3 Fonction caractéristique et convergences

Exercice 3.1 Soit φ une f.c. Montrer que $\overline{\varphi}, \varphi^2$ et $|\varphi|^2$ le sont aussi. Par contre, donner un exemple qui montre que $|\varphi|$ ne l'est pas nécessairement.

Exercice 3.2 Une v.a. est dite *symmétrique* si $X \overset{\mathrm{d}}{=} -X$. Montrer que X est symmétrique ssi $\mathrm{Im}(\varphi_X) = 0$.

Exercice 3.3 Montrer que la f.c. φ d'une v.a. donnée X vérifie

$$|1 - \varphi(t)| \leq E(|tX|)$$

Exercice 3.4 Soit X et Y deux v.a. indépendantes de distribution normale standard. Trouver les f.c. de X^2 et XY.

Exercice 3.5 Soit X et Y deux v.a. indépendantes de distribution de Cauchy, i.e. la d.p. est de la forme $f(x) = \pi^{-1}(1 + x^2)^{-1}$. Poser $Z = (X + Y)/2$ et montrer que Z suit la loi de Cauchy.

Exercice 3.6 Trouver les f.c. des d.p. suivantes :

$$(a)\, \frac{1}{2}|x|e^{-|x|} \qquad (b)\, e^{-x-e^{-x}}$$

Exercice 3.7 Soit φ la f.c. de la loi normale standard. Montrer que φ vérifie l'équation différentielle $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$. En déduire la forme explicite de φ.

Exercice 3.8 Soit φ une f.c. Décrire les v.a. associées aux f.c. suivantes :

$$(a)\, \frac{1}{2 - \varphi(t)} \qquad (b)\, \int_0^\infty \varphi(xt)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 3.9 Quelles sont la f.c. parmi les fonctions suivantes :

$$(a)\, \cos t \qquad (b)\, (1 + t^4)^{-1} \qquad (c)(1 - |t|)\, \mathbb{1}_{|t|\leq 1}(t) \qquad (d)\, e^{-t^4}$$

Exercice 3.10 Soit X une v.a. dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice G. Poser $q_n = P(X > n)$ et soit G_q la fonction génératrice des q_n, i.e. $G_q(z) = \sum_n q_n z^n$. Montrer que

$$G_q(z) = \frac{1 - G(z)}{1 - z}$$

Ensuite, montrer que $E(X) = G_q(1)$.

Exercice 3.11 Une pièce de monnaie (biaisée) donne pile avec une probabilité $p = 1-q$. Elle est lancée successivement jusqu'à ce que pour la première fois, H_n pile apparaissent n fois de suite. Soit $G_{H_n} = G_n$. Montrer que

$$G_n(s) = \frac{ps\,G_{n-1}(s)}{1 - qs\,G_{n-1}(s)} \tag{3.1}$$

En déduire que

$$G_n(s) = \frac{(1-ps)p^n s^n}{1 - s + qp^n s^{n+1}} \tag{3.2}$$

Exercice 3.12 Si $X \in \mathbb{Z}$, montrer que

$$P(X = x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itx} \varphi_\mu(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.3}$$

Exercice 3.13 Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de distribution $\mathcal{N}$. Montrer que

$$\limsup \frac{X_n}{\sqrt{2\log n}} \overset{\text{p.s.}}{=} 1$$

Exercice 3.14 Montrer que $\mathcal{G}(\lambda/n) \Longrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

Exercice 3.15 (Théorème de Slutsky) Supposer que $X_n \Longrightarrow X$ et $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} c$ où c est une constante. Montrer que

$$\begin{array}{lrcl} (i) & X_n + Y_n & \Longrightarrow & X + c \\ (ii) & X_n Y_n & \Longrightarrow & c\,X \end{array}$$

où $c \neq 0$ dans le dernier cas.

Exercice 3.16 Soit (X_n) et (Y_n) deux suites de v.a. convergeant en loi respectivement vers X et Y. Supposons que (X_n) et (Y_n) soient indépendantes et que X et Y le soient aussi. Montrer que $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + Y$. Donner un exemple qui montre que sans l'hypothèse d'indépendance, on peut perdre la convergence.

Exercice 3.17 Soit (X_n) une suite de v.a. de f.r. respectives définies par

$$F_n(x) = x - \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}, \quad x \in [0,1]$$

Montrer que $X_n \Longrightarrow U$ mais que les d.p. ne convergent pas vers la d.p. de U.

Exercice 3.18 Soit (X_n) une suite de v.a. de distributions respectives $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$. Supposer que $X_n \Longrightarrow X$. Montrer que (σ_n^2) converge. En déduite que X est normale.

Exercice 3.19 Considérer des v.a. X_n de distributions respectives $\mathcal{P}(\lambda_n)$. Si $\lambda_n \to \infty$, montrer que

$$\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \Longrightarrow \mathcal{N}$$