vecteur propre de A associé à la valeur propre α et V un vecteur propre de B associé à la valeur propre β.

Montrer que $U\ {}^tV$ est un vecteur propre de F associé à la valeur propre $\alpha - \beta$.

c) F est-elle un automorphisme de $M_3(\mathbb{R})$?

d) F est-elle diagonalisable ?

3.3 Corrigé d'exercices

Solution. 3.1

1) Inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire usuel et aux matrices M et I_n, on obtient : $\langle M, I_n\rangle = tr(M^tI) = tr(M)$. D'où

$$|\langle M, I_n\rangle| = |tr(M)| \leq \|M\|.\|I\| \Leftrightarrow |tr(M)| \leq \sqrt{tr(M^tM)}\sqrt{tr(I^tI)} = \sqrt{n\,tr(M^tM)}. \tag{3.1}$$

2) a) On a : $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$.

c) On a : $\langle x+y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle - \langle y,y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$.

3) $\|PX\| = \langle PX, PX\rangle = tr\Big((PX)^t\,PX) = tr(X^tP^tPX\Big) = tr\left(X^tX\right) = \langle X, X\rangle = \|X\|^2$. $(P^tP = I)$

4) a) Pour tout $x \in Ker(f^*)$, $z \in Im(f)$, $\exists y \in E : z = f(y)$. D'où
$\langle x,z\rangle = \langle x, f(y)\rangle = \langle f^*(x), y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0$, alors $x \in (Im(f))^\perp$, d'où

$$Ker(f^*) \subset (Im(f))^\perp. \tag{3.2}$$

Pour tout $x \in (Im(f))^\perp$, $y \in E$, on a :

$\langle f^*(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = 0$, $\forall y \in E$, d'où $f^*(x) \in E^\perp = \{0\}$, car le noyau du produit scalaire est nul puisque il est non-dégénéré. Alors, on déduit que $f^*(x) = 0$, donc $x \in Ker(f^*)$. D'où

$$(Im(f))^\perp \subset Ker(f^*). \tag{3.3}$$

De (3.2) et (3.3), on déduit que : $Ker(f^*) = (Im(f))^\perp$.

b) Pour tout $z \in Im(f^*)$, $\exists y \in E\ : z = f^*(y)$ et tout $x \in Ker(f)$, on a :
$\langle z,x\rangle = \langle f^*(y), x\rangle = \langle y, f(x)\rangle = \langle y, 0\rangle = 0$, d'où $z \in (Ker(f))^\perp$. Alors,

$$Im(f^*) \subset (Ker(f))^\perp. \tag{3.4}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} dimIm(f^*) &= n - dimKer(f^*) \\ &= n - dim(Im(f))^\perp \\ &= dimIm(f) \\ &= n - dimKer(f) \\ &= dim(Ker(f))^\perp). \end{aligned} \tag{3.5}$$

De (3.4) et (3.5), on obtient : $Im(f^*) = (Ker(f))^{\perp})$.

c) On a :

$$\begin{aligned} rang(f^*) &= dimIm(f^*) \\ &= dim(Ker(f))^{\perp}) \\ &= n - dimdimKer(f) \\ &= dimIm(f) \\ &= rang(f). \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \forall x \in G^{\perp} &\Rightarrow \langle x, y\rangle = 0,\ \forall y \in G \\ &\Rightarrow \langle x, y\rangle = 0,\ \forall y \in F \\ &\Rightarrow x \in F^{\perp} \\ &\Rightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}. \end{aligned}$$

5) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, pour $X = (x_1, ..., x_n)$, $Y = (y_1, ..., y_n)$, on a :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

et on prend $X = (1, 1, ..., 1)$, $Y = (1, 2, 3, ..., n)$, on obtient

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} i^2}.$$

On prend les carrés des deux membres, on obtient le résultat désiré.

Solution. 3.2

1. Pour montrer que $(u|v)$ définit un produit scalaire sur E il suffit de vérifier que $(u|v)$ définit une forme bilinéaire symétrique définie positive. (la vérification est laissée au lecteur)

2. Soit x dans l'orthogonal de F. Alors, pour toute suite (u) nulle à partir d'un certain rang, $(x|u) = 0$. En particulier, c'est vrai pour les suites (u^i) dont tous les termes sont nuls à l'exception du $i$ème qui vaut 1, ce qui implique que pour tout i,

$$(x|u^i) = \sum_{n=0}^{\infty)} \frac{x_n u_n^i}{2^n} = x_i = 0.$$

La seule suite satisfaisant cela est la suite nulle (qui est bien dans l'orthogonal de F). Ainsi $F^{\perp} = \{0\}$.

En revanche, l'orthogonal de $\{0\}$ n'est pas F mais E entier.
A retenir : dans le cas général, pour F un s.e.v. de E, $(F^{\perp})^{\perp} \neq F$ (On dispose bien en revanche dans le cas général de l'inclusion $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.)

Solution. 3.3 La matrice A est symétrique réelle donc elle est diagonalisable. Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda+2)^2,$$

donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ v.p.s., $\lambda_2 = -2$ v.p.d. et les vecteurs propres associés sont : $v_1 = (1,1,1)$ pour λ_1 et $v_2 = (-1,1,0), v_3 = (-1,0,1)$ pour λ_2. On remarque que $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, v_3\rangle = 0$ mais $\langle v_2, v_3\rangle = 1 \neq 0$.

En utilisant le procédé de Gram-Schmidt pour $\{v_2, v_3\}$ on obtient deux vecteurs orthogonaux :

$$\begin{aligned} u_2 &= v_2 \\ u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = -\frac{1}{2}(1,1,-2), \end{aligned}$$

si on pose $u_1 = v_1$, on obtient une base orthogonale $\mathbf{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ pour $\mathbb{R}^3$. D'où une base orthonormée

$$\left\{ w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), w_3 = -\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) \right\}$$

pour $\mathbb{R}^3$. D'où A est diagonalisable telle que

$${}^tPAP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

où

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale.

Solution. 3.4

Soient P et Q deux éléments de E.

la fonction : $x \mapsto (1-x^2)P(x)Q(x)$ est continue sur $[-1,1]$ donc $\int_{-1}^{1}(1-x^2)P(x)Q(x)dx$ existe.
Ainsi $\langle .,. \rangle$ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrons que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire. On a :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \langle P,Q \rangle = \int_{-1}^{1}(1-x^2)P(x)Q(x)dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)Q(x)P(x)dx = \langle Q,P \rangle.$$

Donc, $\langle .,. \rangle$ est symétrique.
D'autre part on a : $\forall (P,Q,R) \in E^3, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \langle P+\alpha R, Q \rangle &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)(P+\alpha R)(x)Q(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)P(x)Q(x)dx + \alpha \int_{-1}^{1}(1-x^2)R(x)Q(x)dx \\ &= \langle P,Q \rangle + \alpha \langle R,Q \rangle. \end{aligned}$$

Puisque $\langle .,. \rangle$ est symétrique, d'où $\forall (P,Q,R) \in E^3, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \langle P, Q+\alpha R \rangle = \langle P,Q \rangle + \alpha \langle P,R \rangle$.
Donc $\langle .,. \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique.

Définie positive : On a : $\forall P \in E, \langle P,P \rangle = \int_{-1}^{1}(1-x^2)P^2(x)dx \geq 0$, car $(1-x^2)P^2(x) \geq 0, \forall x \in [-1,1]$. D'où $\langle .,. \rangle$ est positive. De plus

$$\forall P \in E, \langle P,P \rangle = 0 \Leftrightarrow (1-x^2)P^2(x) = 0, \forall x \in [-1,1] \Leftrightarrow P(x) = 0, \forall x \in [-1,1] \Leftrightarrow P = 0.$$

Alors, $\langle .,. \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique Définie positive, donc elle définie un produit scalaire sur E.

2. Pour tout polynôme P de E, $\left((x^2-1)P\right)''$ est de degré au plus n, donc c'est un élément de E. D'où ϕ est une application de E dans E.
La linéarité : $\forall P,Q \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,
$\phi(P+\alpha Q) = \left((x^2-1)(P+\alpha Q)\right)'' = \left((x^2-1)P\right)'' + \alpha\left((x^2-1)Q\right)'' = \phi(P) + \alpha\phi(Q)$.

D'où ϕ est un endomorphisme de E.
Montrons la symétrie de ϕ : ϕ est symétrique ssi $\forall P,Q \in E$, $\langle \phi(P), Q \rangle = \langle P, \phi(Q) \rangle$.
On a : $\langle \phi(P), Q \rangle = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\phi(P)(x)Q(x)dx = \int_{-1}^{1}\phi(P)(x)(1-x^2)Q(x)dx$. On intègre par partie :
On pose : $u'(x) = \phi(P)(x)$, $v(x) = (1-x^2)Q(x)$, on obtient :
$u'(x) = \left(\left(x^2-1\right)P\right)'' \Rightarrow u(x) = \left((x^2-1)P\right)'$ et $v(x) = (1-x^2)Q(x) \Rightarrow v'(x) = -\left((x^2-1)Q\right)'$.

Puisque $u(1) = u(-1) = 0$, alors

$$\begin{aligned}
\langle \phi(P), Q\rangle &= \int_{-1}^{1} u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u(x)v'(x)dx \\
&= \int_{-1}^{1} \Big((x^2-1)P\Big)' \Big((x^2-1)Q\Big)' dx.
\end{aligned}$$

De même on trouve que $\langle \phi(Q), P\rangle = \int_{-1}^{1} \Big((x^2-1)Q\Big)' \Big((x^2-1)P\Big)' dx$. D'où

$$\begin{aligned}
\langle \phi(P), Q\rangle &= \int_{-1}^{1} \Big((x^2-1)P\Big)' \Big((x^2-1)Q\Big)' dx = \int_{-1}^{1} \Big((x^2-1)Q\Big)' \Big((x^2-1)P\Big)' dx \\
&= \langle \phi(Q), P\rangle = \langle P, \phi(Q)\rangle.
\end{aligned}$$

D'où ϕ est un endomorphisme symétrique (ou auto-adjoint) de E.

Solution. 3.5

1. La matrice M étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Ses valeurs propres sont $1, 14$ et $-\frac{1}{12}$. On cherche ensuite une base de vecteurs propres et on trouve

$$E_1 = \langle (1,1,1)\rangle, \quad E_{\frac{1}{4}} = \langle (-2,1,1)\rangle, \quad E_{-\frac{1}{12}} = \langle (0,-1,1)\rangle$$

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) \right\}$$

est une base orthonormée pour $\mathbb{R}^3$. Donc il existe une matrice orthogonale P telle que

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1}MP = {}^t PMP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Puisque $M = PDP^{-1}$, alors

$$M^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{12}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1},$$

où D est la matrice diagonale précédente, on constate sans peine que M^n tend vers

$$\begin{aligned} N &= P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Notons (u,v,w) les 3 vecteurs colonnes de P (i.e une base de vecteurs propres de N). Alors si f est l'endomorphisme associé à N, on a $f(u) = u, f(v) = 0$ et $f(w) = 0$ (car les valeurs propres de N sont 1 et 0) f est donc la projection sur $vect(u)$ parallèlement à $vect(v,w)$. Mais puisque la famille (u,v,w) est une famille orthonormée (on a diagonalisé une matrice symétrique), f est en réalité la projection orthogonale sur $vect(u) = ker(M - I_n) = E_{\lambda=1}$.

3. Par une récurrence simple, on a pour tout $n \in N$,

$$X_n = M^n X_0 = (PD^nP^{-1})X_0.$$

Passant à la limite, on trouve que (X_n) converge vers le vecteur

$$Y = NX_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} u_0 + v_0 + w_0 \\ u_0 + v_0 + w_0 \\ u_0 + v_0 + w_0 \end{pmatrix}.$$

Solution. 3.6

1. Pour montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E il suffit de montrer que c'est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

▹ La bilinéarité et la symétrie sont évidentes.

▹ **Définie positive :** On a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall P \in E,\ P^2(t)e^{\frac{-t^2}{2}} \geq 0 \Rightarrow \langle P,P \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{\frac{-t^2}{2}}dt \geq 0.$$

Supposons $\langle P,P \rangle = 0$, la fonction $t \longmapsto P^2(t)e^{\frac{-t^2}{2}}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ donc,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{\frac{-t^2}{2}}dt \Rightarrow P^2(t)e^{\frac{-t^2}{2}} = 0.$$

$\forall t \in \mathbb{R},\ e^{\frac{-t^2}{2}} \neq 0$, d'où $\forall t \in \mathbb{R},\ P^2(t) = 0$. Ainsi $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = 0$, d'où $P = 0_E$.
Donc, $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. a) On a : $\forall P \in E,\ XP' - P'' \in E$, donc φ est une application de E dans E.

$$\begin{aligned}
\forall P, Q \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda P + Q) &= X(\lambda P + Q)' - (\lambda P + Q)'' \\
&= X(\lambda P' + Q') - (\lambda P'' + Q'') \\
&= \lambda(XP' - P'') + (XQ' - Q'') \\
&= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q).
\end{aligned}$$

Ainsi φ est un endomorphisme de E.

b) Soit $P, Q \in E$. Posons : $\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) = Q'(t)e^{-t^2/2}$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R},\ h'(t) &= Q''(t)e^{-t^2/2} - tQ'(t)e^{-t^2/2} \\
&= (Q''(t) - tQ'(t))\, e^{-t^2/2} \\
&= -\varphi(Q)e^{-t^2/2}.
\end{aligned}$$

Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned}
\int_A^B P(t)\varphi(Q)(t)e^{\frac{-t^2}{2}}dt &= -\int_A^B P(t)h'(t)dt \\
&= [P(t)h(t)]_A^B + \int_A^B P'(t)h(t)dt \\
&= -P(B)h(B) + P(A)h(A) + \int_A^B P'(t)h(t)dt \\
&= -P(B)Q'(B)e^{-B^2/2} + P(A)Q'(A)e^{-A^2/2} + \int_A^B P'(t)Q'(t)e^{-t^2/2}dt
\end{aligned}$$

On a $PQ' \in \mathbb{R}[X]$, donc

$$\lim_{B \to +\infty}\left[P(B)Q'(B)e^{-B^2/2}\right] = 0,\ \lim_{A \to -\infty}\left[P(A)Q'(A)e^{-A^2/2}\right] = 0$$

Ainsi,

$$\langle P, \varphi(Q) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\varphi(Q)(t)e^{\frac{-t^2}{2}}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)e^{\frac{-t^2}{2}}dt = \langle P', Q' \rangle.$$

D'où $\forall P, Q \in E,\ \langle P, \varphi(Q) \rangle = \langle P', Q' \rangle$. Donc on déduit que $\langle Q, \varphi(P) \rangle = \langle Q', P' \rangle$.
Alors,

$$\forall P, Q \in E,\ \langle P, \varphi(Q) \rangle = \langle P', Q' \rangle = \langle Q', P' \rangle = \langle Q, \varphi(P) \rangle.$$

D'où φ est un endomorphisme symétrique.

Solution. 3.7

1. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha\langle v,x\rangle \in \mathbb{R}$ et $\beta\langle u,x\rangle \in \mathbb{R}$. Donc
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha\langle v,x\rangle u + \beta\langle u,x\rangle v \in E$. Alors, f est une application de E dans E.
. Soient $\lambda \in \mathbb{R},\ (x,y) \in E^2$,

$$\begin{aligned} f(\lambda x+y) &= \alpha\langle v,\lambda x+y\rangle u + \beta\langle u,\lambda x+y\rangle v \\ &= (\alpha\lambda\langle v,x\rangle + \alpha\langle v,y\rangle)\,u + (\beta\lambda\langle u,x\rangle + \beta\langle u,y\rangle)\,v \\ &= \lambda\,(\alpha\langle v,x\rangle + \beta\langle u,x\rangle) + \alpha\langle v,y\rangle u + \beta\langle u,y\rangle v \\ &= \lambda f(x)+f(y). \end{aligned}$$

D'où f est linéaire. Ainsi f est un endomorphisme de E.
. Soit $x \in \mathbb{R},\ x \in Ker(f) \Leftrightarrow f(x) = 0_E \Leftrightarrow \alpha\langle v,x\rangle u + \beta\langle u,x\rangle v = 0$. Puisque u,v sont libres, alors $\alpha\langle v,x\rangle = \beta\langle u,x\rangle = 0$.
Comme α,β sont non nuls : $x \in Ker(f) \Leftrightarrow \langle v,x\rangle = \langle u,x\rangle = 0$. Donc x est orthogonale à u et v.
Ainsi $Ker(f) = (Vect(u,v))^{\perp}$.

. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha\langle v,x\rangle u + \beta\langle u,x\rangle v \Rightarrow Im(f) \subset Vect(u,v)$. D'autre part on a :

$$\begin{aligned} dimIm(f) &= dim(E) - dimKer(f) \\ &= dim(E) - dim\,(Vect(u,v))^{\perp} \\ &= dimVect(u,v) = 2 < +\infty. \end{aligned}$$

D'où $Im(f) \subset Vect(u,v)$ et $dimIm(f) = dimVect(u,v)$ on déduit que $Im(f) = Vect(u,v)$.

2. On a $F = Vect(u,v)$. Comme $Im(f) = Vect(u,v) = F$, alors $\forall xF,\ f(x) \in F$.
F est stable par f.

3.

▹ • Soit λ valeur propre non nulle de f, alors $\exists x \in E,\ x \neq 0_E\ : f(x) = \lambda x$.
D'où
$x = \frac{1}{\lambda} f(x) = f\left(\frac{1}{\lambda}x\right) \in Im(f) = F$. Donc, $\exists x \in F,\ x \neq 0_E\ : g(x) = f(x) = \lambda x$.
Alors, λ est une valeur propre non nulle de g et x vecteur propre de g associé à λ.

. Réciproquement :
Supposons que λ est une valeur propre de g. Alors
$\exists x \in F,\ x \neq 0_E\ : g(x) = \lambda x$. Donc $\exists x \in E,\ x \neq 0_E\ : f(x) = \lambda x$, ainsi λ valeur propre de f.
• Supposons que λ est nulle. Alors $f(x) = 0_E$, donc $x \in Ker(f) = (Vect(u,v))^{\perp} =$

$F^\perp$. D'où $x \in F \bigcap F^\perp = \{0_E\}$, donc $x = 0_E$ contradiction, alors $\lambda \neq 0$.
Alors λ est une valeur propre non nulle de f et x vecteur propre de f associé à λ.
On déduit que les v. p. non nulles de f sont les v. p. de g.

▹ On a $dimKer(f) = dim(E) - dimIm(f) = dim(E) - dim(F) = n - 2 > 0$, car $n \in [3, +\infty[$. Donc 0 est valeur propre de f.
g est un endomorphisme de F et $dim(F) = 2$, alors g a au plus deux valeurs propres.

Il résulte de ce qui précède que f a au moins une valeur propre et au plus trois valeurs propres.

4. a) $\forall (x,y) \in E^2$.

$$\begin{aligned}
\langle f(x), y\rangle - \langle x, f(y)\rangle &= \langle \alpha\langle v,x\rangle u + \beta\langle u,x\rangle v, y\rangle - \langle x, \alpha\langle v,y\rangle u + \beta\langle u,y\rangle v\rangle \\
&= \alpha\langle v,x\rangle\langle u,y\rangle + \beta\langle u,x\rangle\langle v,y\rangle - \alpha\langle v,y\rangle\langle x,u\rangle - \beta\langle u,y\rangle\langle x,v\rangle \\
&= \alpha\left(\langle v,x\rangle\langle u,y\rangle - \langle v,y\rangle\langle x,u\rangle\right) + \beta\left(\langle u,x\rangle\langle v,y\rangle - \langle u,y\rangle\langle x,v\rangle\right) \\
&= (\alpha - \beta)\left(\langle v,x\rangle\langle u,y\rangle - \langle u,x\rangle\langle v,y\rangle\right)
\end{aligned}$$

1^{er} cas $\alpha = \beta$:

$\forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle - \langle x, f(y)\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$

D'où f est un endomorphisme symétrique de E.

2^{me} cas $\alpha \neq \beta$: Supposons que f est un endomorphisme symétrique.

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle - \langle x, f(y)\rangle = 0 &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2,\ \langle v,x\rangle\langle u,y\rangle - \langle u,x\rangle\langle v,y\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \langle\langle v,x\rangle u - \langle u,x\rangle v, y\rangle \\
&\Leftrightarrow \forall x \in E,\ \langle v,x\rangle u - \langle u,x\rangle v \in E^\perp \\
&\Leftrightarrow \forall x \in E,\ \langle v,x\rangle u - \langle u,x\rangle v = 0,\ car\ E^\perp = \{0_E\} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in E,\ \langle v,x\rangle = \langle u,x\rangle = 0,\ car\ (u,v)\ libre \\
&\Leftrightarrow \forall x \in E,\ x \in F^\perp \\
&\Leftrightarrow E \subset F^\perp\ contradiction,
\end{aligned}$$

car $dim(E) = n > dim(F) = n - 2$. Donc f n'est pas symétrique.

Finalement f est symétrique si et seulement si $\alpha = \beta$.

b) Dans ce cas $\alpha = \beta$, donc f est symétrique et g aussi.

• La matrice de g dans la base $B = (u,v)$:

On a : $\begin{cases} g(u) = \alpha\langle v,u\rangle u + \beta\langle u,u\rangle v \\ g(v) = \alpha\langle v,v\rangle u + \beta\langle u,v\rangle v \end{cases}$, d'où

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} \alpha\langle v,u\rangle & \alpha\langle v,v\rangle \\ \beta\langle u,u\rangle & \beta\langle u,v\rangle \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \langle u,v\rangle & \|v\|^2 \\ \|u\|^2 & \langle u,v\rangle \end{pmatrix} = M$$

• Les valeurs propres de f : Soit λ v. p. de f d'où

$$\begin{aligned} P_M(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow (\alpha\langle u,v\rangle - \lambda)(\alpha\langle u,v\rangle - \lambda) - (\alpha\|u\|\|v\|)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha\langle u,v\rangle - \lambda)^2 = (\alpha\|u\|\|v\|)^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\langle u,v\rangle - \lambda = \alpha\|u\|\|v\| \\ \qquad ou \\ \alpha\langle u,v\rangle - \lambda = -\alpha\|u\|\|v\| \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \alpha\left(\langle u,v\rangle - \|u\|\|v\|\right) \\ \qquad ou \\ \lambda = \alpha\left(\langle u,v\rangle + \|u\|\|v\|\right) \end{cases} \end{aligned}$$

D'où l'ensemble des valeurs propres de g est :
$\{\alpha(\langle u,v\rangle - \|u\|\|v\|),\ \alpha(\langle u,v\rangle + \|u\|\|v\|)\}$. *Donc l'ensemble des valeurs propres de f est :* $\{0,\ \alpha(\langle u,v\rangle - \|u\|\|v\|),\ \alpha(\langle u,v\rangle + \|u\|\|v\|)\}$.

• Les sous-espaces propres : Nous avons vu plus haut que tout vecteur propre de f associé à une valeur propre non nulle λ est un vecteur propre de g associé à la valeur propre λ et réciproquement.
Donc si λ est une valeur propre non nulle de f donc de g, $\lambda = \alpha(\langle u,v\rangle \pm \|u\|\|v\|)$
Soit $x = au + bv = (a,b)_B \in F$. D'où

$$\begin{aligned} x \in E_\lambda &\Leftrightarrow f(x) = \lambda x \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha\langle u,v\rangle & \alpha\|v\|^2 \\ \alpha\|u\|^2 & \alpha\langle u,v\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha\langle u,v\rangle - \lambda)a + \alpha\|v\|^2 b = 0 \\ \alpha\|u\|^2 a + (\alpha\langle u,v\rangle - \lambda)b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Supposons que : $\lambda_1 = \alpha(\langle u,v\rangle - \|u\|\|v\|)$. En substituant dans le système ci-dessus on trouve

$$\begin{cases} (\alpha\langle u,v\rangle - \lambda_1)a + \alpha\|v\|^2 b = 0 \\ \alpha\|u\|^2 a + (\alpha\langle u,v\rangle - \lambda_1)b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\|u\|\|v\|a + \alpha\|v\|^2 b = 0 \\ \alpha\|u\|^2 a + \alpha\|u\|\|v\|b = 0 \end{cases}$$

Puisque $\alpha \neq 0$, $\|u\| \neq 0$ et $\|v\| \neq 0$ on obtient

$$\begin{cases} \alpha\|u\|\|v\|a + \alpha\|v\|^2 b = 0 \\ \alpha\|u\|^2 a + \alpha\|u\|\|v\|b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|u\|a + \|v\|b = 0 \\ \|u\|a + \|v\|b = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad b = -\frac{\|u\|}{\|v\|}a$$

D'où

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \left\{x = au - \frac{\|u\|}{\|v\|}av = a\left(u - \frac{\|u\|}{\|v\|}v\right),\ a \in \mathbb{R}\right\} \\ &= Vect\left(u - \frac{\|u\|}{\|v\|}v\right) \\ &= Vect\left\{\left(1, -\frac{\|u\|}{\|v\|}\right)\right\} \end{aligned}$$

Pour $\lambda_2 = \alpha\left(\langle u, v\rangle + \|u\|\|v\|\right)$ on obtient par la même procédure que

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \left\{x = au + \frac{\|u\|}{\|v\|}av = a\left(u + \frac{\|u\|}{\|v\|}v\right),\ a \in \mathbb{R}\right\} \\ &= Vect\left(u + \frac{\|u\|}{\|v\|}v\right) \\ &= Vect\left\{\left(1, \frac{\|u\|}{\|v\|}\right)\right\} \end{aligned}$$

Pour $\lambda = 0$ on a

$$E_{\lambda=0} = \{x \in E,\ f(x) = \lambda x = 0_E\} = Ker(f) = (Vect(u, v))^{\perp}.$$

Solution. 3.8

1. a) Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} \langle g(x+y), x+y\rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle g(x) + g(y), x+y\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle g(x), x\rangle + \langle g(x), y\rangle + \langle g(y), x\rangle + \langle g(y), y\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle g(x), y\rangle + \langle g(y), x\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle g(x), y\rangle + \langle y, g(x)\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\langle g(x), y\rangle = 0 \end{aligned}$$

D'où $\forall x \in E, \forall y \in E,\ \langle g(x), y\rangle = 0$. Ainsi $g(x) \in E^{\perp}$ et $E^{\perp} = \{0_E\}$

Alors $\forall x \in E, g(x) = 0$. *Donc* g *est un endomorphisme nul.*

Rappel : En fait $\forall x \in E, \langle g(x), x\rangle = 0$ signifie que g est un endomorphisme antisymétrique. Toute endomorphisme symétrique et antisymétrique est nul.

b) Posons $h = \sum_{k=1}^{p} f_k - Id_E$. Il est évident que h est est un endomorphisme symétrique (combinaison linéaire des $p+1$ endomorphismes symétriques).

$$\begin{aligned}
\forall x \in E,\ \langle h(x), x\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{p} f_k(x) - x, x \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{p} \langle f_k(x), x\rangle - \langle x, x\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{p} \langle f_k(x), x\rangle - \|x\|^2 = 0
\end{aligned}$$

h est symétrique et $\forall x \in E, \langle h(x), x\rangle = 0$. D'où $h = 0_{L(E)}$.

Alors $\sum_{k=1}^{p} f_k = Id_E$.

2. a) Soit $x \in E$.

$$\forall x \in E,\ x = Id_E(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x) \in \sum_{k=1}^{p} Im(f_k).$$

Alors $E \subset \sum_{k=1}^{p} Im(f_k)$ et comme $\sum_{k=1}^{p} Im(f_k) \subset E$.
Ainsi $\sum_{k=1}^{p} Im(f_k) = E$.
D'autre part on a :

$$dim \sum_{k=1}^{p} Im(f_k) = dim(E) = n = \sum_{k=1}^{p} rg(f_k) \quad \Leftrightarrow \quad dim \sum_{k=1}^{p} Im(f_k) = \sum_{k=1}^{p} dim(Im(f_k)) = dim(E).$$

D'où E est somme directe des sous-espaces vectoriels $Im(f_1)$, $Im(f_2)$, ..., $Im(f_p)$.

b) On a : $\sum_{k=1}^{p} f_k = Id_E$. Alors

$$\forall x \in E,\ \forall i \in [1, p],\ \sum_{k=1}^{p} f_k(f_i(x)) = f_i(x).$$

c) Soit $x \in E$ et soit $i \in [1, p]$.
Posons : $\forall k \in [1, p],\ t_k = f_k(f_i(x))$ et

$$t'_k = \begin{cases} f_i(x),\ si\ k = i \\ 0_E,\ sinon \end{cases}$$

Alors $\forall k \in [1, p],\ t_k \in Im(f_k)$ et $t'_k \in Im(f_k)$. De plus on a : $\sum_{k=1}^{p} t_k = \sum_{k=1}^{p} t'_k$. Comme $Im(f_1)$, $Im(f_2)$, ..., $Im(f_p)$ soit en somme directe, alors $\forall k \in [1, p],\ t_k = t'_k$.

Ainsi

$$\forall k \in [1,p],\ f_k(f_i(x)) = \begin{cases} f_i(x),\ si\ k = i \\ 0_E,\ sinon \end{cases}$$

Ceci pour tout x dans E et tout i dans $[1,p]$. Alors

$$\forall k \in [1,p],\ \forall i \in [1,p],\ f_k \circ f_i = \begin{cases} f_i,\ si\ k = i \\ 0_{L(E)},\ sinon \end{cases}$$

Donc en particulier $\forall i \in [1,p],\ f_i \circ f_i = f_i$ et $f_i \in L(E)$.

D'où $f_1,\ f_2,\ ...,\ f_p$ sont des projecteurs.

Montrons que f_i est une projection orthogonale pour tout i dans $[1,p]$.
Soit $i \in [1,p]$. f_i est une projection sur $Im(f_i)$ parallèlement à $Ker(f_i)$ et $E = Im(f_i) \oplus Ker(f_i)$.
Notons également que pour $x \in Im(f_i)$ et $y \in Ker(f_i)$, $\exists t \in E,\ x = f_i(t)$ et $f_i(y) = 0_E$. D'où

$$\langle x,\ y\rangle = \langle f_i(t),\ y\rangle = \langle t,\ f_i(y)\rangle = \langle t,\ 0_E\rangle = 0.$$

Donc $\forall x \in Im(f_i), \forall y \in Ker(f_i), \langle x,\ y\rangle = 0$.
Alors $Im(f_i)$ et $Ker(f_i)$ sont supplémentaires et orthogonaux. Donc $Im(f_i) = (Ker(f_i))^{\perp}$.

Alors f_i est la projection orthogonale sur $Im(f_i)$.

Remarque : Nous venons de démontrer qu'une projection qui est un endomorphisme symétrique est une projection orthogonale.

Chapitre 4

Formes quadratiques

Dans tout ce chapitre K désigne un corps commutatif de caractéristique différente de deux, ce qui signifie que dans ce corps $1+1 \neq 0$. Moralement cela revient à dire que dans K on peut diviser par deux. E un K-espace vectoriel de dimension finie.

On s'intéresse ici aux fonctions de K^n définies par des formules de type

$$q(x_1,\dots,x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 + \mu x_1 x_2 + \dots + \mu_{n-1,n} x_{n-1} x_n$$

où les λ_i et les μ_{ij} sont des scalaires fixes. Ce sont les fonctions définies par les polynômes homogènes de degré deux. On les appelle formes quadratiques. Elles apparaissent par exemple dans l'étude des courbes algébriques de degré deux. Dans $\mathbb{R}^2$, une courbe de degré deux est une partie (C) définie par une équation

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0,$$

où $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6$ et $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Le membre de gauche de cette équation est constitué d'une forme quadratique $(ax^2 + by^2 + cxy)$, d'une forme linéaire $(dx + ey)$ et d'une constante (f). L'étude des formes quadratiques permet de montrer assez facilement que C est une conique.

4.1 Résumé de cours

4.1.1 Formes quadratiques

Toute forme bilinéaire b sur E définit une fonction q sur E par

$$q(x) = b(x,x)$$

Une telle fonction est appelée forme quadratique sur E. Il se trouve qu'il est inutile de faire appel à toutes les formes bilinéaires pour obtenir toutes les formes quadratiques sur E. En effet,

- premièrement, si b est alternée alors pour tout $x \in E, b(x,x) = 0$,
- et deuxièmement, $b(x,x) = b_{sym}(x,x) + b_{alt}(x,x) = b_{sym}(x,x)$.

Ainsi, b définit la même forme quadratique que la forme symétrique b_{sym} : deux formes bilinéaires qui différent d'une forme alternée définissent la même forme quadratique. Nous adopterons la définition suivante :

Définition 4.1. Soit E un K-espace vectoriel et $q : E \to K$. On dit que q est une forme quadratique sur E s'il existe une forme bilinéaire symétrique b sur E telle que pour tout $x \in E$,

$$q(x) = b(x,x)$$

On dit que q est la forme quadratique associée à b et b la forme polaire de q. On note $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E.
Nous avons une surjection naturelle

$$S_2(E) \to Q(E)$$

et aussi

$$L_2(E) \to Q(E).$$

Exemple 4.1. 1) La fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

est la forme quadratique sur $\mathbb{R}$ associée à la forme bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy. \end{array}$$

2) La fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 \end{array}$$

est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ associée à la forme bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x_1y_1 + 5x_2y_2 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1. \end{array}$$

3) La fonction

$$\begin{array}{rcl} C([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,dt \end{array}$$

est la forme quadratique sur $C([0,1],\mathbb{R})$ associée à la forme bilinéaire

$$\begin{array}{rcl} C([0,1],\mathbb{R})\times C([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt. \end{array}$$

4) La fonction

$$\begin{array}{rcl} M_n(K) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & Tr\left(M^2\right) \end{array}$$

est la forme quadratique sur $M_n(K)$ associée à la forme bilinéaire

$$\begin{array}{rcl} M_n(K)\times M_n(K) & \to & \mathbb{R} \\ (M,N) & \mapsto & Tr(MN). \end{array}$$

Proposition 4.1. (**Identités remarquables**)

Soit b une forme bilinéaire symétrique sur E, q la forme quadratique associée à b, on a pour tout $x,y\in E$

1) $q(\lambda x)=\lambda^2 q(x), \ \ \forall \lambda\in K$

2) $q(x+y)=q(x)+q(y)+2b(x,y)$,

3) $b(x,y)=\frac{1}{2}\left[q(x+y)-q(x)-q(y)\right]$

Proposition 4.2. Si q est un forme quadratique sur E, alors il existe une unique forme bilinéaire symétique sur E associée à q qu'on appelle *forme polaire* de q définie par

$$b(x,y)=\frac{1}{2}[q(x+y)-q(x)-q(y)].$$

Exemple 4.2. Soit la forme quadratique q définie par :

$$\begin{array}{rcl} q & : & \mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ q(x) & = & 2x_1^2+5x_2^2-4x_1x_2, \end{array}$$

tel que $x = (x_1, x_2)$. Sa forme polaire est

$$\begin{aligned} b(x,y) &= \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] \\ &= 2x_1y_1 + 5x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 \end{aligned}$$

Remarque 4.1. Quand la forme quadratique est donnée par un polynôme homogène de degré deux, la forme polaire b s'obtient en polarisant chaque monôme de ce polynôme.

Un monôme de la forme $(a_{ii}x_i^2)$ est polarisé en $(a_{ii}x_iy_i)$ et un monôme de la forme $\left(a_{ij}x_ix_j\right)$ est polarisé en $\frac{a_{ij}}{2}\left(x_iy_j + x_jy_i\right)$.

Exemple 4.3. 1) Dans l'exemple 4.2 on a

$$\begin{aligned} b(x,y) &= 2x_1y_1 + 5x_2y_2 - \frac{4}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= 2x_1y_1 + 5x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 \end{aligned}$$

2) La forme quadratique

$$\begin{aligned} q &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ q(x) &= 7x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2x_3, \end{aligned}$$

se polarise en

$$\begin{aligned} b &: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ b(x,y) &= 7x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + \frac{5}{2}x_2y_3 + \frac{5}{2}x_3y_2. \end{aligned}$$

4.1.2 Matrice d'une forme quadratique

Soient E un espace vectoriel de dimension n, x et y des éléments de E, $B = (e_i)$ une base de E et b une forme bilinéaire sur E. D'après le chapitre 2 on a montré que $b(x,y) = {}^t XMY$, où

$$M = M_B(b) = \left(a_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \left(b(e_i, e_j)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

Définition 4.2. Soient E un espace vectoriel de dimension n, (e_i) une base de E, b une forme bilinéaire symétrique sur E et q une forme quadratique associée à b. La matrice $M_B(b)$ est aussi appelée matrice de q dans B, c-à-d. $M_B(q) = M_B(b)$, d'où on a pour tout $x \in E$

$$q(x) = b(x,x) = {}^t XMX,$$

où X est la matrice colonne des coordonnées de x. On déduit que

$$\begin{aligned} q(x) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j. \end{aligned}$$

Si on écrit l'expression précédente sous la forme

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} c_{ij}x_ix_j, \text{ où } c_{ii} = a_{ii} \text{ et } c_{ij} = 2a_{ij}$$

on a

$$M_B(q) = \begin{pmatrix} c_{11} & \frac{c_{12}}{2} & \cdots & \frac{c_{1n}}{2} \\ \frac{c_{12}}{2} & c_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{c_{n-1,n}}{2} \\ \frac{c_{1n}}{2} & \cdots & \frac{c_{n-1,n}}{2} & c_{nn} \end{pmatrix}$$

qui est une matrice symétrique.

Exemple 4.4. Soit la forme quadratique

$$q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \text{ où } q(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2x_3,$$

on a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 7 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit q une forme quadratique donnée et b sa forme polaire, on a les résultats suivants

Remarque 4.2. 1) Si q est une forme quadratique donnée par

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j$$

alors sa forme polaire est donnée par

$$b(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_iy_i + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}\left(x_iy_j + x_jy_i\right).$$

2) Une forme quadratique q est dite non dégénérée quand sa forme polaire b l'est.

3) On définit le noyau et le rang d'une forme quadratique comme ceux de sa forme polaire. C-à-d. $\ker(q) = \ker(b), rang(q) = rang(b)$.

4) On dit que $x \in E$ est isotope par rapport à q si $q(x) = 0$.

5) L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel de E par rapport à q est son orthogonal par rapport à b.

Exemple 4.5. Soit la forme quadratique : $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$q(x) = x_1^2 - x_2^2.$$

◊ La matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

◊ La forme polaire de q est

$$b(x,y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

◊ Le noyau de q est

$$\ker(q) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : b(x,y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^2\right\}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} b(x,e_1) = 0 \\ b(x,e_2) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

d'où

$$\ker(q) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

On déduit que q est non dégénérée et $rang(q) = 2$.

◊ Les vecteurs isotropes de q sont les deux droites vectorielles d'équations : $x_2 = x_1$ et $x_2 = -x_1$.

4.1.3 Réduction des formes quadratiques

Réduction dans le cas général

On rappelle qu'une base $B = (e_1, ..., e_n)$ d'un K-espace vectoriel E est dite b-orthogonale où b est une forme bilinéaire sur E si et seulement si pour tout $i, j \in [1, n]; i \neq j, b(e_i, e_j) = 0$, c-à-d. les vecteurs de B sont deux à deux b-orthogonaux.

On dit que $B = (e_i)$ est b-orthonormée si pour tout $(i, j) \in \{1, ..., n\}^2$,

$$b(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases},$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Nous savons que tout espace euclidien E possède des bases orthonormée et que dans une telle base, $b(x, y)$ prend la forme

$$b(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ et } q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Nous allons généraliser ce résultat aux formes quadratiques.

Proposition 4.3. On notera que les assertions suivantes sont équivalentes

1. La base $B = (e_i)$ est q-orthogonale.
2. Dans la base $B = (e_i)$ la forme q s'écrit sous la forme $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$.
3. Dans la base $B = (e_i)$ la matrice de q est diagonale.

De la même manière nous avons les équivalences suivantes

1. La base $B = (e_i)$ est q-orthonormée.
2. Dans la base $B = (e_i)$ la forme q s'écrit sous la forme $q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
3. Dans la base $B = (e_i)$ la matrice de q est la matrice identité.

Définition 4.3. On appelle réduction d'une forme quadratique q, la recherche d'une base orthogonale de E, tel que sur cette base q s'écrit sous la forme

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2, \lambda_i \in \mathbb{R}$$

et les (x_i) sont les coordonnées de x dans cette base. De plus la matrice de q dans cette base est diagonale.

Théorème 4.1. *Nous donnons deux formulations différentes du même résultat.*

1. *Tout espace pseudo-euclidien (E, q) de dimension finie possède une base orthogonale.*

2. *Tout espace pseudo-euclidien (E, q) de dimension finie possède une base dans laquelle la matrice de q est diagonale.*

Autrement dit ils existent $r \in \{1, ..., n\}$, une base $(e_1, ..., e_n)$ de E et des scalaires non nuls $\lambda_1, ..., \lambda_r$ tels que

$$M(q) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_r & & & 0 \\ 0 & & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

évidemment r est le rang de q.

Remarque 4.3. Le théorème spectral est un résultat propre au corps $\mathbb{R}$. Premièrement, dans un espace complexe E il n'y a pas de bases orthonormées : pour obtenir une notion analogue il faut remplacer la notion de produit scalaire par la notion de produit hermitien. Deuxièmement, il existe des matrices symétriques complexes qui ne sont pas diagonalisables, c'est le cas par exemple de

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

On laisse au lecteur le soin de le vérifier.

Réduction en carrés de Gauss

Nous donnons ici une autre manière d'établir le théorème de réduction. Cette méthode due à **Carl Friedrich Gauss** est pratique pour les exercices, et permet d'obtenir explicitement et facilement une base orthogonale. Commençons par reformuler le théorème de réduction.

Soit q une forme quadratique non nulle sur un K-espace vectoriel E de dimension finie n muni d'une base $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ de sorte que, pour tout $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n \in E$.

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2 a_{ij} x_i x_j. \tag{4.1}$$

La méthode de Gauss consiste à écrire q sous la forme d'une combinaison de carrés de formes linéaires indépendantes $l_1,...,l_n$ en procédent par récurrence sur n. Distingons deux cas

Premier cas : L'un des a_{ii} est non nul, par exemple $a_{11} \neq 0$. Alors on sépare dans (4.1) les monomes contenant x_1 des autres

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + x_1 f(x_2,...,x_n) + g(x_2,...,x_n),$$

où f est une forme linéaire et g est une forme quadratique en les $x_2,...,x_n$. On écrit alors

$$\begin{aligned} q(x) &= a_{11}\left(x_1 + \frac{f(x_2,...,x_n)}{2a_{11}}\right)^2 - \frac{(f(x_2,...,x_n))^2}{4a_{11}} + g(x_2,...,x_n) \\ &= a_{11}(l_1(x))^2 + q'(x), \end{aligned}$$

où $l_1(x) = x_1 + \frac{f(x_2,...,x_n)}{2a_{11}}$ une forme linéaire et $q'(x) = -\frac{(f(x_2,...,x_n))^2}{4a_{11}} + g(x_2,...,x_n)$ une forme quadratique en les $x_2,...,x_n$. On applique le même procédé de récurrence sur $q'(x)$ on obtient des formes linéaires indépendantes de la forme linéaire l_1 telles que

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (l_i(x))^2, r \leq n.$$

Deuxième cas : Tous les a_{ii} sont nuls. Dans ce cas $q(x)$ ne s'écrit qu'avec des rectangles

$$q(x) = \sum_{1\leq i<j\leq n} 2a_{ij}x_i x_j = \sum_{1\leq i<j\leq n} c_{ij}x_i x_j, \text{ où } c_{ij} = 2a_{ij}.$$

Il existe $i < j$ tel que c_{ij} est non nul et quitte à permuter les indices nous pouvons supposer que $c_{12} \neq 0$. Décomposons $q(x)$ selon les termes qui contiennent x_1, ceux qui contiennent x_2 et les autres :

$$q(x) = c_{12}x_1x_2 + x_1 f(x_3,...,x_n) + x_2 g(x_3,...,x_n) + h(x_3,...,x_n),$$

où f,g sont des formes linéaires et h est une forme quadratique en les $x_3,...,x_n$. On écrit alors

$$\begin{aligned} q(x) &= c_{12}\left(x_1x_2 + \frac{f}{c_{12}}x_1 + \frac{g}{c_{12}}x_2\right) + h \\ &= c_{12}\left(x_1 + \frac{g}{c_{12}}\right)\left(x_2 + \frac{f}{c_{12}}\right) - \frac{fg}{c_{12}} + h. \end{aligned}$$

On utilise l'identité remarquable

$$ab = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right],$$

on obtient

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{c_{12}}{4}\left(x_1 + x_2 + \frac{f}{c_{12}} + \frac{g}{c_{12}}\right)^2 - \frac{c_{12}}{4}\left(x_1 - x_2 + \frac{g}{c_{12}} - \frac{f}{c_{12}}\right)^2 - \frac{fg}{c_{12}} + h \\ &= \frac{c_{12}}{4}\left(l_1(x)\right)^2 - \frac{c_{12}}{4}\left(l_2(x)\right)^2 + q'(x), \end{aligned}$$

où l_1, l_2 sont deux formes linéaires indépendantes et $q'(x)$ est une forme quadratique en les $x_3, ..., x_n$. On itère le même procédé sur la forme quadratique $q'(x)$ on obtient

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left(l_i(x)\right)^2, r \leq n,$$

où les $l_1, ..., l_r$ sont des formes linéaires indépendantes et l'entier $r \leq n$ est le rang de q.

Définition 4.4 (Signature d'une forme quadratique)**.** Si $K = \mathbb{R}$, il existe une base orthogonale $B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ où la matrice de q est diagonale. Soit s le nombre de coefficients strictement positifs et soit t le nombre de coefficients strictement négatifs. Le couple (s, t) s'appelle **la signature** de q noté $sgn(q)$. C-à-d.

$$s = card\{i \in [1, n] : q(e_i) > 0\}, t = card\{i \in [1, n] : q(e_i) < 0\},$$

et $r = s + t$ est le rang de q c-à-d. $rg(q) = s + t$.

Remarque 4.4. 1. Si $t = 0$, on dit que la forme q est positive.

2. Si $s + t = n$, on dit que la forme est nondégénérée.

3. Si $s = n$, on dit que la forme est définie positive. Dans ce cas, la forme polaire b est un produit scalaire et l'espace muni de b est euclidien.

Théorème 4.2 (Loi d'inertie de Sylvester)**.** *La signature (s, t) est un invariant de q, c-à-d. la signature de q ne dépend pas du choix de la base q-orthogonale. Autrement dit :*

Soit q une forme quadratique de rang r sur un espace vectoriel réel E de dimension finie. Alors, il existe $(e_1, ..., e_n)$ une base de E, et des entiers s et t tels que, pour tout vecteur $x = x_1e_1 + ... + x_ne_n$ de E, on ait

$$q(x) = x_1^2 + ... + x_s^2 - x_{s+1}^2 - ... - x_{s+t}^2, \quad s + t = r \leq n.$$

Le couple (s,t) est unique.

Remarque 4.5. La loi d'inertie de Sylvester est un théorème de classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel de dimension finie.

Sylvester applique ces résultats à la mécanique et analyse l'énergie à transmettre à un solide pour lui donner une vitesse de rotation. C'est ce qu'on désigne par principe d'inertie de Sylvester .

La réduction dans une base de vecteurs propres

Théorème 4.3. *Soit q une forme quadratique définie sur l'espace vectoriel réel E muni d'une base B. Notons $M = mat_B(q)$, alors il existe au moins une base $q-$orthogonale sur laquelle q s'écrit sous la forme :*

$$q(x) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2,$$

où les $\left(x_i'\right)_{1\leq i\leq n}$ sont les coordonnées de x dans cette base, les $\lambda_i \in \mathbb{R}$ sont les valeurs propres de M.

Remarque 4.6. Attention, les éléments de la diagonale de la matrice d'une forme quadratique dans une base $q-$orthogonale ne sont pas nécessairement les valeurs propres de $M = M_B(q)$.

Corollaire 4.1. Soit q une forme quadratique de signature (s,t) et B une base de E. Si $M = M_B(q)$, alors s est le nombre de valeurs propres positives de M et t est le nombre de valeurs propres négatives de M.

Proposition 4.4. Soit q une forme quadratique définie sur un espace vectoriel réel E de signature (s,t) et $M = mat_B(q)$.

1. q est positive **ssi** toutes les valeurs propres de M sont positives.
2. q est définie positive **ssi** toutes les valeurs propres de M sont strictement positives.

Formes quadratiques équivalentes

Définition 4.5. Deux formes quadratiques q_1, q_2 définies sur E sont dites équivalentes s'il existe un automorphisme $u : E \to E$ tel que

$$q_2 = q_1 \circ u.$$

Remarque 4.7. La relation binaire "**équivalente**" est une relation d'équivalence.

Proposition 4.5. Soient B une base de E, q_1 et q_2 deux formes quadratiques de E de matrices A_1 et A_2 respectivement dans B. Alors, q_1 et q_2 sont équivalentes si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que

$$A_2 =^t PA_1P.$$

q_1 et q_2 sont équivalentes si et seulement s'il existe un automorphisme $u : E \to E$ tel que

$$q_2 = q_1 \circ u.$$

Notons $P = mat_B(u)$, soient $x \in E$ et X la matrice colonne des coordonnées de x dans B. On a

$$q_2(x) = q_1(u(x)) \Leftrightarrow^t XA_2X =^t (PX)A_1PX =^t X\left({}^tPA_1P\right)X.$$

D'où

$$A_2 =^t PA_1P.$$

Remarque 4.8. Deux forme quadratiques sont équivalentes si elles ont la même signature.

4.2 Exercices

Exercice 4.1. Soit la matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -a \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la forme bilinéaire φ_M de M.
2. Déterminer l'orthogonal pour φ_M de $F = vect\{v = (1,-1,2)\}$ en fonction de a.
3. Pour quelles valeurs de a, $F \oplus F^{\perp} = \mathbb{R}^3$.
4. Calculer le déterminant de M, en déduire l'orthogonal de $\mathbb{R}^3$ pour φ_M.
5. Par la méthode de Gauss, réduire la forme quadratique q associée à la forme φ_M. En déduire La signature de q et une base φ_M-orthogonale pour $\mathbb{R}^3$.
6. Dans quel cas la forme q n'est pas définie.
7. Déterminer les formes linéaires $l_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dans la forme diagonale de q, forment-elles une base ? déterminer la base antéduale (préduale).

Exercice 4.2. Pour chaque $m \in \mathbb{R}$, on considère la forme quadratique q_m du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ qui à (x,y,z) associe le scalaire :

$$q_m(x,y,z) = x^2 + (m+8)y^2 + 4z^2 - 6xy + 4xz + (m-12)yz$$

1) Décomposer q_m en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$.

2) Pour chaque m, déterminer une base orthogonale B_m diagonalisant q_m et donner une expression et une matrice de q_m dans cette base.

3) Déduire suivant les valeurs de m le rang de q_m.

4) Déduire la signature de q_m en fonction des valeurs de m.

Exercice 4.3. Soit $E = \mathbb{R}^4$ munit de la base canonique $B = (e_1, ..., e_n)$. Pour chaque réel m on considère la forme bilinéaire b_m telle que

$$M(b_m, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & m & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & m \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la forme quadratique q_m associée à b_m.
2. Discuter la signature et le rang de q_m en fonction de m.
3. Pour quelles valeurs de m, la forme b_m est un produit scalaire.

4. Déterminer N : le noyau (le radical) de $b_{\frac{1}{4}}$.

5. Soit F le sous espace vectoriel de E engendré par $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.
Montrer que $F \oplus N = E$.

Exercice 4.4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 munit d'une base $B = (v_1,\ v_2,\ v_3)$. Soit la forme quadratique

$$\begin{aligned} Q : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,\ x_2,\ x_3) &\longmapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_2 x_3 \end{aligned}$$

1. Montrer que la forme polaire S_Q (forme bilinéaire associée à Q) est un produit scalaire sur E.

Dans la suite, on pose pour tout $(x, y) \in E^2$: $\langle x, y\rangle = S_Q(x, y)$.

2. Calculer $\langle f_i, f_j\rangle$, pour $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$.

3. Par le procédé de Gram-Schmidt, déterminer une base orthonormée par rapport à S_Q à partir de $B = (v_1,\ v_2,\ v_3)$.

4. Soit $u = v_1 + v_2$.

a) Donner un vecteur v orthogonal à u.

b) Calculer la norme de $u \wedge v$.

c) Si B est une base orthogonale directe de E, déterminer les coordonnées d'un vecteur w de E telle que $C = (u, v, w)$ soit une base orthogonale directe de E.

5. Montrer que

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow E \\ (x_1,\ x_2,\ x_3) &\longmapsto x_1 \tfrac{u}{\|u\|} + x_2 \tfrac{v}{\|v\|} + x_3 \tfrac{w}{\|w\|} \end{aligned}$$

est une isométrie.

6. Calculer la matrice de ϕ dans la base B.

Exercice 4.5. Soit la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2\,(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$$

B est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Calculer la matrice M de q par rapport à B.

2) Trouver une base orthonormée B' de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de M.

3) Calculer une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que : ${}^tPMP = D$.

4) A partir de l'expression de q dans B' déduire une réduction en carrés de q.

Exercice 4.6. Soit $\mathbb{R}^3$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel munit de la base canonique B. Soit la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 + 8x_1x_3.$$

1) Calculer le noyau $Ker(q)$ et déduire le rang de q. Que peut-on déduire ?

2) Trouver une réduction en carrés de Gauss en précisant une base q-orthogonale B'.

3) Calculer la matrice de q dans cette base, la signature de q et déduire une autre fois le rang de q.

4) Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes de q dans la base B'.

Exercice 4.7. 1) En utilisant les valeurs propres d'une matrice, diagonaliser dans une base orthonormée la forme quadratique suivante :

$$q(x) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3,\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

2) Déduire la signature et le rang de q. La forme est -elle dégénérée ? La forme est-elle définie (semi-définie) positive, négative, non définie ?

3) Déterminer les vecteurs isotropes en déduire le noyau de q.

Exercice 4.8. Soit q une forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{array}{rcl} q : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3}{2}x_1^2 + 2x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 - x_1x_3. \end{array}$$

1) Déterminer la forme bilinéaire b associée à la forme quadratique q ainsi que sa matrice dans la base canonique B et son noyau. Que peut-on déduire ?
2) Déterminer l'orthogonal de $F = vect\{v = (1, -1, 0)\}$ pour la forme b.
3) Montrer que F et $F^\perp$ forment une somme directe de $\mathbb{R}^3$.
4) Déduire une base de $\mathbb{R}^3$ orthonormée pour b.

Exercice 4.9. Soient E un espace vectoriel de dimension quelconque, $f \in L_2(E)$ et q la forme quadratique associée.
Soient $a \in E$ et $q_1(x) = q(a)q(x) - (f(a,x))^2$, $\forall x \in E$.
1. Montrer que $q_1 \in Q(E)$ (est une forme quadratique sur E).
2. Dans le cas général, déterminer $Ker(q_1)$ en fonction de $Ker(q)$ et a.
3. Si $dim(E) = n$ est finie, comparer $rg(q_1)$ et $rg(q)$.

Exercice 4.10. Soit q l'application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$q(A) = Tr(A^2),\ \forall A \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que q est une forme quadratique.
2. Déterminera sa signature.

Exercice 4.11. Soient $B_0 = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2.$$

1. Montrer que q définie un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa matrice par rapport à B_0.

2. Soit F le plan d'équation $x_1 + x2 + x_3 = 0$ dans la base B_0.

(a) Déterminer $F^\perp$ et une base orthonormée $(v_1,\ v_2)$ de F.

(b) Compléter $(v_1,\ v_2)$ en une base orthonormée $B = (v_1\ v_2,\ v_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de q par rapport à B ?

Exercice 4.12. Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension n et $(v_1,\ \ldots,\ v_p)$ une famille libre de E.
Soit q l'application définie sur $\mathbb{R}^p$ par :

$$q\left(x_1,\ \ldots,\ x_p\right) = \left\| \sum_{i=1}^{p} x_i v_i \right\|^2.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^p$ dont on déterminera sa forme polaire.

2. Déterminer le noyau de q, puis son rang. Quelle est sa signature ?

Exercice 4.13. On définit l'application q sur $\mathbb{R}_2[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ q(P) = P'(1)^2 - P'(0)^2.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique et déterminer la forme polaire φ associée ainsi que sa matrice dans la base canonique.

2. Déterminer le noyau de q et son cône isotrope. Est-ce que ce sont des espaces vectoriels ?

3. La forme quadratique q est-elle non dégénérée ? Définie ? Positive ou négative ?

4. Déterminer une base de $\left\{X^2\right\}^\perp$.

5. Déterminer $\{1\}^\perp$.

Exercice 4.14. (Supplémentaire)

On considère la fonction $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(x,y,z) = 4x^2 - 7y^2 - 12xy + 16xz - 48yz.$$

1) Prouver que la fonction ϕ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer si la forme quadratique ϕ est dégénérée ou non.

3) Effectuer l'algorithme de Gauss sur la forme quadratique ϕ.

4) Déterminer la signature de la forme quadratique ϕ.

5) Déduire de la décomposition en carrés obtenue en 3) une base ϕ-orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.15. (Supplémentaire)

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. On note B une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de E.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et q la forme quadratique définie par :

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + ax_4^2 + 2x_1x_2 + 4bx_1x_3 + 4bx_2x_3 + 2cx_2x_4.$$

1. Déterminer la forme polaire de q ainsi que la matrice de q dans la base B.
2. Donner une réduction en carrés de Gauss de la forme quadratique q.
3. Déterminer le rang et la signature de q en fonction des paramètres réels a, b et c.
4. Préciser une base de E qui soit orthogonale pour q.

Contrôle d'algèbre 4 (Mai 2023)

Exercice 1 : On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique q définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 16x_2x_3.$$

1. Calculer sa matrice et sa forme polaire b.

2.1. Donner la réduction en carrés de Gauss pour q. En déduire : La signature et le rang de q. Que peut-on déduire ?

2.2. Trouver une base q-orthogonale B' pour $\mathbb{R}^3$.

2.3. Donner l'expression et la matrice de q dans la base B'.

3. Pour tout réel λ, on note $F_\lambda = Vect(v_\lambda = (\lambda, -1, 1))$ et $F_\lambda^\perp$ son orthogonal.

Déterminer la dimension de $F_\lambda^\perp$ et trouver les valeurs de λ pour lesquelles on a : $\mathbb{R}^3 = F_\lambda \oplus F_\lambda^\perp$.

Exercice 2 : Soit $E = C([-1,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R},\ (f,g) \longmapsto \varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire.

2. Soit $P = \{f \in E : f est paire\}$, $I = \{f \in E : f est impaire\}$. Montrer que $P \subset I^\perp$.

Exercice 3 : Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien de dimension finie n, f un endomorphisme symétrique de E et $u = f^* \circ f$ un endomorphisme de E, où f^* est l'adjoint de f (c-à-d. $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$).

a) Montrer que u est symétrique et déduire qu'il est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

b) Montrer que $Ker(u) = Ker(f)$ et que $Im(u) = (Ker(f))^\perp$.

Rattrapage d'algèbre 4 (Juin 2023)

Exercice 1 : On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique q définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ q(x) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

1. Donner la matrice de q puis sa forme polaire b.

2. Calculer le noyau $Ker(b)$. Que peut-on déduire ?

3. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

3.1. Montrer que M admet trois valeurs propres. Trouver une base orthonormée B' formée de vecteurs propres de M.

3.2. Calculer :

- Une matrice orthogonale P et une matrice diagonale M' telles que ${}^tPMP = M'$.

- L'expression de q dans la base B', la signature, le rang de q et déduire $Ker(q)$.

3.3. Trouver l'ensemble des vecteurs isotropes de q dans B' et déduire une réduction en carrées de Gauss à partir de l'expression de q dans la base B'.

Exercice 2 : Soit E l'espace des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que la série de terme général u_n^2 converge. On définit l'application :

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R},\ \varphi(u,v) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k,$$

où $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire.

2. Soit $f : E \longrightarrow E, \forall u = (u_n)_{n\geq 0} \in E, f(u) = \frac{u_n}{n+1}$. Montrer que f est un endomorphisme de E.

3. Montrer que f est symétrique par rapport au produit scalaire $\varphi = \langle .,. \rangle$.

Exercice 3 : Soit A une partie d'un K-espace vectoriel E, on appelle annulateur de A la partie A° de l'espace dual E^* définie par :

$$A^\circ = \{g \in E^* : \forall u \in A, g(u) = 0\} \subset E^*$$

1. Déterminer ${0_E}^\circ$ et E°.

2. Prouver que si $A_1 \subset A_2$, alors $A_2^\circ \subset A_1^\circ \subset E^*$.

Contrôle d'algèbre 4 (Juin 2022)

Exercice 1 : On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique q définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 10x_2x_3.$$

1. Donner sa matrice, sa forme polaire b et calculer son noyau $Ker(q)$. Que peut-on déduire ?

2. En utilisant la réduction en carrés de Gauss. Montrer que l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que $q(x) = 0$ est la réunion de deux plans vectoriels dont on donnera des équations.

3. Déterminer une base q-orthogonale B' de $\mathbb{R}^3$, puis en donner sa signature et son rang.

4. Donner l'expression de q ainsi que sa matrice dans B'.

5. Calculer l'orthogonal de $F = Vect\{v_1 = (1,1,0), v_2 = (2,0,1)\}$.

Exercice 2 : Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère : $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0\right\}$ et $D = vect\{v = (1,1,1,1)\}$.

1) Montrer que F est un hyperplan de E, en donner une base et tous ses supplémentaires.

2) Soit $m \in \mathbb{R}$ et $u = (m, m+1, 2m, m-2)$. Pour quelles valeurs de m les sous-espaces F et $\Delta = vect(u)$ sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice 3 :

I) Soit $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On définit

$$F = \left\{ f \in E : \int_0^{\pi/2} f(t)dt = f(\pi/2) \right\}.$$

(a) Montrer que F est un hyperplan de E.

b) Soit $D_1 = vect(\sin t)$ et $D_2 = vect(\cos t)$. D_1 et D_2 sont-ils des supplémentaires de F.

II) On considère les formes linéaires φ_1, φ_2 et φ_3 définies sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 - x_2 + x_3,\ \varphi_2(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 - 2x_3,\ \varphi_3(x_1,x_2,x_3) = -4x_1 + x_2 + x_3$$

Montrer que $B^* = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de l'espace dual $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$. Déterminer les coordonnées des vecteurs de la base B pré-duale de B^*.

$B_0 = (e_1, e_2, e_3)$, $(B_0)^* = \left(e_1^*, e_2^*, e_3^*\right)$ sont les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ respectivement.

Rattrapage d'algèbre 4 (juin 2021)

Exercice 1 : Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les formes linéaires : $f_1^*, f_2^*, f_3^* \in E^*$ définies par :

$$f_1^* = e_1^* + e_2^* - e_3^*,\ f_2^* = e_1^* - e_2 + e_3,\ f_3^* = e_1^* + e_2^* + e_3^*,$$

où $B_0^* = \left(e_1^*, e_2^*, e_3^*\right)$ base canonique de E^*.

1. Montrer que $B^* = \left(f_1^*, f_2^*, f_3^*\right)$ est une base de E^*.

2. Calculer $B = (f_1, f_2, f_3)$ la base pré-duale de la base duale B^*.

Exercice 2 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et q la forme quadratique définie par A.

1. Montrer que A est diagonalisable.

2. Construire une base orthonormée B par rapport au produit scalaire de $\mathbb{R}^3$, constituée de vecteurs propres de A.

Exercice 3 : Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$q_a(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + (1+a)x_2^2 + (1+a+a^2)x_3^2 + 2x_1x_2 - 2ax_2x_3,\ a \in \mathbb{R}.$$

1. Donner une réduction en carrés de Gauss de q.

2. Discuter, suivant la valeur du nombre réel a, la signature et le rang de la forme quadratique q_a.

3. Dans tout ce qui suit, on pose : $a = -1$ et $q_{-1}) = q$.

a) Trouver une base q-orthogonale B' de $\mathbb{R}^3$, l'expression et la matrice de q dans B'.

b) q est-elle positive ?

c) Calculer $b(x, y)$ la forme polaire de q et le noyau $Ker(q)$.

4.3 Corrigé d'exercices

Solution. 4.1

1. La forme bilinéaire φ_M de M est définie par :

$$\begin{aligned}\forall x &= (x_1, x_2, x_3),\ y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,\\ \varphi_M(x,y) &= {}^tXMY = ax_1y_1 + 2x_2y_2 - ax_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1.\end{aligned}$$

2. L'orthogonal pour φ_M de F : On a

$$\begin{aligned}F^\perp &= \left\{x \in \mathbb{R}^3,\ \forall y \in F,\ \varphi_M(x,y) = 0\right\}\\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^3,\ \varphi_M(x,v) = 0\right\},\ pour\ y = v.\end{aligned}$$

Ainsi nous avons l'équivalence

$$\begin{aligned}\varphi_M(x,v) = 0 &\Leftrightarrow (a-2)x_1 - 2x_2 - (2a+1)x_3 = 0\\ &\Leftrightarrow x_2 = \frac{a-2}{2}x_1 - \frac{2a+1}{2}x_3\\ &\Leftrightarrow x = \left(x_1,\ \frac{a-2}{2}x_1 - \frac{2a+1}{2}x_3,\ x_3\right)\\ &\Leftrightarrow x = \left(1,\ \frac{a-2}{2},\ 0\right)x_1 + \left(0,\ -\frac{2a+1}{2},\ 1\right)x_3,\ x_1,\ x_3 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

D'où

$$F^\perp = vect\left\{\left(0,\ -\frac{2a+1}{2},\ 1\right),\ \left(0,\ -\frac{2a+1}{2},\ 1\right)\right\}.$$

3. Les valeurs de a, pour lesquels $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^3$.
Nous avons $dimF + dimF^\perp = 3$, donc il suffit de chercher les valeurs de a pour lesquels $v \notin F^\perp$, i.e.

$$\begin{aligned}\varphi_M(v,v) \neq 0 &\Leftrightarrow a - 2 + 2 - 2(2a+1) \neq 0\\ &\Leftrightarrow a \neq -\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Donc les valeurs de a, pour lesquels $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^3$ sont les éléments de l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

4. On a : $det(M) = -2(a^2+1) \neq 0,\ \forall a \in \mathbb{R}$.
Donc la matrice M est inversible et donc du rang maximal i.e. $rg(M) = 3$. On déduit que $dim\,Ker(M) = dim\,Ker(\varphi_M) = 0$.
D'où $\left(\mathbb{R}^3\right)^\perp = Ker(\varphi_M) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

5. La réduction en carrés de Gauss de q : La forme quadratique q associée à

φ_M) est donnée par :

$$q(x) = ax_1^2 + 2x_2^2 - ax_3^2 - 2x_1x_3.$$

Pour réduire la forme q nous distinguons deux cas :
1^{er} cas : si $a = 0$, alors

$$\begin{aligned} q(x) &= 2x_2^2 - 2x_1x_3 = 2x_2^2 - \frac{2}{4}\Big((x_1+x_3)^2 - (x_1-x_3)^2\Big) \\ &= -\frac{1}{2}(x_1+x_3)^2 + 2x_2^2 + \frac{1}{2}(x_1-x_3)^2. \end{aligned}$$

Donc la signature de q est $sgn(q) = (2,1)$.
La base φ_M-orthogonale :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_3 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_1 - x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_1' + \frac{1}{2}x_3' \\ x_2 = x_2' \\ x_3 = \frac{1}{2}x_1' - \frac{1}{2}x_3' \end{cases}$$

D'où $X = PX'$ où

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique B à la base φ_M-orthogonale B'.
Ainsi

$$B' = \left\{\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right),\ (0,\ 1,\ 0),\ \left(\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

2^{eme} cas : si $a \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} q(x) &= \Big(ax_1^2 - 2x_1x_3\Big) + 2x_2^2 - ax_3^2 \\ &= a\left(x_1 - \frac{1}{a}x_3\right)^2 + 2x_2^2 - \left(\frac{a^2+1}{a}\right)x_3^2. \end{aligned}$$

On remarque que : $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $sgn(q) = (2,1)$.
Donc dans les deux cas on a : $\forall a \in \mathbb{R}$, $sgn(q) = (2,1)$.
La base φ_M-orthogonale :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - \frac{1}{a}x_3 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' + \frac{1}{a}x_3' \\ x_2 = x_2' \\ x_3 = x_3' \end{cases}$$

D'où $X = PX'$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique B à la base φ_M-orthogonale B'. Ainsi

$$B' = \left\{(1,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0),\ \left(\frac{1}{a},\ 0,\ 1\right)\right\}$$

6. De la question 5 on a : $\forall a \in \mathbb{R}$, $sgn(q) = (2,1)$ donc on déduit que la forme q est non définie pour toutes les valeurs de a.

7. Les formes linéaires dans la forme diagonale de q :

i) Pour $a = 0$, on a

$$l_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_3,\ l_2(x_1,x_2,x_3) = x_2,\ l_3(x_1,x_2,x_3) = x_1 - x_3$$

ainsi nous avons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible car $det(A) = -2 \neq 0$, donc les forment linaires l_1, l_2, l_3 sont libres et puisque $dim\left(\mathbb{R}^3\right)^* = 3 = card\,\{l_1, l_2, l_3\}$.
Donc ces formes linéaires forment une base de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$.
On a :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Par suite la base préduale est

$$\left\{\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right),\ (0,\ 1,\ 0),\ \left(\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

ii) Pour $a \neq 0$, on a

$$l_1(x_1,x_2,x_3) = x_1 - \frac{1}{a}x_3,\ l_2(x_1,x_2,x_3) = x_2,\ l_3(x_1,x_2,x_3) = x_3$$

ainsi nous avons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc ces formes linéaires forment une base de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$.
Par suite la base antéduale est

$$\left\{\left(1,\ 0,\ \frac{1}{a}\right),\ (0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1)\right\}.$$

Solution. **4.2** 1) On a :

$$\begin{array}{rcl} q_m(x,y,z) & = & x^2+(m+8)y^2+4z^2-6xy+4xz+(m-12)yz \\ & = & (x-3y+2z)^2+(m-1)y^2+myz. \end{array}$$

Si $m \neq 1$ alors :

$$q_m(x,y,z) = (x-3y+2z)^2+(m-1)\left(y+\frac{m}{2(m-1)}z\right)^2-\frac{m^2}{4(m-1)}z^2.$$

Si $m = 1$ alors :

$$\begin{array}{rcl} q_1(x,y,z) & = & (x-3y+2z)^2+yz \\ & = & (x-3y+2z)^2+\dfrac{1}{4}(y+z)^2-\dfrac{1}{4}(y-z)^2. \end{array}$$

2) Si $m \neq 1$ alors :

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = x-3y+2z \\ y' = y+\frac{m}{2(m-1)}z \\ z' = z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = x'+3y'-\frac{7m-4}{2(m-1)}z' \\ y = y'-\frac{m}{2(m-1)}z' \\ z = z' \end{array} \right.$$

Si P est la matrice de passage de la base canonique B de $\mathbb{R}^3$ à la base orthogonale B_m diagonalisant q_m, on a : $X = PX'$, où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -\frac{7m-4}{2(m-1)} \\ 0 & 1 & -\frac{m}{2(m-1)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique à la base orthogonale.

$$B_m = \left\{u_1 = (1,0,0), u_2 = (3,1,0), u_3 = \left(-\frac{7m-4}{2(m-1)}, -\frac{m}{2(m-1)}, 1\right)\right\}.$$

L'expression de q_m dans B_m est

$$q_m(x) = x'^2 + (m-1)y'^2 - \frac{m^2}{4(m-1)}z'^2$$

tel que $x^{'}, y^{'}, z^{'}$ sont les coordonnées dans B_m.
La matrice de q_m dans B_m est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (m-1) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m^2}{4(m-1)} \end{pmatrix}.$$

Si $m = 1$ alors :

$$\begin{cases} x' = x - 3y + 2z \\ y' = y + z \\ z' = y - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + \frac{1}{2}y' + \frac{5}{2}z' \\ y = \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}z' \\ z = \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}z' \end{cases}$$

Si P est la matrice de passage de la base canonique B de $\mathbb{R}^3$ à la base orthogonale B_1 diagonalisant q_1, on a : $X = PX'$, où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique à la base orthogonale.

$$B_1 = \left\{u_1 = (1,0,0), u_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), u_3 = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

L'expression de q_1 dans B_1 est $q_1(x) = x'^2 + \frac{1}{4}y'^2 - \frac{1}{4}z'^2$ tel que x', y', z' sont les coordonnées dans B_1.
La matrice de q_1 dans B_1 est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

3) De la question 1, on déduit que $rg(q_0) = 2$ et $rg(q_m) = 3$ si $m \neq 0$.

4) De la question 1, on déduit que :

$$sg(q_m) = \begin{cases} (1,1)\ si\ m = 0 \\ (2,1)\ si\ m \geq 1 \\ (1,2)\ si\ m < 1\ et\ m \neq 0 \end{cases}$$

Solution. 4.3

1. L'expression de la forme bilinéaire b_m est : $b_m(x,y) = {}^t XM(b_m,B)Y$, d'où

$$q_m(x) = {}^t XM(b_m,B)X = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & m & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

d'où

$$q_m(x) = x_1^2 + x_2^2 + mx_3^2 + mx_4^2 + 2x_1x_3 - x_2x_4.$$

2. Pour avoir l'écriture de l'expression de $q_m(x)$ en somme de multiples de carrés, remarquons que dans $q_m(x)$ le terme en x_1^2 est non nul, d'où :

$$\begin{aligned} q_m(x) &= \left(x_1^2 + 2x_1x_3\right) + x_2^2 + mx_3^2 + mx_4^2 - x_2x_4 \\ &= (x_1 + x_3)^2 + \left(x_2^2 - x_2x_4\right) + (m-1)x_3^2 + mx_4^2 \\ &= (x_1 + x_3)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}x_4\right)^2 + (m-1)x_3^2 + \left(m - \frac{1}{4}\right)x_4^2 \end{aligned}$$

Alors quatre cas se présentent :

1^{er} cas : si $m \in \left\{\frac{1}{4}, 1\right\}$ alors : $sign(q_m) = \begin{cases} (2,1)\ si\ m = \frac{1}{4} \\ (3,0)\ si\ m = 1 \end{cases}$ et $rg(q_m) = 3$.

2^{eme} cas : si $m < \frac{1}{4}$ alors : $sign(q_m) = (2,2)$ et $rg(q_m) = 4$.

3^{eme} cas : si $\frac{1}{4} < m < 1$ alors : $sign(q_m) = (3,1)$ et $rg(q_m) = 4$.

4^{eme} cas : si $m > 1$ alors : $sign(q_m) = (4,0)$ et $rg(q_m) = 4$.

3. b_m est un produit scalaire si et seulement si q_m est définie positive si et seulement si $sign(q_m) = (4,0)$ si et seulement si $m > 1$.

4. Le noyau (le radical) de $b_{\frac{1}{4}}$ est de dimension 1 d'après la question 2 car $rg\left(b_{\frac{1}{4}}\right) = 3$. De plus $v = \frac{1}{2}e_2 + e_4 \in N$. Donc $N = \mathbb{R}v$.

On peut calculer $N = Ker\left(b_{\frac{1}{4}}\right)$ en résolvant le système suivant :

$$\begin{aligned}
M(b_m,B)^t(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)=0_{\mathbb{R}^4} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & m & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_3=0 \\ x_2-\frac{1}{2}x_4=0 \\ x_1+\frac{1}{4}x_3=0 \\ -\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{4}4=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=x_3=0 \\ x_2=\frac{1}{2}x_4 \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où $x=x_4(0,\frac{1}{2},0,1),x_4\in\mathbb{R})$. Donc $N=Ker\left(b_{\frac{1}{4}}\right)=Vect\left\{v=(0,\frac{1}{2},0,1)\right\}$.

5. D'après la question 4, si $x\in F\cap N$ alors il existe $(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)\in\mathbb{R}^4$ tel que :

$$\begin{aligned}
x=\lambda v=\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3 &\Leftrightarrow \lambda\left(\frac{1}{2}e_2+e_4\right)=\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3 \\
&\Leftrightarrow \alpha e_1+\left(\beta-\frac{\lambda}{2}\right)e_2+\gamma e_3-\lambda e_4=0 \\
&\Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=\lambda=0.
\end{aligned}$$

D'où $x=0_E$ et donc $F\cap N=\{0_E\}$.
De plus $dim(F+N)=3+1=dim(E)$ donc $F\oplus N=E$.

Solution. 4.4

1. La forme polaire S_Q est définie sur E par :

$$\begin{aligned}
S_Q : E\times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(x,\ y) &\longmapsto x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-\tfrac{1}{2}(x_2y_3+x_3y_2)
\end{aligned}$$

La réduction en carrées de Gauss de Q est donnée par :

$$Q(x)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_2x_3=x_1^2+\left(x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{4}x_3^2$$

D'où la signature est $sgn(Q)=sgn(S_Q)=(3,0)$ et le rang $rg(Q)=sgn(S_Q)=3$. Donc S_Q est une forme bilinéaire symétrique et définie positive, ou encore S_Q est un produit scalaire sur E.

2. En utilisant l'expression de S_Q on trouve :

$$\begin{cases} \langle v_i, v_i\rangle = S_Q(v_i, v_i) = 1,\ \forall i \in \{1,2,3\} \\ \langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, v_3\rangle = 0 \\ \langle v_2, v_3\rangle = S_Q(v_2, v_3) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

3. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt on obtient une base orthonormée à partir de $B = (v_1, v_2, v_3)$ comme suit :

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,0,0) \\ v_2 &= (0,1,0) \\ v_3' = v_3 - \tfrac{\langle v_3, v_2\rangle}{\|v_2\|} v_2 &= (0, \tfrac{1}{2}, 1) \end{aligned}$$

Donc on peut prendre $\omega = \frac{2}{\sqrt{3}} v_3' = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,2)$ on obtient une base orthonormée par rapport à S_Q à partir de B qui est : $B' = (v_1, v_2, \omega)$.

4. On a : $u = v_1 + v_2 = (1,1,0)_B$.

a) Un vecteur $v = av_1 + bv_2 + cv_3 = (a,b,c)_B$ est orthogonal à u si et seulement $S_Q(u,v) = 0$.

$$S_Q(u,v) = 0 \Leftrightarrow a + b - \frac{1}{2}c = 0.$$

Donc tout vecteur $v = (a, b, 2a + 2b),\ a, b \in \mathbb{R}$ est orthogonale à u. Pour $(a,b) = (0,1)$ on a : $v = (0,1,2)$.

b) Puisque : $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{Q(u)} = \sqrt{2}$ et $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{Q(v)} = \sqrt{3}$ alors on a :
$\|u \wedge v\| = \|u\|\|v\| = \sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$.

c) $C = (u, v, w = u \wedge v)$ est une base orthogonale directe de E, où $w = u \wedge v = 2v_1 - 2v_2 + v_3$.

5. ϕ transforme la base orthonormée B en la base orthonormée :

$$C' = \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}, \frac{w}{\|w\|}\right) = \left(\frac{v_1 + v_2}{\sqrt{2}}, \frac{v_2 + 2v_3}{\sqrt{3}}, \frac{2v_1 - 2v_2 + v_3}{\sqrt{6}}\right).$$

Donc ϕ est un endomorphisme de E orthogonal qui est une isométrie.

6. De la question 5 on déduit que la matrice de ϕ dans la base B est donnée par :

$$M(\phi, B) = (\phi(v_1)\ \phi(v_2)\ \phi(v_3)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Solution. 4.5

1) La matrice de q par rapport à B est :

$$M = M_B(q) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ matrice symétrique}$$

2) Calcul des valeurs propre de la matrice M

$$p_M(\lambda) = \det(M - \lambda I) = (1-\lambda)(\lambda+2)^2.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$.

- Les sous-espaces propres sont

$$E_{\lambda_1} = < v_1 = (1,1,1) >, E_{\lambda_2} = < v_2 = (-1,1,0), v_3 = (-1,0,1) >$$

On remarque que $< v_1, v_2 >=< v_1, v_3 >= 0, < v_2, v_3 >= 1 \neq 0$, en utilisant le procédé de Gram-Schmidt on obtient

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 - \frac{<v_3,v_2>}{\|v_2\|^2}.v_2 = -\frac{1}{2}(1,1,-2) \end{cases}$$

On peut choisir une base orthogonale par rapport au produit scalaire usuel formée de vecteurs propres

$$\left\{(1,1,1),(-1,1,0),-\frac{1}{2}(1,1,-2)\right\},$$

et une base orthonormée par rapport au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteur propres

$$B' = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), -\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\right\}$$

3) On a

$$D = mat_{B'}(q) =^t PMP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

où

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ matrice orthogonale}$$

4) L'expression de q dans B' est :

$$q(x) = {}^t X'M'X' = x_1'^2 - 2x_2'^2 - 2x_3'^2$$

où x_1', x_2', x_3' sont les coordonnées de x dans B'. De plus on a

$$\begin{aligned} X' &= {}^tPX = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}(x_1+x_2+x_3) \\ -\sqrt{3}(x_1-x_2) \\ -(x_1+x_2-2x_3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1'^2 - 2x_2'^2 - 2x_3'^2 \\ &= \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)^3 - (x_1-x_2)^2 - \frac{1}{3}(x_1+x_2-2x_3)^2. \end{aligned}$$

Cette dernière écriture ce n'est que la réduction en carrés de Gauss.

Solution. 4.6

1) La matrice de q dans la base B est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

On a :

$$Ker(f) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \forall x \in \mathbb{R}^3, \forall y \in \mathbb{R}^3,\ b(x,y) = 0\right\}$$

Donc il suffit de résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} b(x,e_1) = 0 \\ b(x,e_2) = 0 \\ b(x,e_3) = 0 \end{cases}$$

Ou on peut résoudre l'équation matricielle : $MX = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\begin{aligned}
MX = 0_{\mathbb{R}^3} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 4x_1 - 4x_3 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ x_1 = x_2 = x_3 = 0 \right.
\end{aligned}$$

D'où $Ker(q) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et donc $rg(q) = 3$.
On déduit que q est non dégénérée.

2) On a

$$\begin{aligned}
q(x) &= x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 + 8x_1x_3 \\
&= \left(x_1^2 + x_1(6x_2 + 8x_3)\right) + 3x_2^2 - 4x_3^2 \\
&= (x_1 + 3x_2 + 4x_3)^2 - (3x_2 + 4x_3)^2 + 3x_2^2 - 4x_3^2 \\
&= (x_1 + 3x_2 + 4x_3)^2 - 6x_2^2 - 20x_3^2 - 24x_2x_3 \\
&= (x_1 + 3x_2 + 4x_3)^2 - 6\left(x_2^2 + 4x_2x_3\right) - 20x_3^2 \\
&= (x_1 + 3x_2 + 4x_3)^2 - 6(x_2 + 2x_3)^2 + 4x_3^2
\end{aligned}$$

Recherche d'une base orthogonale : On pose

$$\begin{cases} x_1^{'} = x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_2^{'} = x_2 + 2x_3 \\ x_3^{'} = x_3 \end{cases},$$

alors

$$\begin{cases} x_1 = x_1^{'} - 3x_2^{'} + 2x_3^{'} \\ x_2 = x_2^{'} - 2x_3^{'} \\ x_3 = x_3^{'} \end{cases}$$

D'où $X = PX^{'}$, où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique à la base orthogonale.

$$B' = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (-3,1,0), u_3 = (2,-2,1)\}.$$

3) La signature de q est $sgn(q) = (2,1)$, et donc $rang(q) = 3$, ceci implique que

$$\ker(q) = \{0\}.$$

L'expression de q dans $B^{'}$ est

$$q(x) = x_1'^2 - 6x_2'^2 + 4x_3'^2$$

tel que $x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'}$ sont les coordonnées de x dans B'.

La matrice de q dans B' est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4) Soit $x = \left(x_1', x_2', x_3'\right) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur isotrope par rapport à q dans la base B' d'où :

$$q(x) = 0 \Leftrightarrow x_1'^2 - 6x_2'^2 + 4x_3'^2 = 0 \Leftrightarrow x_1'^2 + 4x_3'^2 = 6x_2'^2$$

Donc l'ensemble des vecteurs isotrope de q dans la base B' est l'ensemble des vecteurs $x = \left(x_1', x_2', x_3'\right)$ de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient l'équation : $x_1'^2 + 4x_3'^2 = 6x_2'^2$.

Solution. 4.7

1) La matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

le polynôme caractéristique de M est :

$$P_M(X) = -X^3 + 10X^2 - 32X + 32 = (2 - X)(X - 4)^2.$$

Donc M admet deux valeurs propres : $\lambda_1 = 2$ valeur propre simple et $\lambda_2 = 4$

valeur propre double. Les vecteurs propres sont :

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \longleftrightarrow 2, \quad \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \longleftrightarrow 4.$$

On remarque que $\{(1,0,1),\ (0,1,0),\ (-1,0,1)\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. Ainsi on la base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ est :

$$B' = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,1),\ (0,1,0),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,0,1)\right\}.$$

Donc il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D elles que :

$$P^{-1}MP =^t PMP = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

2) Soit (x_1', x_2', x_3') les coordonnées de vecteurs x dans la base orthonormée B', d'où l'expression de q dans cette base est :

$$q(x) = (x_1'\ x_2'\ x_3')\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1'\\ x_2'\\ x_3')\end{pmatrix} = 2x_1'^2 + 4x_2'^2 + 4x_3'.$$

Donc on déduit que la signature de q est $sgn(q) = (3,0)$, ce qui donne le rang de q est :
$rg(q) = 3 + 0 = 3 = dim\mathbb{R}^3$. D'où $dim(Ker(q)) = dim\left(\mathbb{R}^3\right) - rg(q) = 3 - 3 = 0$.
Ainsi la forme q est non-dégénérée et définie positive.
3) Les vecteurs isotropes sont les vecteurs x qui vérifient $q(x) = 0$, ce qui donne $x = 0_{\mathbb{R}^3}$ car

$$\begin{aligned} q(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x_1'^2 + 4x_2'^2 + 4x_3' = 0\\ &\Leftrightarrow \quad x_1' = x_2' = x_3' = 0. \end{aligned}$$

Comme $ker(q)$ est une partie de l'ensemble des vecteurs isotropes, on conclue que :
$ker(q) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Ceci est confirmé par les résultats dans 2).

Solution. 4.8

1) La forme bilinéaire b associée à la forme quadratique q est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} b:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{3}{2}x_1y_1+2x_2y_2+\frac{3}{2}x_3y_3-\frac{1}{2}x_1y_3-\frac{1}{2}x_3y_1. \end{array}$$

La matrice de b c'est la matrice de q et elle est donnée par :

$$A=M(b,B)=M(q,B)=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

On peut calculer le noyau de b qui est le noyau de q par l'une des deux méthode suivante :
Première méthode : On a :

$$Ker(b)=\left\{x\in\mathbb{R}^3 : \forall y\in\mathbb{R}^3, b(x,y)=0\right\}=\left(\mathbb{R}^3\right)^{\perp}$$

Donc pour calculer les vecteur x de $Ker(b)$ il suffit de remplacer le vecteur y par les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et résoudre le système d'équation obtenu.
Deuxième méthode : Pour calculer le noyau il suffit de résoudre l'équation matricielle :
$AX=0_{\mathbb{R}^3}$. D'où on a :

$$\begin{array}{rcl} AX=0 & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{c} \frac{3}{2}x_1-\frac{1}{2}x_3=0 \\ 2x_2=0 \\ -\frac{1}{2}x_1+\frac{3}{2}x_3=0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \end{array}\right. \end{array}$$

D'où $Ker(b)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$. On déduit que b (ou q) est non-dégénérée.

2) L'orthogonale de F par rapport à b est donné par :

$$\begin{array}{rcl} F^{\perp} & = & \left\{x\in\mathbb{R}^3 : \forall y\in F, b(x,y)=0\right\} \\ & = & \left\{x\in\mathbb{R}^3 : b(x,v)=0\right\} \\ & = & \left\{x\in\mathbb{R}^3 : \frac{3}{2}x_1-2x_2+-\frac{1}{2}x_3=0\right\} \\ & = & \left\{x\in\mathbb{R}^3 : x_3=3x_1-4x_2\right\} \\ & = & \{x=(x_1,x_2,3x_1+4x_2)=x_1(1,0,3)+x_2(0,1,-4);\ x_1,x_2\in\mathbb{R}\} \end{array}$$

Ainsi

$$F^{\perp} = vect\{u = (1,0,3),\ w = (0,1,-4)\}$$

3) Pour montrer que F et $F^{\perp}$ forment une somme directe de $\mathbb{R}^3$ il suffit de montrer que la famille $\{v,u,w\}$ est libre. On a :

$$\begin{aligned} \alpha v + \beta u + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} &\Leftrightarrow \alpha(1,1,0) + \beta(1,0,3) + \gamma(0,1,-4) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0. \end{aligned}$$

D'où la famille $\{v,u,w\}$ est libre. Donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$ = base de F union base de $F^{\perp}$.

4) On a $v \perp u$ et $v \perp w$ pour b, tan-disque $b(u,w) = -16 \neq 0$. Donc on utilise la méthode de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthogonale. On pose

$$\begin{aligned} u' &= u \\ w' &= w - \frac{b(u,w)}{q(u)}u = (0,1,-4) + \frac{16}{12}(1,0,3) = (\frac{4}{3},1,0) \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\{v,u,w'\}$ une base orthogonale pour b. Maintenant pour obtnir $\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\}$ une base orthonormée, on pose :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{v}{\sqrt{q(v)}} = \left(\frac{\sqrt{14}}{7},\ -\frac{\sqrt{14}}{7},\ 0\right) \\ \varepsilon_2 &= \frac{u}{\sqrt{q(u)}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{6},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \varepsilon_3 &= \frac{w'}{\sqrt{q(w')}} = \left(\frac{2\sqrt{42}}{21},\ \frac{\sqrt{42}}{14},\ 0\right) \end{aligned}$$

Solution. 4.9

1. La forme quadratique q est associée à f, donc il est évident que f est une forme bilinéaire symétrique.
On a : $q_1(x) = q(a)q(x) - (f(a,x))^2$ la forme polaire de q_1 est donnée par :

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \frac{1}{2}(q_1(x+y) - q_1(x) - q_1(y)) \\ &= q(a)f(x,y) - f(a,x)f(a,y). \end{aligned}$$

L'application : $x \longmapsto q(a)f(x,y)$ est une forme bilinéaire symétrique.
L'application : $x \longmapsto f(a,x)f(a,y)$ est une forme bilinéaire symétrique car c'est le produit de deux formes linéaires.
On déduit que $x \longrightarrow q(a)f(x,y) - f(a,x)f(a,y)$ est une forme bilinéaire symétrique.

Alors $f_1 \in S_2(E) \Rightarrow q_1 \in Q(E)$. i.e. q_1 est une forme quadratique sur E.

2. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in Ker(q_1) &\Leftrightarrow f_1(x,y) = 0,\ \forall y \in E \\ &\Leftrightarrow q(a)f(x,y) - f(a,x)f(a,y) = 0,\ \forall y \in E \\ &\Leftrightarrow f(q(a)x,y) - f(f(a,x)a,y) = 0,\ \forall y \in E \\ &\Leftrightarrow f(q(a)x - f(a,x)a,y) = 0,\ \forall y \in E \\ &\Leftrightarrow q(a)x - f(a,x)a \in Ker(f) = Ker(q). \end{aligned}$$

Donc

$$x \in Ker(q_1) \Leftrightarrow q(a)x - f(a,x)a \in Ker(q). \tag{4.2}$$

▹ Si $q(a) \neq 0$:

$$\begin{aligned} x \in Ker(q_1) &\Leftrightarrow x - \frac{f(a,x)}{q(a)}a = z \in Ker(q) \\ &\Leftrightarrow x = z + \frac{f(a,x)}{q(a)}a \\ &\Rightarrow x \in Ker(q) + vect(a). \end{aligned}$$

Donc $Ker(q_1) \subset Ker(q) + vect(a)$.
Dans l'équivalence (4.2) si on pose $x = a$ on obtient

$$q(a)a - f(a,a)a = 0_E \in Ker(q) \Leftrightarrow a \in Ker(q_1).$$

Donc $a \in Ker(q_1)$.
Si $x \in Ker(q)$ alors $f(x,y) = 0,\ \forall y \in E$, donc $f_1(x,y) = q(a)f(x,y) - f(a,x)f(a,y) = 0,\ \forall y \in E$.
D'où $x \in Ker(q_1)$.
On a : $a \in Ker(q_1)$ et pour tout $x \in Ker(q)$, $x \in Ker(q_1)$ d'où $x + a \in Ker(q_1)$.
Donc $Ker(q) + vect(a) \subset Ker(q_1)$. Alors du fait que $a \notin Ker(q)$ on obtient

$$Ker(q_1) = Ker(q) \oplus vect(a).$$

▹ Si $q(a) = 0$:

(.) Si $a \in Ker(q)$ alors $q_1 \equiv 0$ et donc $Ker(q_1) = E$.

(..) Si $a \notin Ker(q)$ alors

$$\begin{aligned}
x \in Ker(q_1) &\Leftrightarrow f_1(x,y) = 0,\ \forall y \in E \\
x \in Ker(q_1) &\Leftrightarrow q(a)f(x,y) - f(a,x)f(a,y) = 0,\ \forall y \in E \\
&\Leftrightarrow f(a,x)f(a,y) = 0,\ \forall y \in E \\
&\Leftrightarrow f(a,x) = 0\ (car\ a \notin Ker(q)). \\
&\Leftrightarrow x \in (vect(a))^{\perp_f}.
\end{aligned}$$

D'où $Ker(q_1) = (vect(a))^{\perp_f}$.

Conclusion :

$$Ker(q_1) = \begin{cases} Ker(q) \oplus vect(a),\ si\ q(a) \neq 0 \\ E,\ si\ q(a) = 0\ et\ a \in Ker(q) \\ (vect(a))^{\perp_f},\ si\ q(a) = 0\ et\ a \notin Ker(q) \end{cases}$$

3. Si $dim\, E = n < \infty$.

D'après le résultat ci-dessus et l'expression du rang $rg(q_1) + dim\ Ker(q_1) = dim(E) = n$ on obtient :

$$rg(q_1) = n - dim\ Ker(q_1) = \begin{cases} n - dim\ Ker(q) - 1 = rg(q) - 1\ ,\ si\ q(a) \neq 0 \\ 0\ ,\ si\ q(a) = 0\ et\ a \in Ker(q) \\ \\ n - dim\ (vect(a))^{\perp_f},\ si\ q(a) = 0\ et\ a \notin Ker(q) \end{cases}$$

Solution. 4.10

1. On a :

$$\begin{aligned}
f(A,.) : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
B &\longrightarrow f(A,B) = Tr(AB)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
f(.,B) : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
A &\longrightarrow f(A,B) = Tr(AB)
\end{aligned}$$

sont deux formes linéaires (car la trace est une forme linéaire). D'où l'application :

$$\begin{aligned}
f : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(A,B) &\longrightarrow f(A,B) = Tr(AB)
\end{aligned}$$

est une forme bilinéaire (produit de deux formes linéaires).

De plus on a : $Tr(AB) = TR(BA)$ alors f est symétrique.
On a : $f(A,A) = Tr(A^2) = q(A)$ donc q est une forme quadratique.

2. La signature : Posons $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $A^2 = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ on a :

$$\begin{aligned}
q(A) = Tr(A^2) &= \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji} \\
&= \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}a_{ji} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + \sum_{1\leq i\neq j\leq n} a_{ij}a_{ji} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + \frac{1}{4}\sum_{1\leq i\neq j\leq n}\left[\left(a_{ij}+a_{ji}\right)^2 - \left(a_{ij}-a_{ji}\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + \frac{1}{4}\sum_{1\leq i\neq j\leq n}\left(a_{ij}+a_{ji}\right)^2 - \frac{1}{4}\sum_{1\leq i\neq j\leq n}\left(a_{ij}-a_{ji}\right)^2.
\end{aligned}$$

D'où $sign(q) = \left(n + \frac{n(n-1}{2}, \frac{n(n-1}{2}\right)$.

Solution. 4.11

$q(x_1,\, x_2,\, x_3) = (x_1+x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + (x_1-x_3)^2$.

1) Soit : $\varphi_1(x) = x_1 + x_2,\ \varphi_2(x) = x_2 - x_3,\ \varphi_3(x) = x_1 - x_3$.

On a : $det(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)_{B_0} = det(Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

Donc $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est libre. D'où $sgn(q) = (3,0)$.

Donc la forme quadratique associée à q est symétrique et définie positive donc c'est un produit scalaire.

La matrice par rapport à B_0 : Cherchons la base q-orthogonale :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = x_2 - x_3 \\ x_3' = x_1 - x_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}x_1' - \frac{1}{2}x_2' + \frac{1}{2}x_3' \\ x_2 = \frac{1}{2}x_1' + \frac{1}{2}x_2' - \frac{1}{2}x_3' \\ x_3 = \frac{1}{2}x_1' - \frac{1}{2}x_2' - \frac{1}{2}x_3' \end{array}\right.$$

D'où $X = PX'$ où

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique B_0 à la base φ_M-orthogonale B. Ainsi

$$B = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

L'expression de q dans B est :

$$q(x) = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2.$$

Don on a :

$$M(q,B) =^t PM(q,B_0)P = I_3.$$

D'où

$$M(q,B_0)) = \left({}^tP\right)^{-1} P^{-1}.$$

On a : $\left({}^tP\right)^{-1} = mat_{B_0^*}(B^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = Q$ et $P^{-1} = {}^tQ$.

D'où

$$M(q,B_0)) = Q\,{}^tQ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. On a : $F : x_1 + x2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -x_1 - x2$ d'où

$$F = vect\{w_1 = (1,0,-1), w_2 = (0,1,-1)\}.$$

a) La forme polaire de q est b définie par :

$$b(x,y) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2.$$

D'où

$$x \in F^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} b(x, w_1) = 0 \\ b(x, w_2) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 \\ x_3 = \frac{5}{3}x_1 \end{cases}$$

Donc $F^{\perp} = vect\Big((3,3,5)\Big)$.
Déterminons une base q-orthonormée de F :

On a $\{w_1 = (1,0,-1), w_2 = (0,1,-1)\}$ est une base de F. Donc par le procédé de Gram-Shmidt on construit une base q-orthonormée (v_1, v_2) de F à partir de la base (w_1, w_2) comme suit :

$$w_1' = w_1, \;\; q(w_1) = 6$$
$$w_2' = w_1 - \tfrac{b(w_2,w_1)}{q(w_1)} w_1 = \left(-\tfrac{5}{6}, 1, -\tfrac{1}{6}\right)$$

D'où la base q-orthonormée est : $\left\{v_1 = \frac{1}{\sqrt{q(w_1)}} w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,0,-1), v_2 = \frac{1}{\sqrt{q(w_2')}} w_2' = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}}\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{1}{6}\right)\right\}$.

b) Pour $w_3 = e_3$, on a : (w_1, w_2, w_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. D'où

$$w_3' = w_3 - \frac{1}{6} b(w_3, w_1) w_1 - \frac{11}{6} b(w_3, w_2') w_2' = \frac{1}{11}(3,3,5).$$

Donc $v_3 = \frac{1}{\sqrt{q(w_3')}} w_3' = \frac{\sqrt{11}}{2}\left(\frac{3}{11}, \frac{3}{11}, \frac{5}{11}\right)$.
D'où $B = \big(v_1, v_2, v_3\big)$ est une base q-orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Puisque la base $B = \big(v_1, v_2, v_3\big)$ est q-orthonormée, alors :

$$M(q, B) = I_3.$$

Solution. 4.12

On a :

$$q(x_1, \ldots, x_p) = \left\| \sum_{i=1}^{p} x_i v_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i v_i, \; \sum_{i=1}^{p} x_i v_i \right\rangle.$$

1. L'application :

$$f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle = \left\langle \textstyle\sum_{i=1}^{p} x_i v_i, \; \sum_{i=1}^{p} x_i v_i \right\rangle$$

est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^p$ où $f(x,x) = q(x)$ (f s'obtient de l'expression $f(x,y) = \frac{1}{2}\Big(q(x+y) - q(x) - q(y)\Big)$.
Donc q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^p$ de forme polaire f.

2. q est positive, alors

$$\begin{aligned} x \in Ker(q) &\Leftrightarrow q(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left\| \sum_{i=1}^{p} x_i v_i \right\|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} x_i v_i = 0_{\mathbb{R}^p} \\ &\Leftrightarrow x_i = 0,\ \forall i \in [1,p] \\ &\Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^p} \end{aligned}$$

D'où $Ker(q) = \{0_{\mathbb{R}^p}\}$.
Le rang de q est : $rg(q) = dim\, \mathbb{R}^p - dim\, Ker(q) = p$.

Solution. 4.13

1. On pose φ la forme définie par :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_2[X],\ \varphi(P,Q) = P'(1)Q'(1) - P'(0)Q'(0).$$

Cette forme est bilinéaire symétrique et sa forme quadratique est q. Donc q est bien une forme quadratique. Un petit calcul nous donne

$$\varphi\Big(aX^2 + bX + c, a'X^2 + b'X + c'\Big) = 4aa' + 2ab' + 2ba'.$$

La matrice associée est donc : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

2. Notons N_q le noyau de q. Alors on sait que $N_q = Ker(A) = Vect(1)$. N_q est un espace vectoriel.
Pour déterminer le cône isotrope, remarquons que l'on a

$$q\Big(aX^2 + bX + c\Big) = (2a+b)^2 - b^2 = 4a^2 + 4ab = 4a(a+b).$$

donc, en notant C_q le cône isotrope,

$$\begin{aligned} C_q &= \Big\{P \in \mathbb{R}_2[X],\ q(P) = q\Big(aX^2 + bX + c\Big) = 0\Big\}. \\ &= \Big\{P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] :\ 4a(a+b) = 0\Big\}. \\ &= \Big\{P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] :\ a = 0\ ou\ a + b = 0\Big\}. \end{aligned}$$

C_q n'est pas un sous espace de E puisque X et $X^2 - X$ sont éléments de C_q alors que
$X^2 - X + X = X^2 \notin C_q$.

3. Puisque $rg(A) = 2 < 3$, la forme est dégénérée.
De plus, $q(1) = 0$ donc la forme n'est pas définie. De $q(X^2) = 4 > 0$ et $q(X^2 - 2X) = -4 < 0$, on tire qu'elle est ni négative ni positive.

4. Puisque

$$\varphi\left(aX^2 + bX + c, X^2\right) = 4a + 2b,$$

on en déduit que : $aX^2 + bX + c \in \left\{X^2\right\}^\perp \Leftrightarrow b = -2a$, ce qui donne

$$\left\{X^2\right\}^\perp = vect\left(1, X^2 - 2X\right).$$

5. Puisque

$$\varphi\left(aX^2 + bX + c, 1\right) = 0,$$

on en déduit que $\{1\}^\perp = E$.

Chapitre 5

Formes hermitiennes

Ce chapitre est l'analogue de l'étude des formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques dans les chapitres 2 et 4 quand on remplace le corps $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$. De façon simplifiée : « on remplace le carré x^2 d'un nombre réel par le module au carré $|z|^2 = z\overline{z}$ d'un nombre complexe ». Ceci conduit à la notion de forme hermitienne (analogue de la notion de forme bilinéaire symétrique), puis de produit scalaire hilbertien sur $\mathbb{C}^n$ (analogue du produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$). Un des avantages de se placer sur le corps $\mathbb{C}$ est l'existence de valeurs propres et vecteurs propres, on obtient ainsi les importants théorèmes de diagonalisation.

5.1 Résumé de cours

Dans toute cette section, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Définition 5.1. Soit F un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On dit qu'une application $f : E \to F$ est semi-linéaire (ou antilinéaire) si et seulement si : pour tout $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{C}$

i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

ii) $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$

Remarque 5.1. Une forme semilinéaire est une application semilinéaire d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel dans $\mathbb{C}$. i.e. si $f : E \to \mathbb{C}$ est semilinéaire, alors f est dite forme semilinéaire.

Exemple 5.1. 1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$, on a $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et pour tout $x, y, \lambda \in \mathbb{C}$

- $f(x+y) = \overline{(x+y)} = \bar{x} + \bar{y} = f(x) + f(y)$
- $f(\lambda x) = \overline{(\lambda x)} = \bar{\lambda}.\bar{x} = \bar{\lambda} f(x)$

d'où f est semi-linéaire.

2. Soit $f : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$, $P \mapsto \overline{P(z_0)}$, $z_0 \in \mathbb{C}$.
On a pour tout $P, Q \in \mathbb{C}[X], \lambda \in \mathbb{C}$:

- $f(P+Q) = \overline{(P+Q)(z_0)} = \overline{P(z_0)+Q(z_0)} = \overline{P(z_0)} + \overline{Q(z_0)}$
$= f(P) + f(Q)$
- $f(\lambda P) = \overline{(\lambda P)(z_0)} = \overline{\lambda}.\overline{P(z_0)} = \overline{\lambda} f(P)$

d'où f est semi-linéaire.

3. Montrer que l'application $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$, $f(x,y,z) = \bar{x} + 2\bar{y} - \bar{z}$ est semi-linéaire.

Définition 5.2. On dit qu'une application $h : E \times E \to \mathbb{C}$ est une forme **sesquilinéaire** sur E si et seulement si :

i) h est linéaire par rapport à la première variable

ii) h est semilinéaire par rapport à la deuxième variable

c-à-d : $\forall x, x', y, y' \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C} : \begin{cases} h(\lambda x + x', y) = \lambda h(x,y) + h(x', y) \\ h(x, \lambda y + y') = \bar{\lambda} h(x,y) + h(x,y') \end{cases}$

Remarque 5.2. Pour la définition d'une forme sesquilinéaire, on rencontre parfois dans la littérature :

i) h est linéaire par rapport à la deuxième variable.

ii) h est semilinéaire par rapport à la première variable.

Définition 5.3 (Formes hermitiennes)**.** On dit qu'une forme sesquilinéaire h sur E est une forme hermitienne sur E ssi h a la propriété de " symétrie hermitienne" c-à-d. pour tout $x, y \in E$,

$$h(y,x) = \overline{h(x,y)}.$$

On déduit de la symétrie hermitienne de h que pour tout $x \in E, h(x,x) = \overline{h(x,x)}$, d'où $h(x,x) \in \mathbb{R}$.

Remarque 5.3. 1. On note par $H(E)$ l'ensemble des formes hermitienne sur E; si $h, h' \in H(E)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on voit facilement que l'application $\alpha h + \beta h' : E \times E \to \mathbb{C}$ définie par

$$(\alpha h + \beta h')(x,y) = \alpha h(x,y) + \beta h'(x,y)$$

est encore une forme hermitienne. Par conséquent, $H(E)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (mais pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, car si $\lambda \in \mathbb{C}$
mathbbR, alors λh ne vérifie pas la propriété de " symétrie hermitienne" , $\overline{\lambda h(x,y)} \neq \lambda h(x,y)$).

2. Remarquons que, pour vérifier qu'une application $h : E \times E \to \mathbb{C}$ est une forme hermitienne, il suffit de voir que h vérifie la propriété de " symétrie hermitienne" et est linéaire en la première variable ; ces deux conditions impliquent en effet et la semi-linéarité en la $2^{ème}$ variable, car :

$$h(x,\lambda y+y')=\overline{h(\lambda y+y',x)}=\overline{\lambda h(y,x)+h(y',x)}=\bar{\lambda}\overline{h(y,x)}+\overline{h(y',x)}=\bar{\lambda}h(x,y)+h(x,y').$$

Remarque 5.4. La notion de forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est une « variante » de la notion de forme bilinéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 5.2. 1. Soit $h : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $(z_1,z_2) \mapsto z_1\bar{z}_2$. Pour tout $z_1,z_2,z_1',z_2',\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

▷ $h(\lambda z_1+z_1',z_2)=\left(\lambda z_1+z_1'\right)\bar{z}_2=\lambda z_1\bar{z}_2+z_1'\bar{z}_2=\lambda h(z_1,z_2)+h\left(z_1',z_2\right)$

▷ $h(z_1,\lambda z_2+z_2') = z_1\overline{\left(\lambda z_2+z_2'\right)} = z_1\left(\bar{\lambda}\bar{z}_2+\bar{z}_2'\right) = \bar{\lambda}z_1\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2' = \bar{\lambda}h(z_1,z_2)+h\left(z_1,z_2'\right)$, donc h est une forme sesquilinéaire.

▷ $h(z_2,z_1)=z_2\bar{z}_1=\overline{\bar{z}_2 z_1}=\overline{z_1\bar{z}_2}=\overline{h(z_1,z_2)}$. donc h est une forme hermitienne.

2. Soit $h : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $(z_1,z_2) \mapsto iz_1\bar{z}_2$.

On vérifie de la même façon que h est une forme sesquilinéaire. Mais pour tout $z_1,z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} h(z_2,z_1) &= iz_2\bar{z}_1=\overline{-i\bar{z}_2 z_1}=\overline{-iz_1\bar{z}_2}=-\overline{iz_1\bar{z}_2} \\ &= -\overline{h(z_1,z_2)}. \\ &\neq \overline{h(z_1,z_2)}. \end{aligned}$$

Donc h n'est pas une forme hermitienne.

Définition 5.4 (Formes quadratiques hermitiennes)**.** Soit h une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E. On dit que l'application

$$Q : E \to \mathbb{R}, Q(x)=h(x,x)$$

est une **forme quadratique hermitienne** sur E. D'après le lemme qui suit, h est entièrement déterminée par Q, et l'on dit que h est la **forme polaire** de Q. Notons aussi que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$Q(\lambda x)=h(\lambda x,\lambda x)=\lambda h(x,\lambda x)=\lambda\bar{\lambda}h(x,x)=\lambda\bar{\lambda}Q(x)=|\lambda|^2 Q(x),$$

où $|\lambda|$ est le module (ou la norme) de $\lambda \in \mathbb{C}$.

Lemme 5.1 (Polarisation)**.** Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $h \in H(E)$ et Q l'application $E \to \mathbb{R}, x \mapsto h(x;x)$. Alors, pour tout $x;y \in E$, on a :

(1) $\mathfrak{Re}\,(h(x,y)) = \frac{1}{2}\left(Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\right) = \frac{1}{4}\left(Q(x+y)-Q(x-y)\right)$.
(2) $\mathfrak{Im}\,(h(x,y)) = \frac{1}{2}\left(Q(x+iy)-Q(x)-Q(y)\right) = \frac{1}{4}\left(Q(x+iy)-Q(x-iy)\right)$.
(3) $4h(x,y) = Q(x+y)-Q(x-y)+iQ(x+iy)-iQ(x-iy)$.

Désormais, on suppose E de dimension finie n.

Définition 5.5 (Matrices hermitiennes)**.** Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est hermitienne si ${}^tA = \overline{A}$. On note $MH_n(\mathbb{C})$ l'ensemble de ces matrices, si $A, B \in MH_n(\mathbb{C})$ et $s, t \in \mathbb{R}$, alors $sA+tB \in MH_n(\mathbb{C})$, donc $MH_n(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (mais pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel). Observons que si $A \in MH_n(\mathbb{C})$, ses coefficients diagonaux a_{ii} vérifient $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$ donc $a_{ii} \in \mathbb{R}$.

Définition 5.6 (Matrice d'une forme hermitienne)**.** Soit h une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n et soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

La matrice $Mat_B(h)$ de h dans la base B est la matrice $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{C})$, où $a_{ij} = h(e_i, e_j)$. Comme $h\left(e_j, e_i\right) = \overline{h\left(e_i, e_j\right)}$ on a $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$, donc ${}^tA = \overline{A}$, i.e. $A \in MH_n(\mathbb{C})$.

h est entièrement déterminée par sa matrice A : en effet, d'après la linéarité (resp. semi-linéarité) en la 1ère (resp. 2 ème) variable, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, h(x,y) &= h\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{y_j} h\left(e_i, e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i \overline{y_j}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Donc, si l'on note X, Y les vecteurs colonnes des coordonnées des vecteurs x, y respectivement c-à-d. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$, on a la formule matricielle

$$h(x,y) = {}^t XA\overline{Y}.$$

Réciproquement, pour tout $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{C})$, l'application $h_A : E \times E \to \mathbb{C}$ définie par $h_A\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \overline{y_j}$ est une forme hermitienne sur E, et $Mat_B(h_A) = A$. Donc, se donner une forme hermitienne sur E « est la même chose » que se donner une matrice hermitienne : de façon précise, l'application

$$\Psi_B : H(E) \to MH_n(\mathbb{C})$$

$$h \mapsto Mat_B(h)$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Théorème 5.1 (Changement de base). *Soient h une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n, $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E telle que $A = Mat_B(h)$. Si B' est une autre base de E et P la matrice de passage $Mat_B(B')$. Alors*

$$A' = Mat_{B'}(h) =^t PA\overline{P}.$$

Définition 5.7 (Expression d'une forme quadratique hermitienne). En séparant, d'une part, les termes $x_i\overline{y_i}$ et, d'autre part, les termes $x_i\overline{y_j}$ avec $i \neq j$, la formule (*) se réécrit de la façon suivante (puisque $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$ pour tout $i \neq j$) :

$$h(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i\overline{yi} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(a_{ij}x_i\overline{y_j} + \overline{a_{ij}}x_j\overline{y_i}\right).$$

En particulier, prenant $y = x$ (*i.e.* $y_i = x_i$ pour tout i), on voit que la forme quadratique hermitienne Q associée à h est donnée par la formule suivante (noter que $x_i\overline{x_i} = |x_i|^2$) :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,|x_i|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(a_{ij}x_i\overline{x_j} + \overline{a_{ij}x_i}x_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,|x_i|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathfrak{Re}\left(a_{ij}x_i\overline{x_j}\right).$$

On voit donc apparaître les carrés des modules des x_i, et les parties réelles des doubles produits $x_i\overline{x_j}$. Pour abréger, on parlera de « carrés de modules » et de « doubles produits ».

Définition 5.8 (Rang d'une forme hermitienne). Soit h une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n et soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

(1) On définit le rang de h par $rang(h) = rang(A)$, où $A = Mat_B(h)$, ceci ne dépend pas du choix de la base B.

(2) On dit que h est non-dégénérée si $rang(h) = dimE$, i.e. si sa matrice dans une (et donc dans toute) base de E est inversible.

Définition 5.9 (Orthogonalité). Soit h une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

(1) On dit que deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux (pour h) si $h(x,y) = 0$; ceci équivaut à dire que $h(y,x) = 0$ (puisque $h(y,x) = \overline{h(x,y)}$ et vice-versa). Plus généralement, on dit que deux sous-ensembles X, Y de E sont orthogonaux si l'on a $h(x,y) = 0$ pour tout $x \in X$ et $y \in Y$. On notera $X \perp Y$ pour signifier que X et Y sont orthogonaux.

(2) Pour tout sous-ensemble Y de E, on définit son orthogonal (relativement a h), noté $Y^{\perp}$ par : $Y^{\perp} = \{x \in E \mid h(x,y) = 0, \forall y \in Y\}$ c'est un sous-espace vectoriel de E (même si Y n'en est pas un) ; de plus, on a les propriétés suivantes :
$Y \subseteq Z \Rightarrow Z^{\perp} \subseteq Y^{\perp}$, $Y^{\perp} = Vect(Y)^{\perp}$. En particulier, si $Y = F$ est un sous-espace vectoriel de E et si $(f_1, ..., f_p)$ est une famille génératrice de F, alors$F^{\perp} = \left\{f_1, ..., f_p\right\}^{\perp} = \{x \in E \mid h(x, f_i) = 0, \quad \forall i = 1, ..., p\}$.

(3) On pose $\ker(h) = \{x \in E \mid h(x,y) = 0, \forall y \in E\}$ et on l'appelle le noyau de h. On dit que h est non-dégénérée si $\ker(h) = \{0\}$.

Théorème 5.2 (Orthogonal d'un sous-espace). *Soit h une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n et soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension r.*

(1) *On a* $F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}$ *et* $\dim F^{\perp} \geq \dim E - \dim F$.

(2) $\ker(h) = \{0\} \Leftrightarrow$ *h est non-dégénérée.*

(3) *Si h est non-dégénérée, on a* $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$ *et* $F = (F^{\perp})^{\perp}$.

(4) *Si* $F \cap F^{\perp} = \{0\}$, *alors* $E = F \oplus F^{\perp}$.

Définition 5.10 (Bases orthogonales). Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et soient h une forme hermitienne sur E, et Q la forme quadratique hermitienne associée. Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E

(1) On dit que B est une base orthogonale pour h (ou pour Q) si $h\left(e_i, e_j\right) = 0$ pour $i \neq j$.

(2) Ceci équivaut à dire que la matrice $A = Mat_B(h)$ est diagonale ; si l'on note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses coefficients diagonaux (qui sont réels) et $(z_1, ..., z_n)$ les coordonnées dans la base B, ceci équivaut encore à dire que : $Q(z_1, ..., z_n) = \lambda_1 |z_1|^2 + ... + \lambda_n |z_n|^2$.

Théorème 5.3 (de Sylvester dans le cas hermitien). *Soit h une forme hermitienne sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n, et soit Q la forme quadratique hermitienne associée.*

(1) *Il existe une base B de E orthogonale pour h.*

(2) *Soient $B = (e_1, ..., e_n)$ une base orthogonale pour h et D la matrice diagonale $Mat_B(h)$. Quitte à ré-numéroter les e_i, on peut supposer que les coefficients diagonaux $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ sont non nuls et que $\lambda_i = 0$ pour $i > r$. Notons $(z_1, ..., z_n)$ les coordonnées dans la base B, alors :*

(a) *On a* $Q(z_1, ..., z_n) = \lambda_1 |z_1|^2 + ... + \lambda_r |z_r|^2$.

(b) *Soit p (resp. q) le nombre d'indices i tels que $Q(e_i) > 0$ (resp. < 0). Alors p et q ne dépendent pas de la base orthogonale choisie.*

(c) *Le couple (p,q) s'appelle la signature de h ; on a $p + q = r = rang(h)$.*

(d) $\ker(h)$ *est le sous-espace $Vect(e_{r+1}, ..., e_n)$, donné par les equations*

$z_1 = 0 = ... = z_r$.

(3) *De plus, on peut choisir* B *de sorte que la matrice diagonale* $D = Mat_B(h)$ *ait pour termes diagonaux* $(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, \ldots, 0, \ldots, 0)$*, le nombre de* 1 *(resp.* -1*) étant* p *(resp.* q*).*

5.2 Exercices

Exercice 5.1. Soit E un espace vectoriel complexe de dimension 2 et f une application définie par :

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & E \times E \to \mathbb{C} \\ & (x,y) \mapsto 3x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} \end{aligned}$$

1) Montrer que f est une forme hermitienne.
2) Donner la matrice de f dans la base canonique de E.
3) Montrer que f est non dégénérée.

Exercice 5.2. 1. Les applications suivantes sont-elles des formes sesquilinéaires hermitiennes ?
(a) $h_1 : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ donnée par :

$$h_1(x,y) \quad = \quad x_1\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2 + 2ix_3\bar{y}_3 + (2+3i)x_1\bar{y}_2 + (2-3i)x_2\bar{y}_1 + (1-5i)x_2\bar{y}_3 + (1+5i)x_3\bar{y}_2.$$

(b) $h_2 : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ donnée par

$$h_2(A,B) = tr\left({}^tA.\overline{B}\right).$$

2. Soit E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{C}$. Pour $f \in E$ et $f = a + ib$ avec a, b deux fonctions à valeurs réelles, on pose

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 a(x)dx + i\int_0^1 b(x)dx.$$

Montrer que

$$\begin{aligned} h_3 \quad : \quad & E \times E \to \mathbb{C} \\ h_3(f,g) \quad = \quad & \int_0^1 f(x).\overline{g(x)}dx \end{aligned}$$

est une forme sesquilinéaire hermitienne.

Exercice 5.3. E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

1) Parmi les application suivantes de $E \times E$ vers $\mathbb{C}$, déterminer lesquelles sont : Sesquilinéaires, Hermitiennes.

$$\begin{aligned} f \; : \; & E \times E \to \mathbb{C} \\ & (a,b) \mapsto (1+i)\,a_1\overline{b_1} + 2a_1\overline{b_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \; : \; & E \times E \to \mathbb{C} \\ & (a,b) \mapsto a_1\overline{b_1} + (1-2i)\,a_2\overline{b_1} + (1+2i)\,a_1\overline{b_2} \end{aligned}$$

avec $E = \mathbb{C}^2$, $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$.

2) Donner la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$.

3) Montrer que g est non dégénérée.

Exercice 5.4. On pose : $E = \mathbb{C}^3$, et on définit l'application q de E dans $\mathbb{C}$ par :

$$q(x) = |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + i\overline{x_1}x_2 - ix_1\overline{x_2} + 2ix_2\overline{x_3} - 2i\overline{x_2}x_3.$$

a) Démontrer qu'il existe une forme hermitienne $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout x, $f(x,x) = q(x)$.

b) Calculer la matrice de f dans la base canonique.

c) Calculer une base orthonormale de f.

Exercice 5.5. Soit $E = \mathbb{C}^3$ avec sa structure hermitienne canonique. Soit F le sous-espace d'équation $x_1 - x_2 + ix_3 = 0$.

a) Calculer l'orthogonal de F.

b) Calculer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

c) Trouver une base orthonormale de F.

Exercice 5.6. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne. Soit v un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

1) Montrez que : $\left(\overline{Av}\right)^t v = (\overline{v})^t Av$.

2) Utilisez le résultat précédent pour déduire que $\overline{\lambda} = \lambda$.

Exercice 5.7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$ des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à n ainsi que l'application

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle \; : \; & \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}_n[X] \longrightarrow \mathbb{C} \\ & (P,Q) \longmapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(e^{it}\right)\overline{Q\left(e^{it}\right)}dt. \end{aligned}$$

1. Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Montrer que la base $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{C}_n[X]$ est une base orthonormale par rapport à $\langle .,. \rangle$.

3. En déduire, pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, l'expression de la quantité $\|P\|$ en fonction des coefficients du polynôme P (où $\|\,.\,\|$ désigne la norme hermitienne associée au produit scalaire hermitien $\langle .\,,.\rangle$).

Exercice 5.8. Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace hermitien et soit $f \in L(E)$ un endomorphisme de E. On suppose que, pour tout $x \in E, \langle f(x), x\rangle = 0$.

a) Montrer que pour tous $x, y \in E$, on a $\langle f(x), y\rangle = 0$.

b) En déduire que f est l'endomorphisme nul.

c) Peut-on démontrer la même chose dans le cas euclidien ?

Exercice 5.9. Soit la forme quadratique hermitien q définie sur $\mathbb{C}^3$ par :

$$q(x,y,z) = |x|^2 - |z|^2 - ix\overline{y} + i\overline{x}y + (1+i)x\overline{z} + (1-i)\overline{x}z + (2-i)y\overline{z} + (2+i)\overline{y}z.$$

1. Déterminer la matrice de q dans la base canonique B de $\mathbb{C}^3$.
2. Décomposer q en somme de carrés de modules.
3. En déduire la signature et le rang de q.
4. Déterminer une base orthonormée par rapport à q de $\mathbb{C}^3$.

Exercice 5.10. Soit $E = \mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Montrer que, $\langle z, w\rangle = Re\left(\overline{z}w\right)$ définit un produit scalaire euclidien sur E.
2. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $u_{\alpha,\beta}$ l'endomorphisme de E défini par :

$$u_{\alpha,\beta}(z) = \alpha z + \beta \overline{z}, \ \ \forall z \in E.$$

a. Donner l'adjoint de $u_{\alpha,\beta}$.

b. Quand $u_{\alpha,\beta}$ est-il symétrique, orthogonal, une rotation, une projection orthogonale ?

Exercice 5.11. (Supplémentaire)

Soit $n \geq 3$, $G = \left\{1, w, w^2 ..., w^{n-1}\right\}$, $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $E = F(G, \mathbb{C})$. Pour tout $(f, g) \in E^2$ on pose :

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{f(w^k)} g(w^k)$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.
2. Montrer que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E.
3. Pour $k \in \{1, 2, ..., n-1\{$, soit $f_k \in E$ définie par : $\forall z \in G,\ f_k(z) = \frac{z^k}{\sqrt{n}}$.

On considère l'application U de E dans E définie par : $\forall f \in E,\ \forall z \in G,\ U(f)(z) = f(wz)$.

a) Montrer que U est un endomorphisme unitaire de E (i.e. $\langle U(f), U(g)\rangle = \langle f, g\rangle$, $\forall f, g \in E$).

b) Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, ..., n-1\{$, f_k est un vecteur propre de U.

c) En déduire que $(f_0, f_1, ..., f_{n-1})$ est une base orthonormale de E.

4. Pour $\lambda \in [0,1]$, on pose : $A_\lambda = Id_E - \lambda U - (1-\lambda)U^*$.

a) Montrer que pour tout $\lambda \in [0,1]$, A_λ est un endomorphisme normal de E (i.e. A_λ et son adjoint A_λ^* commutent : $A_\lambda \circ A_\lambda^* = A_\lambda^* \circ A_\lambda$).

b) Pour quelle valeur de λ, A_λ est-il un endomorphisme hermitien ?

c) Dans le cas où A_λ est hermitien, montrer que A_λ est positif.

Exercice 5.12. (Supplémentaire)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose qu'il existe une matrice unitaire U ($UU^* = U^*U = I$) telle que $A^* = AU$, où $A^* = \left(\overline{A}\right)^t$ est la matrice adjointe de A.

Montrer que $AU = UA$ et en déduire que A est normale.

2. On suppose que A est normale. Montrer qu'il existe une matrice unitaire U telle que $A^* = AU$. On pourra commencer par traiter le cas où A est diagonale.

Exercice 5.13. (Supplémentaire)

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple (H, L) de matrices hermitiennes tel que $M = H + iL$.

2. Montrer que M est normale si et seulement si $HL = LH$.

5.3 Corrigé d'exercices

Solution. 5.1

1) Pour tout $x, y, z \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{aligned} f(x+\lambda z, y) &= 3(x_1+\lambda z_1)\overline{y_1} + (x_2+\lambda z_2)\overline{y_2} + (1+i)(x_1+\lambda z_1)\overline{y_2} + (1-i)(x_2+\lambda z_2)\overline{y_1} \\ &= 3x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} + \lambda\Big(3z_1\overline{y_1} + z_2\overline{y_2} + (1+i)z_1\overline{y_2} + (1-i)z_2\overline{y_1}\Big) \\ &= f(x,y) + \lambda f(z,y). \end{aligned}$$

D'où f est linéaire par rapport à x.
On peut montrer que f est semilinéaire par rapport à y i.e.

$$\forall x, y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C},\ f(x, y+\lambda z) = f(x,y) + \overline{\lambda} f(z,y).$$

Donc f est une forme sesquilinéaire. D'autre part on a :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + (1+i)x_1\overline{y_2} + (1-i)x_2\overline{y_1} \\ &= 3\overline{y_1}x_1 + \overline{y_2}x_2 + (1+i)\overline{y_2}x_1 + (1-i)\overline{y_1}x_2 \\ &= \overline{3y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2} + (1-i)y_2\overline{x_1} + (1+i)y_1\overline{x_2}} \\ &= \overline{f(y,x)}. \end{aligned}$$

D'où f est une forme hermitienne.

2) On a :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x_1\Big(3\overline{y_1} + (1+i)\overline{y_2}\Big) + x_2\Big(\overline{y_2} + (1-i)\overline{y_1}\Big) \\ &= (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 3\overline{y_1} + (1+i)\overline{y_2} \\ \overline{y_2} + (1-i)\overline{y_1} \end{pmatrix} = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \end{pmatrix} \\ &= {}^tXM\overline{Y}. \end{aligned}$$

D'où la matrice de f dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$.

3) On remarque que $det\ M = 1 \neq 0$, d'où $rg f = rg M = 2$. Alors f est non dégénérée.

Solution. 5.2

1. (a) Pour tout $x, y, z \in \mathbb{C}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on peut montrer que :

$$\begin{aligned} h_1(\lambda x + z, y) &= (\lambda x_1 + z_1)\bar{y}_1 + 3(\lambda x_2 + z_2)\bar{y}_2 + 2i(\lambda x_3 + z_3)\bar{y}_3 + (2+3i)(\lambda x_1 + z_1)\bar{y}_2 \\ &\quad + (2-3i)(\lambda x_2 + z_2)\bar{y}_1 + (1-5i)(\lambda x_2 + z_2)\bar{y}_3 + (1+5i)(\lambda x_3 + z_3)\bar{y}_2. \\ &= \lambda h_1(x,y) + h_1(z,y) \end{aligned}$$

De même on montre que :

$$\begin{aligned}
h_1(x,\lambda y+z) &= x_1\overline{(\lambda y_1+z_1)}+3x_2\overline{(\lambda y_2+z_2)}+2ix_3\overline{(\lambda y_3+z_3)}+(2+3i)\,x_1\overline{(\lambda y_2+z_2)}\\
&\quad+(2-3i)\,x_2\overline{(\lambda y_1+z_1)}+(1-5i)\,x_2\overline{(\lambda y_3+z_3)}+(1+5i)\,x_3\overline{(\lambda y_2+z_2)}.\\
&= \bar{\lambda}h_1(x,y)+h_1(x,z).
\end{aligned}$$

D'où h_1 est une forme sesquilinéaire. D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
h_1(y,x) &= y_1\bar{x}_1+3y_2\bar{x}_2+2iy_3\bar{x}_3+(2+3i)\,y_1\bar{x}_2+\\
&\quad (2-3i)\,y_2\bar{x}_1+(1-5i)\,y_2\bar{x}_3+(1+5i)\,y_3\bar{x}_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{h_1(x,y)} &= \overline{x_1\bar{y}_1+3x_2\bar{y}_2+2ix_3\bar{y}_3+(2+3i)\,x_1\bar{y}_2+}\\
&\quad \overline{(2-3i)\,x_2\bar{y}_1+(1-5i)\,x_2\bar{y}_3+(1+5i)\,x_3\bar{y}_2}\\
&= y_1\bar{x}_1+3y_2\bar{x}_2-2iy_3\bar{x}_3+(2-3i)\,y_2\bar{x}_1+\\
&\quad (2+3i)\,y_1\bar{x}_2+(1+5i)\,y_3\bar{x}_2+(1-5i)\,y_2\bar{x}_3.\\
&\neq h_1(y,x)
\end{aligned}$$

D'où h_1 est une forme sesquilinéaire non hermitienne.

(b) Pour tout $A,B,C\in M_n(\mathbb{C})$ et tout $\lambda\in\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
h_2(\lambda A+C,B) &= tr\left({}^t(\lambda A+C).\overline{B}\right)\\
&= tr\left(\lambda{}^tA.\overline{B}+{}^tC.\overline{B}\right)\\
&= \lambda tr\left({}^tA.\overline{B}\right)+tr\left({}^tC.\overline{B}\right)\\
&= h_2(A,B)+h_2(C,B),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
h_2(A,\lambda B+C) &= tr\left({}^tA.\left(\overline{\lambda B+C}\right)\right)\\
&= tr\left(\bar{\lambda}.{}^tA\overline{B}+{}^tA\overline{C}\right)\\
&= \bar{\lambda}tr\left({}^tA\overline{B}\right)+tr\left({}^tA\overline{C}\right)\\
&= \bar{\lambda}h_2(A,B)+h_2(A,C).
\end{aligned}$$

D'où h_2 est une forme sesquilinéaire. D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
h_2(B,A) &= tr\left({}^tB.\overline{A}\right)=tr^t\left({}^tB.\overline{A}\right)\\
&= tr\left({}^t\overline{A}.B\right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\overline{h_2(A,B)} &= \overline{tr\left({}^tA.\overline{B}\right)} \\
&= tr\left(\overline{{}^tA.\overline{B}}\right) \\
&= tr\left({}^t\overline{A}.B\right).
\end{aligned}$$

Alors, $h_2(B,A) = \overline{h_2(A,B)}$. D'où h_2 est une forme sesquilinéaire hermitienne.

2. Pour tout $f, g, k \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
h_3(\lambda f + k, g) &= \int_0^1 (\lambda f + k)(x).\overline{g(x)}dx \\
&= \lambda \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx + \int_0^1 k(x)\overline{g(x)}dx \\
&= \lambda h_3(f,g) + h_3(k,g).
\end{aligned}$$

De même on montre que :

$$\begin{aligned}
h_3(f, \lambda g + k) &= \int_0^1 f(x).\overline{(\lambda g + k)(x)}dx \\
&= \int_0^1 f(x)\left(\overline{\lambda}\overline{g(x)} + \overline{k(x)}\right)dx \\
&= \overline{\lambda} \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx + \int_0^1 f(x)\overline{k(x)}dx \\
&= \overline{\lambda} h_3(f,g) + h_3(f,k).
\end{aligned}$$

D'où h_2 est une forme sesquilinéaire. D'autre part on a :

$$h_3(g,f) = \int_0^1 g(x)\overline{f(x)}dx,$$

et

$$\begin{aligned}
\overline{h_3(f,g)} &= \overline{\int_0^1 f(x).\overline{g(x)}dx} \\
&= \int_0^1 \overline{f(x)}g(x)dx \\
&= h_3(g,f).
\end{aligned}$$

D'où h_3 est une forme sesquilinéaire hermitienne.

Solution. 5.3

1) On peut vérifier facilement que

$$\forall a,a',b,b' \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C} : \begin{cases} f(\lambda a + a', b) = \lambda f(a,b) + f(a',b) \\ f(a, \lambda b + b') = \bar{\lambda} f(a,b) + f(a,b') \end{cases},$$

donc f est sesquilinéaire. D'autre part

$$f(b,a) = (1+i)b_1\overline{a_1} + 2b_1\overline{a_2} \neq \overline{(1+i)a_1\overline{b_1} + 2a_1\overline{b_2}} = \overline{f(a,b)},$$

d'où f est une forme sesquilinéaire non hermitienne.

De même on peut vérifier facilement que g est sesquilinéaire. D'autre part

$$\begin{aligned}
g(b,a) &= b_1\overline{a_1} + (1-2i)b_2\overline{a_1} + (1+2i)b_1\overline{a_2} \\
&= \overline{a_1\overline{b_1} + (1-2i)a_2\overline{b_1} + (1+2i)a_1\overline{b_2}} \\
&= \overline{g(a,b)},
\end{aligned}$$

d'où g est une forme sesquilinéaire hermitienne.

2) On a

$$\begin{aligned}
g(a,b) &= a_1\overline{b_1} + (1-2i)a_2\overline{b_1} + (1+2i)a_1\overline{b_2} \\
&= a_1\left(\overline{b_1} + (1+2i)\overline{b_2}\right) + a_2(1-2i)\overline{b_1} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{b_1} + (1+2i)\overline{b_2} \\ (1-2i)\overline{b_1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+2i \\ 1-2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{b_1} \\ \overline{b_2} \end{pmatrix} \\
&= {}^t(A)M\overline{B}, \quad \textit{où} \;\; A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

donc la matrice de g est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1+2i \\ 1-2i & 0 \end{pmatrix}$.

3) On remarque que : $\det(M) = -5 \neq 0$, donc $rg(M) = 2 = \dim E$, d'où g est non dégénérée.

Solution. 5.4 a) On peut calculer la forme hermitienne associée à q directement, ou matrice de q, ou formule de polarisation (mais c'est galère à calculer). On obtient :

$$f(x,y) = x_1\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2} + 6x_3\overline{y_3} + i\overline{x_1}y_2 - i\overline{x_2}y_1 + 2i\overline{x_3}y_2 - 2i\overline{x_2}y_3.$$

La forme f est évidemment hermitienne.

b) La matrice de f est : $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 3 & -2i \\ 0 & 2i & 6 \end{pmatrix}$

c) On part de la base canonique, et on applique Gram-Schmidt :
$v_1 = (1,0,0)$ est le premier vecteur de la base.
Pour calculer v_2, on projette $(0,1,0)$ sur l'orthogonal de v_1, donc on cherche $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(0,1,0) + \lambda(1,0,0) = (\lambda,1,0)$ soit orthogonal à $(1,0,0)$. On résout $f((\lambda,1,0),(1,0,0)) = 0$, et on trouve $\lambda = -i$. D'où $v_2 = (-i,1,0)$.

Pour v_3, on projette $(0,0,1)$ sur l'orthogonal de v_1 et v_2, donc on cherche λ et μ tels que $(0,0,1) + \lambda v_1 + \mu v_2$ soit orthogonal à v_1 et v_2. On résout comme précédemment (sauf que là, on a deux équations au lieu d'une) et on obtient $\lambda = 0$ et $\mu = \frac{i}{2}$. D'où $v_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}, 1\right)$.

Finalement, on normalise les trois vecteurs obtenus et on trouve la base orthonormale suivante : (u_1,u_2,u_3) où

$$\left\{ \begin{array}{r} u_1 = \frac{1}{\sqrt{q(v_1)}} v_1 = \frac{1}{\sqrt{1}}(1,0,0) = (1,0,0) \\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{q(v_2)}} v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i,1,0) \\ u_3 = \frac{1}{\sqrt{q(v_3)}} v_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{2}, \frac{i}{2}, 1\right) = \end{array} \right.$$

Solution. 5.5 a) On a :

$$\begin{aligned} F &= \left\{x \in \mathbb{C}^3 : x_1 - x_2 + ix_3 = 0\right\} && (5.2) \\ &= \left\{x \in \mathbb{C}^3 : x_1 = x_2 - ix_3\right\} && (5.3) \\ &= \left\{x = (x_2 - ix_3, x_2, x_3) = x_2(1,1,0) + x_3(-i,0,1)\right\} && (5.4) \\ &= vect\left\{v_1 = (1,1,0), v_2 = (-i,0,1)\right\}. && (5.5) \end{aligned}$$

D'où $F^{\perp} = \left\{x \in \mathbb{C}^3, \forall y \in F,\ \langle x, y\rangle = 0\right\}$, donc on résout le système suivant

$$\begin{cases} \langle x, v_1\rangle = 0 \\ \langle x, v_2\rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -ix_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_3 = ix_1 \end{cases} \tag{5.6}$$

Alors $F^{\perp} = vect\left\{(1, -1, i)\right\}$.

b) Comme dans la méthode de Gram-Schmidt : on cherche la projection de $(1, 0, 0)$ sur F parallèlement à $(1, -1, i)$. On calcule donc le produit scalaire de $(1, 0, 0) + \lambda(1, -1, i)$ et de $(1, -1, i)$, et lorsque ce produit scalaire est nul, on obtient la bonne valeur de λ.

$\langle(1 + \lambda, -\lambda, i\lambda), (1, -1, i)\rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$. De même on a :
Donc on a $(1, 0, 0)$ projeté sur $(0, 1, -i)$, et ainsi de suite.

$\langle(0, 1, 0) + \lambda(1, -1, i) = (\lambda, 1 - \lambda, i\lambda), (1, -1, i)\rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$
D'où $(0, 1, 0)$ est projeté sur $(1, 0, i)$. On trouve aussi que $(0, 0, 1)$ est projeté sur $(i, -i, 0)$. D'où la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Méthode de Gram-Schmidt appliquée à une base quelconque de F. Comme on a trouvé dans la question (a) que $\left\{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (-i, 0, 1)\right\}$ est une base de F, donc en appliquent le procédé de Gram-Schmidt à cette base comme suit :

On a : $\|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1\rangle} = \sqrt{x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} + x_3\overline{x_3}} = \sqrt{2}$ et donc

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 = (1, 1, 0) \\ u_2 &= v_2 - \tfrac{\langle v_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (-i, 0, 1) - \tfrac{-i}{2}(1, 1, 0) = (-\tfrac{i}{2}, \tfrac{i}{2}, 1). \end{aligned}$$

On a $\|u_2\| = \sqrt{\langle u_2, u_2\rangle} = \sqrt{\left(-\frac{i}{2}\right)\frac{i}{2} + \frac{i}{2}\left(-\frac{i}{2}\right) + 1 \times 1} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.
D'où on obtient une base orthonormée pour F qui est $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), \frac{2}{\sqrt{6}}(-\frac{i}{2}, \frac{i}{2}, 1)\right\}$.

Solution. 5.6

1) On rappelle qu'une matrice complexe A est hermitienne si et seulement si $A = A^*$, où $A^* = \left(\overline{A}\right)^t$.

On a : $\left(\overline{Av}\right)^t v = \left(\overline{A}\overline{v}\right)^t v = (\overline{v})^t \left(\overline{A}\right)^t v = (\overline{v})^t A^* v = (\overline{v})^t A v$.

2) Du résultat précédent, on obtient

$$\begin{aligned} \left(\overline{Av}\right)^t v = (\overline{v})^t A v \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\overline{\lambda v}\right)^t v = (\overline{v})^t \lambda v \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{\lambda}\,(\overline{v})^t v = \lambda\,(\overline{v})^t v \\ &\Leftrightarrow \quad \overline{\lambda}\|v\|^2 = \lambda\|v\|^2 \end{aligned}$$

Puisque v est un un vecteur propre de A donc non nul. On en déduit que $\overline{\lambda} = \lambda$.

Solution. 5.7

1. Montrons que $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire. i.e. montrons que c'est une forme sesquilinéaire, qui vérifie la propriété de symétrie hermitienne et définie positive.

▹ Pour tout $P, Q, R \in \mathbb{C}_n[X]$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle P+\lambda R, Q\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(P+\lambda R)\left(e^{it}\right)\overline{Q\left(e^{it}\right)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(e^{it}\right)\overline{Q\left(e^{it}\right)}dt + \lambda\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}R\left(e^{it}\right)\overline{Q\left(e^{it}\right)}dt \\
&= \langle P, Q\rangle + \lambda\langle R, Q\rangle
\end{aligned}$$

D'où la linéarité par rapport à P.

$$\begin{aligned}
\langle P, Q+\lambda R\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(e^{it}\right)\overline{(Q+\lambda R)\left(e^{it}\right)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(e^{it}\right)\overline{Q\left(e^{it}\right)}dt + \overline{\lambda}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(e^{it}\right)\overline{R\left(e^{it}\right)}dt \\
&= \langle P, Q\rangle + \overline{\lambda}\langle P, R\rangle
\end{aligned}$$

D'où la semi-linéarité par rapport à Q.
On déduit que $\langle .,.\rangle$ est une forme sesquilinéaire.

▹ Pour tout $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle Q, P\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Q\left(e^{it}\right)\overline{P\left(e^{it}\right)}dt \\
&= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(e^{it}\right)\overline{Q\left(e^{it}\right)}dt} \\
&= \overline{\langle P, Q\rangle}.
\end{aligned}$$

D'où $\langle .,.\rangle$ est une forme hermitienne sur $\mathbb{C}_n[X]$.

▹ Définie positive : Pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle P, P\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(e^{it}\right)\overline{P\left(e^{it}\right)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P\left(e^{it}\right)|^2dt \geq 0.
\end{aligned}$$

D'où $\langle .,. \rangle$ est positive. D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\langle P, P\rangle = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P\left(e^{it}\right)|^2 dt = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad |P\left(e^{it}\right)| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad P = 0.
\end{aligned}$$

D'où $\langle .,. \rangle$ est définie donc définie positive.
Donc $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}_n[X]$.

2. $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{C}_n[X]$ est une base orthonormale par rapport à $\langle .,. \rangle$ si et seulement si pour tout $j, k \in [1, n]$:

$$\langle X^j, X^k\rangle = \begin{cases} 0, \; j \neq k \\ 1, \; j = k \end{cases}$$

Supposons que $j \neq k$:

$$\begin{aligned}
\langle X^j, X^k\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(jt)} e^{-i(kt)} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(j-k)t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{1}{i(j-k)} e^{i(j-k)t}\Big]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi i(j-k)}\Big[e^{i(j-k)2\pi} - e^0\Big] \\
&= \frac{1}{2\pi i(j-k)}\Big[1-1\Big] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De plus pour tout $k \in [1, n]$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle X^k, X^k\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(kt)} e^{-i(kt)} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[t\Big]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big[2\pi - 0\Big] \\
&= 1.
\end{aligned}$$

D'où $(1, X, ..., X^n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{C}_n[X]$ par rapport à $\langle .,. \rangle$.

3. Pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$ on a : $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$, où $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\|P\|^2 &= \langle P, P\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P\left(e^{it}\right)|^2 dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |a_0 + a_1 e^{it} + ... + a_n e^{int}|^2 dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(Re\left(a_0 + a_1 e^{it} + ... + a_n e^{int}\right)\right)^2 dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(Im\left(a_0 + a_1 e^{it} + ... + a_n e^{int}\right)\right)^2 dt \\
&= M,\ M \in \mathbb{R},\ M > 0.
\end{aligned}$$

D'où $\|P\| = \sqrt{M}$.

Solution. 5.8

a) Pour tout $x, y \in E$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle f(x+y), x+y\rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle f(x) + f(y), x+y\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle f(x), x\rangle + \langle f(x), y\rangle + \langle f(y), x\rangle + \langle f(y), y\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle f(x), y\rangle + \langle f(y), x\rangle = 0 \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle f(x-iy), x-iy\rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle f(x) - if(y), x-iy\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle f(x), x\rangle + \langle f(x), -iy\rangle + \langle -if(y), x\rangle + \langle -if(y), -iy\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle f(x), -iy\rangle - i\langle f(y), x\rangle + \langle f(-iy), -iy\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow i\langle f(x), y\rangle - i\langle f(y), x\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle f(x), y\rangle - \langle f(y), x\rangle = 0 \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

La somme de (5.7) et (5.8) nous donne $\langle f(x), y\rangle = 0$ pour tout $x, y \in E$.

b) Puisque f est un endomorphisme de E, alors pour tout $x \in E$ on a $f(x) \in E$. Donc on peut remplacer y par $f(x)$ et on déduit que pour tout $x \in E$, $\langle f(x), f(x)\rangle = 0$. D'où

$$\|f(x)\|^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0,\ \forall x \in E$$

En déduire que f est l'endomorphisme nul.

c) Dans le cas réel (euclidien), ce n'est plus vrai : par exemple en dimension 2, la rotation r d'angle $\frac{\pi}{2}$ envoie chaque vecteur sur un vecteur orthogonal, mais n'est évidemment pas nulle. i.e. $\langle r(x), x\rangle = 0$ mais r est un endomorphisme non nul.

Solution. 5.9 1. À partir de l'expression de q ou en écrivant q sous la forme $q(X) = ^t XM\overline{X}$ on déduit que la matrice de q dans dans la base canonique B de

$\mathbb{C}^3$ est :

$$M = M(q,B) = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1+i \\ i & 0 & 2-i \\ 1-i & 2+i & -1 \end{pmatrix}$$

2. La décomposition en carrés de modules de :
$q(x,y,z) = |x|^2 - |z|^2 - ix\overline{y} + i\overline{x}y + (1+i)x\overline{z} + (1-i)\overline{x}z + (2-i)y\overline{z} + (2+i)\overline{y}z.$

$$\begin{aligned}
q(x,y,z) &= |x|^2 + 2Re\Big(i\overline{x}y + (1-i)\overline{x}z\Big) + 2Re\Big((2-i)y\overline{z}\Big) - |z|^2 \\
&= |x|^2 + 2Re\Big(\overline{x}\,(iy + (1-i)z)\,\Big) + 2Re\Big((2-i)y\overline{z}\Big) - |z|^2 \\
&= |x + iy + (1-i)z|^2 - |iy + (1-i)z|^2 + 2Re\Big((2-i)y\overline{z}\Big) - |z|^2 \\
&= |x + iy + (1-i)z|^2 - |y + (-1-i)z|^2 + 2Re\Big((2-i)y\overline{z}\Big) - |z|^2 \\
&= |x + iy + (1-i)z|^2 - |y|^2 - 2Re\Big((-1+i)y\overline{z}\Big) - 2|z|^2 + 2Re\Big((2-i)y\overline{z}\Big) - |z|^2 \\
&= |x + iy + (1-i)z|^2 - \Big[|y|^2 + 2Re\Big((-3+2i)y\overline{z}\Big)\Big] - 3|z|^2 \\
&= |x + iy + (1-i)z|^2 - |y + (-3-2i)z|^2 + 10|z|^2
\end{aligned}$$

3. La signature est $sgn(q) = (2,1)$ et le rang est $rg(q) = 2+1 = 3$.
4. Base orthonormée :

$$\left\{ \begin{array}{c} x' = x + iy + (1-i)z \\ y' = y - (3+2i)z \\ z' = z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = x' - iy' + (1-2i)z' \\ y = y' + (3+2i)z' \\ z = z' \end{array} \right.$$

Donc la matrice de de la base canonique B à la base orthogonale est :

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 1-2i \\ 0 & 1 & 3+2i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La base orthogonale est $\{(1,0,0),(-i,1,0),(1-2i,3+2i,1)\}$.
Par conséquent la base orthonormée par rapport à q de $\mathbb{C}^3$ est : $\Big\{(1,0,0),(-i,1,0),\frac{1}{\sqrt{10}}(1-2i,3+2i,$

Solution. 5.10 1. Pour tout $y,z,w \in \mathbb{C}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$\langle y + \lambda z, w\rangle = Re\Big(\overline{(y+\lambda z)}w\Big) = Re\Big(\overline{y}w + \lambda\overline{z}w\Big) = Re\Big(\overline{y}w\Big) + \lambda Re\Big(\overline{z}w\Big) = \langle y,w\rangle + \lambda\langle z,w\rangle$$

D'où la linéarité à gauche et par la même méthode on montre la linéarité à droite. Par conséquent $\langle z,w\rangle$ est une forme bilinéaire sur E.

La symétrie :

$$\begin{aligned}\langle z,w\rangle &= Re\Big(\overline{z}w\Big)=Re\Big(\overline{\overline{z}w}\Big)\\ &= Re\Big(z\overline{w}\Big)=Re\Big(\overline{w}z\Big)\\ &= \langle w,z\rangle.\end{aligned}$$

Définie positive :

$$\langle z,z\rangle = Re\Big(\overline{z}z\Big)=Re\Big(|z|^2\Big)=|z|^2\geq 0.$$

De plus

$$\begin{aligned}\langle z,z\rangle = 0 &\Leftrightarrow |z|^2=0\\ &\Leftrightarrow z=0\end{aligned}$$

Donc $\langle .,.\rangle$ définie positive alors c'est un produit scalaire euclidien sur E.

2. a. Cherchons l'adjoint de : $u_{\alpha,\beta}(z)=\alpha z+\beta\overline{z},\ \ \forall z\in E$.

Pour tout $z,w\in E$

$$\begin{aligned}\langle u_{\alpha,\beta}(z),w\rangle &= \langle \alpha z+\beta\overline{z},w\rangle\\ &= \langle \alpha z,w\rangle+\langle\beta\overline{z},w\rangle\\ &= Re\Big(\overline{\alpha z}w\Big)+Re\Big(\overline{\beta\overline{z}}w\Big)\\ &= Re\Big(\overline{z}(\overline{\alpha}w)\Big)+Re\Big(\overline{\beta}wz\Big)\\ &= \langle z,\overline{\alpha}w\rangle+\langle\beta\overline{w},z\rangle\\ &= \langle z,\overline{\alpha}w\rangle+\langle z,\beta\overline{w}\rangle\\ &= \langle z,\overline{\alpha}w+\beta\overline{w}\rangle.\end{aligned}$$

D'où l'adjoint de $u_{\alpha,\beta}$ est : $u^*_{\alpha,\beta}(w)=\overline{\alpha}w+\beta\overline{w}$. D'où $u^*_{\alpha,\beta}=u_{\overline{\alpha},\beta}$.

b. ▹ Étudions la symétrie de $u_{\alpha,\beta}$:

$u_{\alpha,\beta}$ est symétrique si et seulement si $u^*_{\alpha,\beta}=u_{\alpha,\beta}$

$$\begin{aligned}u^*_{\alpha,\beta}=u_{\alpha,\beta} &\Leftrightarrow u_{\overline{\alpha},\beta}=u_{\alpha,\beta}\\ &\Leftrightarrow \overline{\alpha}=\alpha,\ \beta=\beta\\ &\Leftrightarrow \alpha\in\mathbb{R},\ \beta\in\mathbb{C}.\end{aligned}$$

▹ Étudions l'orthogonalité de $u_{\alpha,\beta}$:

$u_{\alpha,\beta}$ est orthogonal si et seulement si $u_{\alpha,\beta} \circ u^*_{\alpha,\beta} = I_E$

$$\begin{aligned}
u_{\alpha,\beta} \circ u^*_{\alpha,\beta} = I_E \quad & \Leftrightarrow \quad \forall z \in E,\ u_{\alpha,\beta} \circ u^*_{\alpha,\beta}(z) = z \\
& \Leftrightarrow \quad \forall z \in E,\ u_{\alpha,\beta}(\overline{\alpha}z + \beta\overline{z}) = z \\
& \Leftrightarrow \quad \forall z \in E,\ \alpha\left(\overline{\alpha}z + \beta\overline{z}\right) + \beta\left(\overline{\overline{\alpha}z + \beta\overline{z}}\right) = z \\
& \Leftrightarrow \quad \forall z \in E,\ \alpha\overline{\alpha}z + \alpha\beta\overline{z} + \beta\alpha\overline{z} + \beta\overline{\beta}z = z \\
& \Leftrightarrow \quad \forall z \in E,\ \left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 1\right)z + 2\alpha\beta\overline{z} = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 1 = 0 \ et \ 2\alpha\beta = 0
\end{aligned}$$

Donc $u_{\alpha,\beta}$ est orthogonal si et seulement si ($\alpha = 0$ et $|\beta| = 1$) ou ($\beta = 0$ et $|\alpha| = 1$).

▹ $u_{\alpha,\beta}$ est une rotation ?

$u_{\alpha,\beta}$ est une rotation si et seulement si $u_{\alpha,\beta}$ est orthogonal et $det\left(u_{\alpha,\beta}\right) = 1$.

Soit $B = (1, i)$ la base canonique de $\mathbb{C}$. D'où on a :

$$u_{\alpha,\beta}(1) = \alpha + \beta \text{ et } u_{\alpha,\beta}(i) = (\alpha - \beta)i$$

D'où la matrice de $u_{\alpha,\beta}$ dans la base B est

$$M\left(u_{\alpha,\beta}, B\right) = \begin{pmatrix} Re(\alpha+\beta) & Re\Big((\alpha-\beta)i\Big) \\ Im(\alpha+\beta) & Im\Big((\alpha-\beta)i\Big) \end{pmatrix}$$

$$det\left(u_{\alpha,\beta}\right) = det\left(M\left(u_{\alpha,\beta}, B\right)\right) = Re(\alpha+\beta)Im\Big((\alpha-\beta)i\Big) - Re\Big((\alpha-\beta)i\Big)Im(\alpha+\beta)$$

On pose $\alpha = a + ib$ et $\beta = c + id$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

⋄ Si $\alpha = 0$ et $|\beta| = 1$ on a :

$$M\left(u_{\alpha,\beta}, B\right) = \begin{pmatrix} Re(\beta) & Re\Big((-\beta)i\Big) \\ Im(\beta) & Im\Big((-\beta)i\Big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$$

D'où $det\left(u_{\alpha,\beta}\right) = -\left(c^2 + d^2\right) = -|\beta|^2 = -1$, donc $u_{\alpha,\beta}$ n'est pas une rotation.

⋄ Si $\beta = 0$ et $|\alpha| = 1$ on a :

$$M\left(u_{\alpha,\beta}, B\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

D'où $det\left(u_{\alpha,\beta}\right) = a^2 + b^2 = |\alpha|^2 = 1$, donc $u_{\alpha,\beta}$ est une rotation.

Alors $u_{\alpha,\beta}$ est une rotation si et seulement si $\beta = 0$ et $|\alpha| = 1$.

▹ $u_{\alpha,\beta}$ est une projection orthogonale ?

$u_{\alpha,\beta}$ est une projection orthogonale si est seulement si $u_{\alpha,\beta}$ est un projecteur et $u_{\alpha,\beta}$ est symétrique.

i.e. $u_{\alpha,\beta}^2 = u_{\alpha,\beta} \circ u_{\alpha,\beta} = u_{\alpha,\beta}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
u_{\alpha,\beta}^2(z) = u_{\alpha,\beta}(z),\ \forall z \in E \quad &\Leftrightarrow \quad u_{\alpha,\beta}\left(\alpha z + \beta \overline{z}\right) = \alpha z + \beta \overline{z},\ \forall z \in E \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha\left(\alpha z + \beta \overline{z}\right) + \beta \overline{\left(\alpha z + \beta \overline{z}\right)} = \alpha z + \beta \overline{z},\ \forall z \in E \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\alpha^2 + |\beta|^2 - \alpha\right) z + (2\alpha\beta - \beta)\overline{z} = 0,\ \forall z \in E \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha^2 + |\beta|^2 - \alpha = 0 \ et\ \beta\,(2\alpha - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\beta = 0 \ \ et \ \ \alpha^2 - \alpha = 0\right) \ \ ou \ \ \left(\alpha = \frac{1}{2} \ \ et \ \ |\beta|^2 = \frac{1}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow \quad (\beta = 0 \ \ et \ \ \alpha = 0) \ \ ou \ \ (\beta = 0 \ \ et \ \ \alpha = 1) \ \ ou \ \ \left(\alpha = \frac{1}{2} \ \ et \ \ |\beta| = \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Bibliographie

[1] E. Azoulay et J. Avignant, Mathématiques, tome 4. Algèbre. Cours et Exercices. Copyright, (by McGraw-Hill, Paris, (1984)

[2] V. Prasolov, Problems and theorems in linear algebra.

[3] K. Koufany. Cours d'algèbre bilinéaire, Université de Lorraine, version 1, 2017.

[4] J-M. Monier, Algèbre MP- Cours et 500 exercices corrigés, 4^{eme} édition, DUNOD, 2004.

[5] R. Gomez, Diagonalisation des matrices symétriques, article publié sur Mégamaths, 2007.

[6] L. Schwartz, Algèbre 3^{eme} année, Cours et exercices avec solutions, Dunod, Paris, 2003.

[7] Joseph Grifone, Algèbre linéaire, 4^{eme} édition. Cépaduès Edition, France, 2011.

[8] S. Balac et L. Chupin, Analyse et algèbre, Cours de mathématiques de 2^{eme} année avec exercices corrigés. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2008.

[9] J. P. Escofier, Toute l'algèbre de la licence, 4th Edition, Dunod, 2000.

[10] S. Lipschutz, Algèbre Linéaire, Cours Et Problèmes 600 Exercices Résolus, Temple University Editeur : Mcgraw-Hill, Collection : Série Schaum, 1987.

[11] G. Strang, Introduction to Linear Algebra, Fifth Edition, Wellesley-Cambridge Press and SIAM, (2016).

[12] M. Steinberger, Algebra, PWS, (1994), 558 pages.