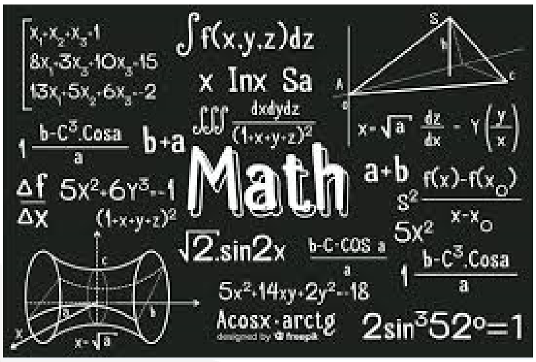
# TD de Mathématiques 1




Dr. Seddik MERDACI

Université Frères Mentouri Costantine1

Faculté des sciences exactes

Département des sciences de la matière

Email : Seddik.merdasi@umc.edu.dz

5.0

Février 2024

# Table des matières

**Objectifs** 3

**Introduction** 4

**I - Chapite1 : Logiques et Raisonnement** 6

1. Notions Logiques 7

*1.1. Assertion* 7

*1.2. Connecteurs logiques* 7

*1.3. Exercice : Exercice1* 9

*1.4. Propriétés* 9

*1.5. Exercice : short* 9

*1.6. Les quantificateurs* 10

2. Méthodes de raisonnement 10

*2.1. Méthode de raisonnement direct* 10

*2.2. Méthodes du raisonnement par la contraposée* 11

*2.3. Raisonnement par l'absurde* 11

*2.4. Contre exemple* 11

*2.5. Raisonnement par récurrence* 11

*2.6. Exercice : Teste des objectifs du premier chapitre* 13

3. TD N° : 1 Logiques et Raisonnement 14

4. Corrigé TD N° : 1 Logiques et Raisonnement 15

5. Exercice supplémentaire 16

**Solutions des exercices** 17

**Glossaire** 20

**Bibliographie** 21

**Webographie** 22

# Objectifs

Le cours de mathématiques 1 pour les sciences de la matière vise à fournir aux étudiants les outils mathématiques nécessaires pour aborder et analyser les problèmes rencontrés dans les disciplines de la physique et de la chimie. Voici quelques objectifs spécifiques que ce cours qui basé sur les niveaux de Bloom cognitifs :

1. ***Niveau de connaissance et de rappel :***
   Notions de base des mathématiques des classes Terminales (ensembles, fonctions, équations, ...).
2. ***Niveau de compréhension :*** Identifier les concepts mathématiques liés à l'axe et nous donnons à l'étudiant divers exemples tirés et compris dans la leçon
3. ***Niveau d'application :*** Appliquée les compétences nécessaires pour résoudre des problèmes mathématiques en relation avec les concepts logique mathématiques, les ensembles, les applications et les fonctions.
   Résoudre TD de mathématiques 1 (les séries des exercices ) .
4. ***Niveau d'évaluation :*** Création des exercices finaux complets pour l'axe de la logique mathématique et raisonnement, les ensembles, les applications et les fonctions.

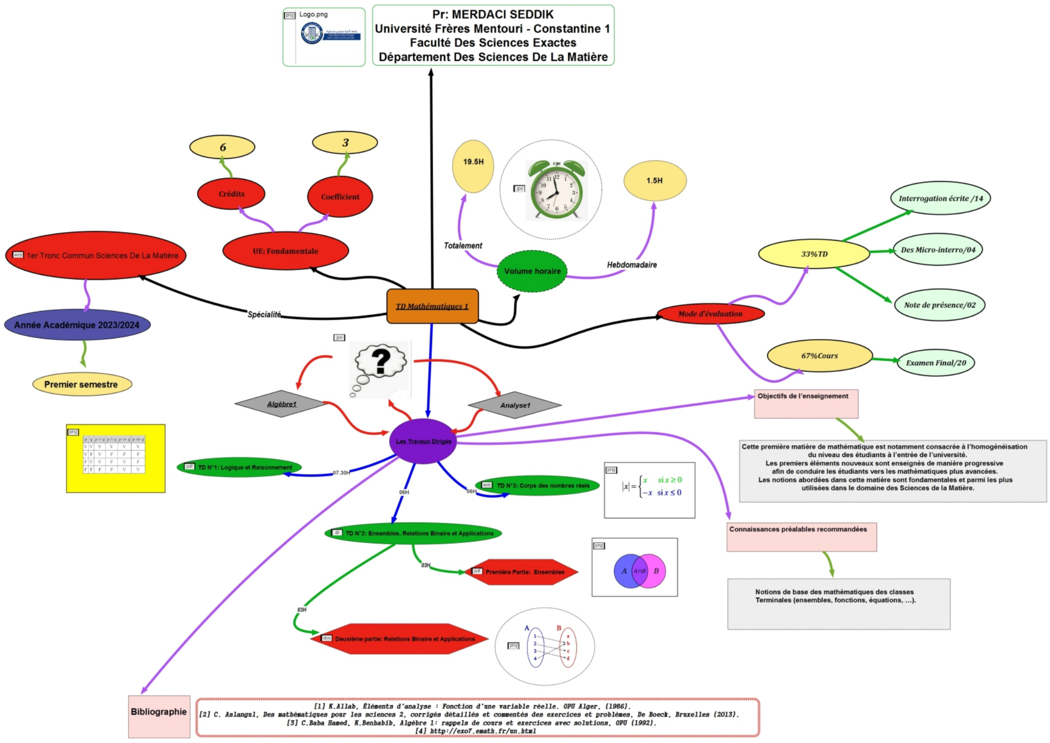
# Introduction

***Le cours de Mathématiques 1*** que nous entreprenons ici est conçu pour poser les bases fondamentales nécessaires à la maîtrise de ces concepts mathématiques essentiels. Que vous soyez étudiant en physique, en chimie ou dans toute autre discipline des Sciences des Matières, ce cours vise à vous fournir les outils mathématiques indispensables pour réussir dans votre parcours académique et professionnel.

***Contenu de la matière :***

***Analyse 1*** Théorie des ensembles. Applications : image directe, image réciproque, injection, surjection et bijection. Relations d'équivalences, Relations d'Ordres. Structure de corps des nombres réels sur \mathbb{R} : Relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$ , valeur absolue, intervalle, ensemble borné, raisonnement par récurrence. Fonctions réelles d'une variable réelle : Domaine de définition, composition des fonctions, fonctions périodiques, fonctions paires, fonction impaires, fonction bornées, sens de variations des fonctions. Limites des fonctions : Définition de limite, limite à droite, limite à gauche, limites infinies et limite à l'infini, les formes indéterminées, opérations algébriques sur les limites, limite d'une fonction composée. Fonctions continues : Définition de la continuité en un point, continuité à droite, continuité à gauche, prolongement par continuité, opérations algébriques sur les fonctions continues, continuité d'une fonction composée, fonction continue sur un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires, fonctions monotones continues. Fonctions réciproques : existence et propriétés, fonctions trigonométriques réciproques, fonctions hyperboliques.

***Algèbre 1*** Rappels : Lois de décomposition internes, groupes, anneaux et corps. Espaces vectoriels. Bases et dimensions finies. Applications linéaires, noyau, image. Opérations sur les applications linéaires, théorème sur le rang d'une application linéaire.



Logo.png
Pr: MERDACI SEDDIK
Université Frères Mentouri - Constantine 1
Faculté Des Sciences Exactes
Département Des Sciences De La Matière
6
3
Crédits
Coefficient
UE: Fondamentale
1er Tronc Commun Sciences De La Matière
Année Académique 2023/2024
Premier semestre
Spécialité
TD Mathématiques 1
19.5H
1.5H
Totalement
Volume horaire
Hebdomadaire
Mode d'évaluation
33%TD
Interrogation écrite /14
Des Micro-interro/04
Note de présence/02
67%Cours
Examen Final/20
Algèbre1
Analyse1
Les Travaux Dirigés
07.30H
TD N°1: Logique et Raisonnement
06H
TD N°2: Ensembles, Relations Binaire et Applications
06H
TD N°3: Corps des nombres réels
03H
Première Partie: Ensembles
03H
Deuxième partie: Relations Binaire et Applications
Objectifs de l'enseignement
Cette première matière de mathématique est notamment consacrée à l'homogénéisation du niveau des étudiants à l'entrée de l'université.
Les premiers éléments nouveaux sont enseignés de manière progressive afin de conduire les étudiants vers les mathématiques plus avancées.
Les notions abordées dans cette matière sont fondamentales et parmi les plus utilisées dans le domaine des Sciences de la Matière.
Connaissances préalables recommandées
Notions de base des mathématiques des classes Terminales (ensembles, fonctions, équations, ...).
Bibliographie
[1] K.Allab, Éléments d'analyse : Fonction d'une variable réelle. OPU Alger, (1986).
[2] C. Aslangul, Des mathématiques pour les sciences 2, corrigés détaillés et commentés des exercices et problèmes, De Boeck, Bruxelles (2013).
[3] C.Baba Hamed, K.Benhabib, Algèbre 1: rappels de cours et exercices avec solutions, OPU (1992).
[4] http://exo7.emath.fr/un.html

# I Chapite1 : Logiques et Raisonnement

Dans le vaste royaume des mathématiques, la logique et le raisonnement jouent un rôle fondamental.

La logique, tout d'abord, est l'outil qui nous permet de distinguer le vrai du faux, le valide de l'invalidé. Grâce à la logique, nous sommes en mesure d'établir des preuves solides et de vérifier la validité de nos conclusions.

Le raisonnement, quant à lui, est le moteur qui propulse notre exploration mathématique. Le raisonnement nous permet de résoudre des problèmes complexes, de formuler des conjectures audacieuses et de découvrir des théories révolutionnaires.

***Objectifs du premier chapitre :***

1. La capacité à distinguer les questions logiques ***vraie*** ou ***fausse*** et de donnée leur négation
2. Utiliser la ***table de vérité*** pour prouver des propositions logique de mathématiques.
3. L'utilisant des ***type de raisonnement*** pour prouver certaines propositions mathématiques.

***Connaissances préalables recommandées:***

1. L'ensemble des nombre naturelle $\mathbb{N}$, L'ensemble des nombre réels $\mathbb{R}$ , L'ensemble des nombre entière relatives $\mathbb{Z}$
2. Notions de base des mathématiques des classes Terminales (ensembles, fonctions, équations, inéquations, ...).

# 1. Notions Logiques

## 1.1. Assertion

### Définition

***Une assertion** [*]* ***( proposition )*** est une phrase soit ***vraie***, soit ***fausse***. Pas les deux en même temps.

### Exemple

1. $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, cette proposition est vraie.
2. 2 est inférieure à 4 , cette proposition est vraie
3. Tout nombre premier est pair , cette proposition est fausse.

### *Notations*

- On note[*] par $P$ une assertion.
- On associe à chaque assertion $P$ une valeur s'appelle "valeur de vérité" qui est vrai ou faux.
- La valeur de vérité "***Vrai***" est notée par ***V*** et la valeur de vérité "***Faux***" est notée par ***F***. Et on résume ceci dans une table s'appelle "table de vérité" de l'assertion $P$.

| $P$ |
|---|
| V |
| F |

## 1.2. Connecteurs logiques

Soient $P$ et $Q$ deux assertions.

### *Négation*

$nonP, \bar{P}$ .

La ***table de vérité*** de l'assertion $\bar{P}$ est donc donnée par:

| $P$ | $\bar{P}$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

### *Conjonction*

***La conjonction*** [*] est le connecteur logique $et$ , $\wedge$ , la proposition $(PetQ)$ ou $(P \wedge Q)$ est la conjonction des deux propositions $P, Q$.

- $(P \wedge Q)$ est vraie si $PetQ$ le sont toutes les deux.

- $(P \wedge Q)$ est fausse dans les autres cas. On résume tout ça dans la table de vérité suivante.

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

### Disjonction

***La disjonction*** est un connecteur logique $ou$ , $\vee$ , on note la disjonction entre $P, Q$ par $(PouQ), (P \vee Q).P \vee Q$ est fausse si $P$ et $Q$ sont fausses toutes les deux, sinon $(P \vee Q)$ est vraie.

On résume tout ça dans la table de vérité suivante.

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

### L'implication

***L'implication*** de deux propositions $P, Q$ est notée : $P \Rightarrow Q$ on dit $P$ implique $Q$ ou bien si $P$ alors $Q$ . $P \Rightarrow Q$ est fausse si $P$ est vraie et $Q$ est fausse, sinon $(P \Rightarrow Q)$ est vraic dans les autres cas.

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

### L'équivalence

***L'équivalence*** de deux propositions $P, Q$ est notée $P \Leftrightarrow Q$, on peut aussi écrixe $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$. On dit que $P \Leftrightarrow Q$ si $P$ et $Q$ ont la même valeur de verité, sinon $(P \Leftrightarrow Q)$ est fausse.

| $P$ | $Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

## 1.3. Exercice : Exercice1

*[solution* n°1 p.17*]*

On dit que $P \Leftrightarrow Q$ si $P$ et $Q$ ont la même valeur de verité, sinon $(P \Leftrightarrow Q)$ est fausse.

$(P \wedge Q)$ est vraie si $P et Q$ le sont toutes les deux.

L'assertion " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant 0$ " est fausse

$P \Rightarrow Q$ est fausse si $P$ est vraie et $Q$ est vraie

| Vraie | Fausse |
|---|---|
| | |

## 1.4. Propriétés

Soients* $P$ et $Q$ deux assertions, on a :

- $P \Longleftrightarrow P.$
- $\overline{\overline{P}} \Longleftrightarrow P.$
- $\left.\begin{aligned} P \wedge Q &\Longleftrightarrow Q \wedge P \\ P \vee Q &\Longleftrightarrow Q \vee P \end{aligned}\right\}$ ***Commutativité***.
- $\left.\begin{aligned} \overline{P \wedge Q} &\Longleftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q} \\ \overline{P \vee Q} &\Longleftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q} \end{aligned}\right\}$ Sont appelées "***Lois de Morgan***".
- $P \Longrightarrow Q \Longleftrightarrow \bar{P} \vee Q.$
- $\overline{P \Longrightarrow Q} \Longleftrightarrow P \wedge \bar{Q}.$
- $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P}).$
- $(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow [(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)].$

## 1.5. Exercice : short

*[solution* n°2 p.17*]*

Sont ***appelées***

### 1.6. Les quantificateurs

1. Quantificateur universel "∀"
   La relation pour tous $x$ tel que $\mathrm{P(x)}$ est notée : $\forall x, P(x)$ se lit ***quel que soit*** $x, P(x)$.
2. Quatificateur existentiel "∃"
   La relation ***il existe*** un $x$ tel que $P(x)$ est notée: $\exists x, P(x)$.

*Remarque*

Il existe* un et un seul élément $x$ de $E$ c'est à dire un unique $x, P(x)$ est notée : $\exists! x \in E, P(x)$

*Exemple*

1. L'assertion " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant 0$ " est vraie car pour tout réel $x$, on a : $x^2$ est positif.
2. $P(x)$ : la fonction $f$ s'annule en $x_0$ devient
   $P(x) : \exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0.$

*Régles de négations*

1. La négation* de $\forall x \in E, P(x)$ est : $\exists x \in E, \bar{P}(x)$.
2. La négation de $\exists x \in E, P(x)$ est : $\forall x \in E, \bar{P}(x)$.

## 2. Méthodes de raisonnement

Pour montrer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie on peut utiliser ce qui suit :

### 2.1. Méthode de raisonnement direct

On suppose que $P$ est vraie et on démontre que $Q$ l'est aussi.

*Exemple*

Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R} : \left(a = b \Longrightarrow \dfrac{a+b}{2} = b\right)$. Démonstration :

Supposons que : $\forall a, b \in \mathbb{R} : a = b$ et montrons que : $\dfrac{a+b}{2} = b.$

On a :

$$\begin{aligned} a = b &\Longrightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{2} \\ &\Longrightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \\ &\Longrightarrow \frac{a+b}{2} = b. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \left( a = b \Longrightarrow \frac{a+b}{2} = b \right)$$

## 2.2. Méthodes du raisonnement par la contraposée

Sachant que $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$, pour montrer que $P \Rightarrow Q$ on utilise la contraposée, c'est à dire il suffit de montrer que $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ de manière directe, on suppose que $\bar{Q}$ est ***vraie*** et on montre que $\bar{P}$ est ***vraie***.

### *Exemple*

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que si $n^2$ est pair alors $n$ est pair. Démonstration : On cherche à montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $n^2$ est pair $\Longrightarrow$ $n$ est pair. En fait, le raisonnement direct de cette implication est trés difficile. Pour ce motif, on va montrer par la contraposée. On suppose que $n$ est impair et on montre que $n^2$ est impair. On a :

$$\begin{aligned} n \text{ est impair } &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k + 1. \\ &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^2 = (2k+1)^2 \\ &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 4k^2 + 4k + 1. \\ &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1. \\ &\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^2 = 2k' + 1 \left( \text{avec } k' = 2k^2 + 2k \right) \\ &\Longrightarrow n^2 \text{ est impair.} \end{aligned}$$

En définitive :

Si $n^2$ est pair alors $n$ est pair.

## 2.3. Raisonnement par l'absurde

Pour montrer que $R$ est une proposition vraie on suppose que $\bar{R}$ est vrai et on tombe sur une contradiction (quelque chose d'absurde), quand $R : P \Rightarrow Q$ est une implication par l'absurde on suppose que $\bar{R} : R \wedge \bar{Q}$ est ***vraie*** et on tombe sur une ***contradiction***.

### *Exemple*

Montrons que $n^2$ est impair $\Rightarrow$ $n$ est impair. Par contraposée il suffit de montrer que si $n$ est pair $\Rightarrow$ $n^2$ est pair voir l'exemple précédent.

## 2.4. Contre exemple

Pour montrer qu'une proposition est ***fausse*** il suffit de donner ce qu'on appelle un ***contre-exemple*** c'est à dire un cas particulier pour lequel la proposition est fausse.

### *Exemple*

Montrer que : " $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ est premier" est fausse.

Démonstration : Pour montrer que cette assertion est fausse, il faut montrer que sa négation " $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ n'est pas premier" est vraie. En effet, $\exists n = 3 \in \mathbb{N} : 3^2 + 1 = 10$ n'est pas premier.

Conclusion :

L'assertion " $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ est premier" est fausse.

## 2.5. Raisonnement par récurrence

Pour montrer que $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P_n(x)$ est vraie on suit les étapes suivantes :

- On montre que $P\left(n_0\right)$ est vraie, (valeur initiale).
- On suppose que $P(n)$ est vraie à l'ordre $n$
- ( On montre que $P(n+1)$ est vraie à l'ordre $n+1$

Alors $P$ est vrai pour tous $n \geq n_0$.

### *Exemple*

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

- Pour $n = 1, P(1)$ est vaie $1 = \dfrac{1(2)}{2}$.
- On suppose que $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ est vraie.
- On montre que $1+2+\ldots+n+1 = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ est vraie,

$1+2+\ldots+n+1 = 1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

ainsi $P$ est vraie à l'ordre $n+1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ est vraie.

## 2.6. Exercice : Teste des objectifs du premier chapitre

[solution n°3 p.17]

Exercice : trouts

Une assertion* ( proposition ) est une phrase soit ______, soit ______. Pas les deux en même ______.

Exercice

Complétez le tableau suivant :

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
|---|---|---|
| | V | |
| V | | |
| | V | F |
| F | | |

Exercice

Complétez le tableau suivant :

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| V | | |
| V | F | |
| F | V | |
| F | | |

Exercice

Complétez le tableau suivant :

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| V | V | |
| V | | |
| F | | |
| F | F | |

Exercice

Complétez le tableau suivant:

| $P$ | $Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| V | V | |
| V | F | |
| F | V | |
| F | F | |

Exercice

La négation de $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} \ : n \geq m.$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \ : n \geq m.$
- $\exists n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} \ : n \geq m.$
- $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \ : n \geq m.$

Exercice

Pour démontrer $\forall n \in \mathbb{N}^* \ : 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ en

- Méthodes du raisonnement par la contraposée
- Méthode de raisonnement direct
- Raisonnement par récurrence
- Raisonnement par l'absurde
- Contre exemple

# 3. TD N° : 1 Logiques et Raisonnement

*Exercice 1.*

En utilisant* laTV montrer les "lois de Morgan" :

1. $\overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}.$
2. $\overline{P \vee Q} \Longleftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}.$

*Exercice 2.*

- Les assertions* suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier vos réponses.
  1. $((5-2=7) \wedge (1+3 \leq 0)) \vee \overline{(5 \times 6 = 11)}$
  2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: 2x + y > 0.$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0.$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x.$
5. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0.$

- Donner leur négation.

*Exercice 3.*

Montrons que : $13 + 23 + \ldots + (n+1)^3 = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ est vraie.

## 4. Corrigé TD N° : 1 Logiques et Raisonnement

*Correction de l'exercice 1*

1.

| $P$ | $Q$ | $\bar{P}$ | $\bar{Q}$ | $P \wedge Q$ | $\overline{P \wedge Q}$ | $\overline{P \vee \bar{Q}}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V | ***F*** | ***F*** |
| V | F | F | V | F | ***V*** | ***V*** |
| F | V | V | F | F | ***V*** | ***V*** |
| F | F | V | V | F | ***V*** | ***V*** |

2.

| $P$ | $Q$ | $\bar{P}$ | $\bar{Q}$ | $P \vee Q$ | $\overline{P \vee Q}$ | $\bar{P} \wedge \bar{Q}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V | ***F*** | ***F*** |
| V | F | F | V | V | ***F*** | ***F*** |
| F | V | V | F | V | ***F*** | ***F*** |
| F | F | V | V | F | ***V*** | ***V*** |

*Correction de l'exercice 2*

1. $((5-2=7) \wedge (1+3 \leq 0)) \vee \overline{(5 \times 6 = 11)}$
$\overline{(5 \times 6 = 11)}$ c-à-d: $(5 \times 6 \neq 11)$ (cette proposition est vraie)

| $5-2=7$ | $1+3 \leq 0$ | $(5-2=7) \wedge (1+3 \leq 0)$ | $\overline{5 \times 6 = 11}$ | $(A) \vee (B)$ |
|---|---|---|---|---|
| F | F | F | ***V*** | ***V*** |
| | | A | B | |

Donc : est une proposition vraie.
La négation de (1) est : $((5-2 \neq 7) \vee (1+3 > 0)) \wedge (5 \times 6 = 11)$
2. L'inéquation $2x + y > 0$ est vraie car $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\exists y = -2x + 1 \in \mathbb{R}\ : 2x + y > 0$
La négationde de (2) est : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: 2x + y \ \leq 0.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0.$

Cette assertion est fausse car sa négation qui est :
$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0$ est vraie. Par exemple, on peut prendre $x = -5$ et $y = 2$ et alors $-5 + 2 = -3 \leq 0$.

4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$. Cette assertion est vraie. Car : $\exists x = -1 \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > -1$.
   La négationde de (4) est : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 \leq x$.
5. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$.

Cette assertion est fausse car sa négation qui est :

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0$ est vraie. Étant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe toujours un $y \in \mathbb{R}$ tel que $x + y \leq 0$. Par exemple on peut prendre $y = -(x + 1) \in \mathbb{R}$ et alors $x + y = x - x - 1 = -1 \leq 0$.

*Correction de l'exercice 3*

En utilisant $P(n)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&13 + 23 + \ldots + (n+1)^3 \\
&= 13 + 23 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $P(n + 1)$ est vraie, alors $\forall n \in \mathbb{N} : 8n^2 \in \mathbb{N} : 13 + 23 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

## 5. Exercice supplémentaire

[cf. pdf]

# Solutions des exercices

## > **Solution** n°1

Exercice p. 9

| Vraie | Fausse |
| --- | --- |
| $(P \wedge Q)$ est vraie si $P et Q$ le sont toutes les deux.<br><br>On dit que $P \Leftrightarrow Q$ si $P$ et $Q$ ont la même valeur de verité, sinon $(P \Leftrightarrow Q)$ est fausse. | $P \Rightarrow Q$ est fausse si $P$ est vraie et $Q$ est vraie<br><br>L'assertion " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geqslant 0$ " est fausse |

## > **Solution** n°2

Exercice p. 9

Sont ***appelées***

Lois de Morgan

## > **Solution** n°3

Exercice p. 13

Exercice : trouts

Une assertion* ( proposition ) est une phrase soit `vraie`, soit `fausse`. Pas les deux en même `temps`.

Exercice

Complétez le tableau suivant :

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ |
| --- | --- | --- |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

Exercice

Complétez le tableau suivant :

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

Exercice

Complétez le tableau suivant :

| $P$ | $Q$ | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

Exercice

Complétez le tableau suivant:

| $P$ | $Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

Exercice

La négation de $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} \ : n \geq m.$

- ○ $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \ : n \geq m.$
- ○ $\exists n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} \ : n \geq m.$
- ◉ $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \ : n \geq m.$

Exercice

Pour démontrer $\forall n \in \mathbb{N}^* : 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ en

- ○ Méthodes du raisonnement par la contraposée

- ○ Méthode de raisonnement direct
- ◉ Raisonnement par récurrence
- ○ Raisonnement par l'absurde
- ○ Contre exemple

# Glossaire

**assertion**

Toute assertion démontrée vraie est appelée théorème (par exemple le théorème de PYTHAGORE, Thalès...)

# Bibliographie

Cours d'Algèbre I et II avec Exercices Corrigés, Imene Medjadj, U.S.T.O, 2017.

Cours de mathématiques 1, Mounira Melki, UFM, 2023-2024.

K.Allab, Éléments d'analyse: Fonction d'une variable réelle. OPU Alger, (1986).

C. Aslangul, Des mathématiques pour les sciences 2, corrigés détaillés et commentés des exercices et problèmes, De Boeck, Bruxelles (2013).

C.Baba Hamed, K.Benhabib, Algèbre 1: rappels de cours et exercices avec solutions, OPU (1992)

C.Baba Hamed, K.Benhabib, Algèbre 1: rappels de cours et exercices avec solutions, OPU (1992)

G.Christol, Algèbre 1: ensembles fondamentaux arithmétique polynômes, Ellipses Paris, (1995).

F.Cottet-Emard, Analyse tome 1 cours et exercices corrigés, DeBoeck, Bruxelles (2005).

# Webographie

https://les-mathematiques.net/

http://exo7.emath.fr/un.html