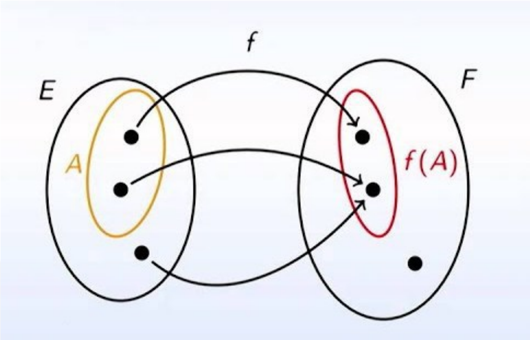
Cours de mathématiques 1



Chapitre 2: Ensembles, Relations binaires et applications

Dr. Abderrahim Guerfi

Université Frères Mentouri Costantine1

Émail:abderrahim.guerfi@umc.edu.dz

5.0
Mars 2024

Table des matières

I Chapitre 2 : Ensembles, Relations binaires et applications

1. objectifs

Les objectifs de ce chapitre sont :

- Identifier toutes les opérations et les relations entre les ensembles.
- Différencier entre une relation d'ordre et une relation d'équivalence.
- Utiliser les propriétés des divers types d'applications

2. Introduction

Dans ce chapitre, nous étudierons les ensembles et les relations binaires ainsi que les applications, ces trois éléments sont parmi les concepts de base et nécessaires en mathématiques

L'étudiant de première année doit bien étudier et absorber ces concepts, afin qu'il puisse étudier et comprendre facilement divers autres concepts mathématiques à tous les niveaux suivants.

3. Généralités sur les ensembles

Définition

On peut définir un ensemble comme la réunion dans une même entité de certains objets bien déterminés. On appelle ces objets les éléments de l'ensemble.

- Il est d'usage de noter un ensemble en utilisant une lettre majuscule A, B, E, F... et un élément en utilisant une lettre minuscule a, b, c,...
- Pour signifier que x est un élément de l'ensemble E, on écrit $x \in E$ et on lit " x appartient à E".
- Si x n'est pas un élément de E, on écrit $x \notin E$ et on dit que " x n'appartient pas à E".
- Si x et y sont deux éléments de E, on notera $x = y$ si ces éléments sont égaux et $x \neq y$ s'ils sont différents

Exemple

1. $\mathbb{N}$ ensemble des nombres entiers naturels.

2. $\mathbb{Z}$ ensemble des nombres entiers relatifs.
3. $\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels.
   On a ,$2 \in \mathbb{N}$, $(-3) \notin \mathbb{N}$, $(2/3) \in \mathbb{Q}$, $(2/3) \notin \mathbb{Z}$, $-2 \neq 3$.

Un ensemble peut se définir de deux manières

- ***Soit en extension*** on dresse la liste de tous les éléments; L'ordre, ainsi qu'une éventuelle répétition des éléments sont sans influence
  ainsi { a, b, c, d } = { b, c, a, d } = { a, b, a, c, d, d }.
- ***Soit en compréhension*** On énonce une propriété caractéristique des éléments de l'ensemble.

Exemple

Considérons l'ensemble A défini en extension par A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }.

Il peut aussi être défini en compréhension par $A = \{ x \in \mathbb{N} / 0 \leq x \leq 9 \}$.

Représentation graphique d'un ensemble

On peut représenter graphiquement un ensemble à l'aide d'un ***diagramme de Venn****.

Exemple

Le diagramme de ***Venn*** de L'ensemble A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } est donné par

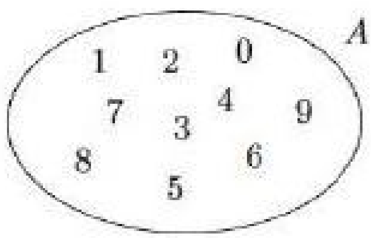


Diagramme de Venn

Cardinal d'un ensemble

Un ensemble E est dit ***fini*** lorsque le nombre d'éléments qui le composent est un entier naturel.

Dans ce cas, le nombre d'éléments est appelé ***le cardinal*** de l'ensemble de E . On le note card(E).

Un ensemble qui n'est pas fini est dit ***infini***.

Exemple

Soit $A = \{ x \in \mathbb{N} / 0 \leq x \leq 10 \}$ est ***fini*** de cardinal card(A) = 11.

4. Relations entre les ensembles

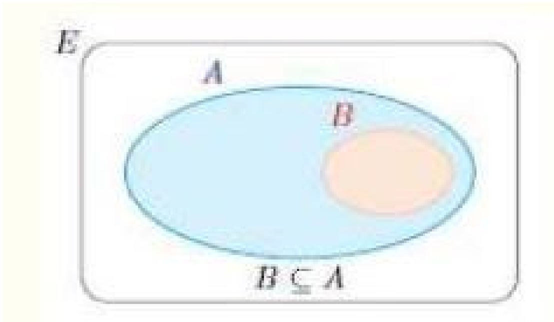
4.1. Inclusion"⊂"

Définition

Un ensemble B est ***inclus*** dans un ensemble A, lorsque tout élément de B appartient à A et on écrit $B \subset A$ ou $B \subseteq A$.

On dit alors que B est un ***sous-ensemble*** de A ou une ***partie*** de A

$(B \subset A) \Leftrightarrow (\forall x \in E : x \in B \Rightarrow x \in A)$.



Inclusion

Exemple

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$,

b) $\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \subset \mathbb{R}$.

Remarque

- Lorsqu'il existe au moins un élément de B n'appartenant pas à A alors B ***n'est pas inclus*** dans A et on écrit $B \not\subset A$
  $(B \not\subset A) \Leftrightarrow (\exists x \in E : x \in B \wedge x \notin A)$.
- Si A et B sont deux ensembles finis et si $B \subset A$ alors $\mathrm{card}(B) \leq \mathrm{card}(A)$.
- Un ensemble est dit ***vide*** lorsqu'il ne contient aucun élément on le note $\varnothing$ ou {}. Par convention $\mathrm{card}(\varnothing)=0$.
- On appelle ***singleton*** un ensemble qui ne contient qu'un seul élément. son cardinal est 1.

Exemple

- $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$ car $(2/3) \in \mathbb{Q}$ et $(2/3) \notin \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{R}^*$ car $0 \in \mathbb{N}$ et $0 \notin \mathbb{R}^*$.

Propriété

soit A un ensemble quelconque, on a, on a $\varnothing \subset A \wedge A \subset A$.

4.2. Egalité "="

Définition

Deux ensembles A et B sont ***égaux*** (ou ***identiques***) si est seulement si ***l'un est inclu dans l'autre*** c'est à dire

$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$

$\Leftrightarrow (\forall x \in E : x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont ***distincts*** et on note $A \neq B$.

Exemple

Soient $A = \{ -3, 3 \}$, $B = \{ x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 = 0 \}$ et $C = \{ -3, 1, 3 \}$ On a $A = B$ et $A \neq C$.

4.3. Ensemble des parties

Définition

Soit E un ensemble, les sous-ensembles de E forment un ensemble appelé ***ensemble des parties*** de E et noté P(E).

Autrement dit, $A \in P(E)$ signifie que $A \subset E$.

Proposition

Si E est un ensemble fini de cardinal n alors l'ensemble P(E) est fini et $\text{card}(P(E)) = 2^n$.

Remarque

Les ensembles Ø et E sont des éléments de P(E) .

Exemple

1. Soit $E = \{ 1, 3, 7 \}$ alors $\text{card}(P(E)) = 2^3 = 8$ et $P(E) = \{ \emptyset, \{ 1 \}, \{ 3 \}, \{ 7 \}, \{ 1, 3 \}, \{ 3, 7 \}, \{ 1, 7 \}, E \}$.
2. Soit $E = \{ a \}$ alors $\text{card}(P(E)) = 2^1 = 2$ et $P(E) = \{ \emptyset, E \}$.
3. Soit $E = \emptyset$ alors $\text{card}(P(E)) = 2^0 = 1$ et $P(E) = \{ \emptyset \}$.

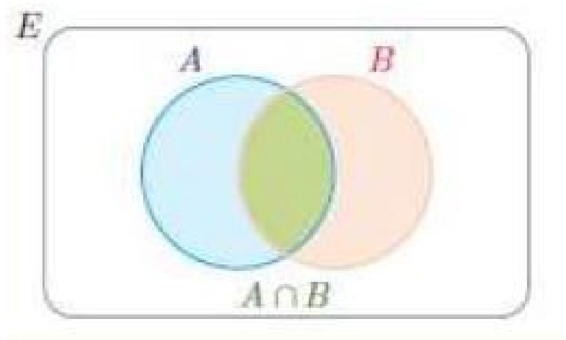
5. Opérations sur les ensembles

5.1. Intersection "∩"

Définition

Soit A et B deux sous-ensembles de E.

L'intersection de A et B notée $A \cap B$ est l'ensemble défini par $A \cap B = \{ x \in E \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$.



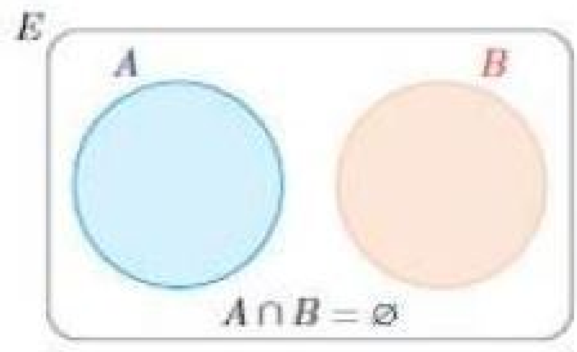
Intersection

Exemple

Soient A = { 2, 4, 6 }, B = { 2, 3, 4, 7} alors A ∩ B = { 2, 4}.

Remarque

Si A ∩ B = Ø alors A et B sont ***disjoints***.



Disjoints

Exemple

Soient A = {2, 4, 6}, C = { 0, 1 } alors A ∩ C = Ø.

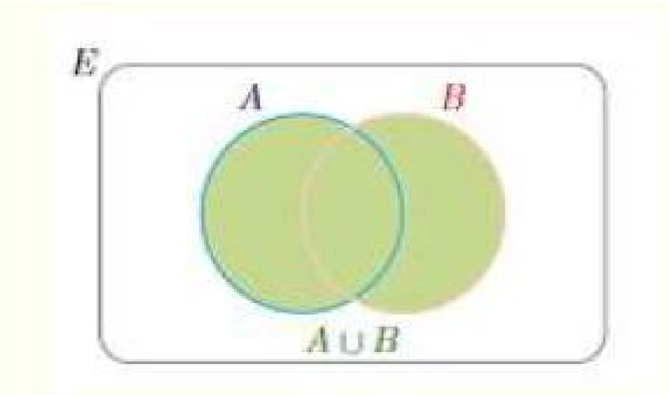
5.2. Réunion "∪"

Définition

Soit A et B deux sous-ensembles de E.

L'union de A et B notée $A \cup B$ est l'ensemble défini par

$A \cup B = \{ x \in E / x \in A \vee x \in B\}$.



Union

Exemple

Soient $A = \{ 2, 4, 6 \}$, $B = \{2, 3, 4, 7 \}$ alors $A \cup B = \{ 2, 3, 4, 6, 7\}$.

Remarque

- $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$.
- $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$.

Propriétés

Soient A, B et C trois parties de E

1. $(A \cap B) \subset A$ et $(A \cap B) \subset B$.
2. $A \subset (A \cup B)$ et $B \subset (A \cup B)$.
3. $(A \cap B) = A \Leftrightarrow A \subset B$ et $(A \cup B) = B \Leftrightarrow A \subset B$.
4. $(A \cap \varnothing) = \varnothing$, $(A \cap A) = A$ et $(A \cap E) = A$.
5. $(A \cup \varnothing) = A$, $(A \cup A) = A$ et $(A \cup E) = E$.
6. Si $(A \cap B) = \varnothing$ et $C \subset B$ alors $A \cap C = \varnothing$.
7. $(A \cap B) = (B \cap A)$ et $(A \cup B) = (B \cup A)$. (la propriété de commutativité)
8. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. (la propriété d'associativité)
9. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.($\cap$ est distributive par rapport à $\cup$).
10. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. ($\cup$ est distributive par rapport à $\cap$)

Proposition

Soient A et B deux sous-ensembles finis de E, on a

$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

Exemple

Soient A = { -1, 0, -2 }, B = { -1, 0, 3, 9 } on a card(A) = 3, card(B) = 4 et $A \cap B$ = { -1, 0 } alors card($A \cap B$) = 2 donc card($A \cup B$)=3 + 4 - 2 = 5.

Corollaire

Soient A et B deux sous-ensembles finis de E, on a

si $A \subset B$ et card(A) = card(B) alors A = B.

Exemple

Soient A = { -1, 1 }, B={ $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 = 0$ } on a $A \subset B$ et card(A) = card(B) alors A = B.

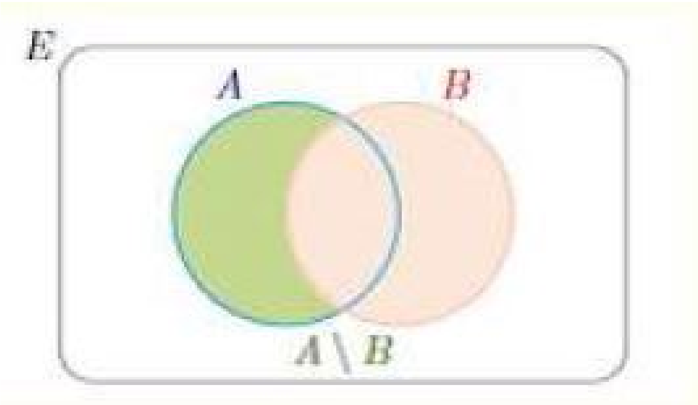
5.3. Différence

Définition

Soit A et B deux sous-ensembles de E.

La différence de A et B notée A\B ou A-B est l'ensemble défini par

$A \backslash B = \{ x \in E \,/\, x \in A \wedge x \notin B \}$.



Différence

Exemple

Soient A = { -1, 0, 2, 8 }, B = { 2, 7, 4 } alors A\B = { -1, 0 }.

Propriétés

Soient A et B deux ensembles, on a

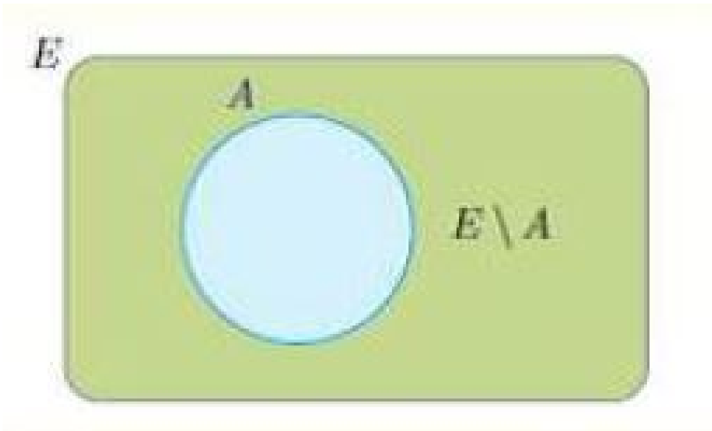
1. $A \backslash A = \emptyset$.
2. $A \backslash \emptyset = A$.
3. $\emptyset \backslash A = \emptyset$.
4. $A \backslash B \subset A$.

5.4. Complémentaire

Définition

Soit A une partie de E , On appelle complémentaire de A dans E le sous ensemble de E notée C_E^A ou A défini par

$C_E^A = \{ x \in E, x \notin A \} = E \backslash A$.



Complémentaire

Exemple

Soient $A = \{ 2, 4 \}$ et $E = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ alors $C_E^A = \{ 1, 3, 5 \}$.

Propriétés

Soient A et B deux sous-ensembles de E, on a

1. $C_E^{\emptyset} = E$, $C_E^E = \emptyset$, $C_E C_E^A = A$..
2. $A \backslash B = A \cap C_E^B$, $A \cap C_E^A = \emptyset$, $A \cup C_E^A = E$.
3. $A \subset B \Rightarrow C_E^B \subset C_E^A$.
4. $C_E^{(A \cap B)} = C_E^A \cup C_E^B$ et $C_E^{(A \cup B)} = C_E^A \cap C_E^B$. "Lois de Morgan".

Corollaire

Si E est un ensemble fini alors pour toute partie A de E

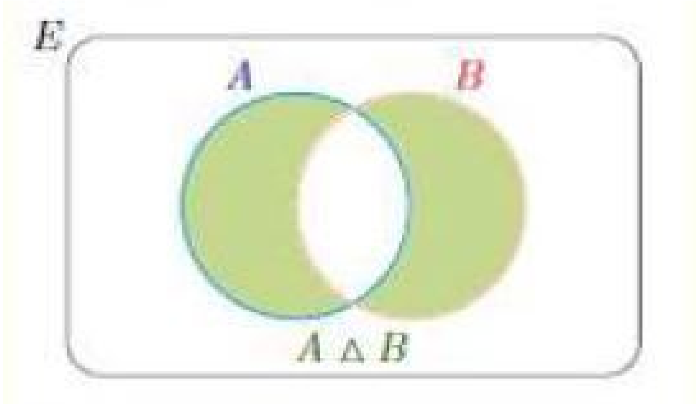
$\text{card}(C_E^A) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$.

5.5. Différence symétrique

Définition

La différence symétrique entre deux ensembles A et B notée $A \triangle B$ est l'ensemble défini par

$A \triangle B = \{ x \in E / (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A)\}$.



Différence symétrique

Exemple

Soient A = { -2, 4, 5, -3 }, B = { 8, 4, 5, 9 } alors $A \triangle B$ = {-2, -3, 8, 9 }.

Propriétés

Soient A et B deux sous-ensembles de E, on a

1. $A \triangle \varnothing = A$, $A \triangle A = \varnothing$.
2. $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. $A \triangle B = B \triangle A$..
4. $(A \triangle B) \triangle c = A \triangle (B \triangle c)$.
5. $A \triangle B = C_E^A \triangle C_E^B$.

5.6. Produit cartésien

Définition

Soient E et F deux ensembles, On appelle produit cartésien de E et F noté $E \times F$ l'ensemble des couples défini par

$E \times F = \{ (x,y), x \in E \wedge y \in F \}$.

Proposition

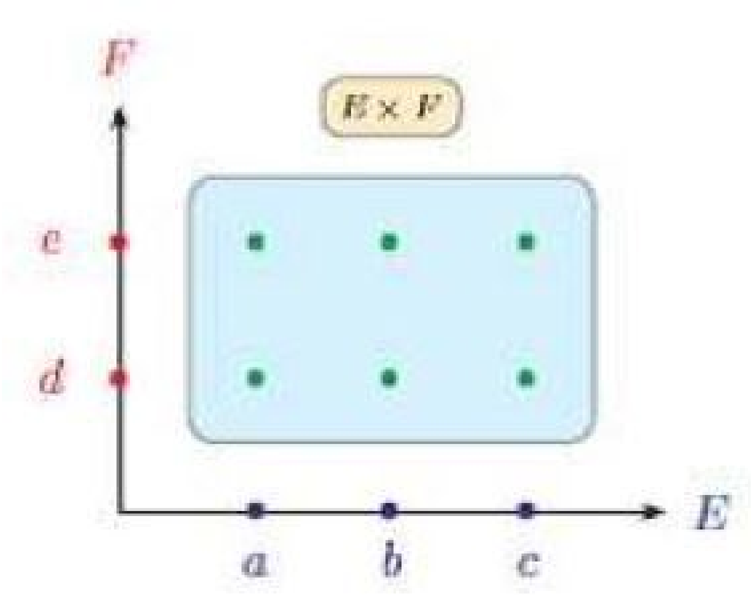
Soient E et F deux ensembles finis, on a

card($E \times F$) = card(E) $\times$ card(F).

Exemple

Soient E = { a, b, c } et F = { d, e } on a $E \times F$ = { (a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e) }. et card($E \times F$) = 6 = 3 $\times$ 2 = card(E) $\times$ card(F).

Ci-dessous, sont représentés : en bleu les éléments de E, en rouge les éléments de F, en vert les éléments de $E \times F$.



produit cartésien

Propriétés

Soit A, B deux sous-ensembles de E.

1. $A \times B \neq B \times A$.
2. $A \times \varnothing = \varnothing$, $\varnothing \times A = \varnothing$.

✎ *Remarque*

- $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2)$. .
- $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i , i=1,n \}$
- $(A_1 = A_2 \ldots = A_n) \Rightarrow (A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n = A^n)$.

6. Relations binaires

6.1. Définitions

- De façon informelle, une relation binaire sur un ensemble non-vide E est une proposition qui lie entre eux certain éléments de cet ensemble.
- Plus proprement,une relation binaire R sur un ensemble non-vide E est définie par une partie G de E×E.
- Si (x, y) ∈ G, on dit que x est en relation avec y et on le note "xRy"
- Le graphe de la relation R est l'ensemble G défini par G = {(x, y) ∈ E×E | xRy}.

Exemple

1. L'inégalité est une relation binaire sur ℕ, ℤ ou ℝ.
2. Le parallélisme et l'orthogonalité sont des relations binaires sur l'ensemble des droites du plan ou de l'espace.
3. L'inclusion "⊂" est est une relation binaire sur P(E) qui est définie par
   ∀A, B ∈ P(E) : ARB ⇔ A ⊂ B.

Propriétés

Soit R une relation binaire définie sur un ensemble non-vide E.

1. La relation R est dite ***réflexive*** si : ∀x ∈ E, xRx.
2. La relation R est dite ***symétrique*** si: ∀(x, y) ∈ E^2, xRy ⇒ yRx.
3. La relation R est dite ***anti-symétrique*** si : ∀(x, y) ∈ E^2, (xRy ∧ yRx) ⇒ x = y.
4. La relation R est dite ***transitive*** si: ∀(x, y, z) ∈ E^3, (xRy ∧ yRz) ⇒ xRz.

Exemple

1. La relation d'égalité " = " définie sur ℝ est réflexive, symétrique, transitive et anti-symétrique.
2. La relation " < " est transitive , mais elle n'est pas ni réflexive ,ni symétrique .

Remarque

R est anti-symétrique ne signifie pas que R est symétrique.

6.2. Relation d'équivalence

Définition

La relation binaire R est appelée une ***relation d'équivalence*** sur E si elle est à la fois ***réflexive***, ***symétrique*** et ***transitive***.

Exemple

- La relation d'égalité " = " définie sur ℝ est une relation d'équivalence
  En effet : on a

  1. R est réflexive car : ∀x ∈ ℝ, x = x d'ou ∀ x ∈ ℝ, xRx.
  2. R est symétrique car: ∀(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$, xRy ⇔ x = y ⇒ y = x ⇔ yRx.

3. R est transitive car: $\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(xRy \wedge yRz) \Leftrightarrow (x = y \wedge y = z) \Rightarrow (x = z) \Leftrightarrow xRz$..

- La relation de ***parallélisme*** sur l'ensemble des droites du plan ou de l'espace est une relation d'équivalence.
- La relation "<" définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est pas réflexive, En effet : si par exemple $x = -3$ on a $-3 \nless -3$.

Classes d'équivalence

Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble non-vide E

- pour tout $x \in E$, on appelle classe d'équivalence de x modulo R l'ensemble noté $C_R(x)$, $\dot{x}$ ou $\bar{x}$ défini par $C_R(x) = \{ y \in E \mid xRy \}$.
- Si $y \in C_R(x)$ on dit que y est un représentant de $C_R(x)$.
- On appelle ensemble quotient de E par R et on note E/R l'ensemble défini par $E/R = \{ C_R(x) \mid x \in E\}$.

Exemple

Soit la relation R définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x, y \in \mathbb{R} : xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$.

Montrons que R est une relation d'équivalence et déterminons l'ensemble $\mathbb{R}/R$

1. R est réflexive ? on a: $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 = x^2$ d'où $\forall x \in \mathbb{R} : xRx$. donc R est réflexive.
2. R est symétrique ? on a: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow yRx$. donc R est symétrique.
3. R est transitive ? on a: $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(xRy \wedge yRz) \Leftrightarrow (x^2 = y^2 \wedge y^2 = z^2) \Rightarrow (x^2 = z^2) \Leftrightarrow xRz$. donc R est transitive.
   Par conséquent: R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminons l'ensemble quotient $\mathbb{R}/R$
   Soit $x \in \mathbb{R}$, cherchons $y \in \mathbb{R}$, telque yRx
   on a $yRx \Rightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (y - x)(y + x) = 0 \Leftrightarrow (y = x) \vee (y = -x)$ Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $C_R = \{ -x, x \}$
   Ainsi $\mathbb{R}/R = \{ \{ -x, x \} \mid x \in \mathbb{R} \}$.

Propriétés:

1. $\forall x, y \in E : (C_R(x) = C_R(y)) \vee (C_R(x) \cap C_R(y) = \emptyset)$.
2. $\forall x, y \in E : (C_R(x) = C_R(y)) \Leftrightarrow xRy$.
3. Les classes d'équivalence forment une partition de E: $E = \bigcup_{x \in E} C_R(x)$

6.3. Relation d'ordre

Définition

La relation binaire R définie sur l'ensemble non vide E est appelée une ***relation d'ordre*** si elle est à la fois ***réflexive***, ***anti-symétrique*** et ***transitive***.

Exemple

- La relation "≤" définie sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre. En effet

1. R est réflexive ? on a : $\forall$ x $\in \mathbb{R}$: x $\leq$ x Alors $\forall$ x $\in \mathbb{R}$: xRx. donc R est réflexive.
2. R est anti-symétrique ? on a: $\forall$ (x, y) $\in \mathbb{R}^2$, (xRy $\wedge$ yRx) $\Leftrightarrow$ (x $\leq$ y $\Leftrightarrow$ y $\leq$ x) $\Rightarrow$ x = y. donc R est symétrique.
3. R est transitive ? on a : $\forall$ (x, y ,z) $\in \mathbb{R}^3$, (xRy $\wedge$ yRz) $\Leftrightarrow$ (x $\leq$ y $\wedge$ y $\leq$ z) $\Rightarrow$ (x $\leq$ z) $\Leftrightarrow$ xRz. donc R est transitive.

Par conséquent: "≤" est une relation d'ordre sur ℝ

- La relation "<" définie sur ℝ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas réflexive.

✎ *Remarque*

La relation d'ordre souvent notée "≤", On dit alors que (E, ≤) est un ensemble ordonnée.

Ordre totale ou ordre partiel

Soit (E, ≤) est un ensemble ordonnée.

- Soient deux élément x, y ∈ E, on dit que x et y sont comparables si x ≤ y ou y ≤ x.
- on dit que " ≤ " est une relation d'ordre totale (ou E est totalement ordonné par ≤) si ∀ x, y ∈ E, x ≤ y ou y ≤ x.
- S'il existe au moins deux éléments non comparables,c'est à dire ∃ x, y ∈ E, x $\not\leq$ y ou y $\not\leq$ x. on dit que "≤" est une relation d'ordre partielle (ou E est partiellement ordonné par ≤).

Exemple

La relation "≤" définie sur ℝ est une relation d'ordre totale car ∀ x, y ∈ ℝ, x ≤ y ou y ≤ x.

7. Applications

7.1. Définitions et notations

Soient E et F deux ensembles non vide (E ≠ Ø et F ≠ Ø) on dit que f est une application de E vers F si est seulement si

$\forall x \in E, \exists! y \in F / y = f(x)$

et on écrit :

$$\begin{array}{l} f : E \to \quad F \\ \quad x \quad \to f(x) = y \end{array}$$

ou

$f : x \in E \mapsto y = f(x) \in F$

- E est appelé ***l'ensemble de départ*** et F est appelé ***l'ensemble d'arrivée***.
- y est ***l'image*** de x par f et x est ***l'antécédent*** de y par f.
- On note souvent l'application par : f, g, h,...,et l'ensemble des applications de E dans F par *F*(E,F)

Graphe de f

On appelle le graphe de l'application f, le sous ensemble de E×F noté *G* et défini par

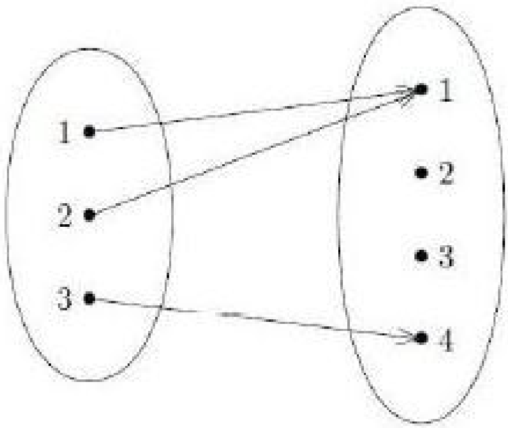
$G = \{ (x, y) \in E \times F / y = f(x) \}$.

Remarque

Il important de ne pas confondre entre f qui désigne l'application et f(x) qui est l'image de x par f.

Exemple

On définit une application f en prenant, E = { 1, 2, 3 }, F = { 1, 2, 3, 4 } et f(1) = f(2) = 1, f(3) = 4



Remarque

Soit E un ensemble non vide (E ≠ Ø), l'application défini par $Id_E : x \in E \to x \in E$

s'appelle ***l'identité*** de E.

7.2. Relations entre les applications

Soient $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux applications

On dit que f et g sont égaux ou identiques et on note $f = g$ ou $f \equiv g$ si est seulement si : $E = G \wedge F = H$ et $\forall x \in E : f(x) = g(x)$

Exemple

Soient

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = \sin(2x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to g(x) = 2\sin(x)\cos(x) \end{aligned}$$

on a f = g.

7.3. Opérations sur les applications

- ***Addition:*** Soient $f : E \to F$ et $g : E \to F$ deux applications. L'application $f + g$ est définie par :
  $$\begin{aligned} f+g : E &\to F \\ x &\to (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{aligned}$$
- ***Produit:*** Soient $f : E \to F$ et $g : E \to F$ deux applications. L'application $f \times g$ est définie par :
  $$\begin{aligned} f \times g : E &\to F \\ x &\to (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \end{aligned}$$
- ***Composition:*** Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. La composée de f par g, noté $g \circ f$ est l'application de E vers G définie par ($\forall x \in E$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$) : c'est à dire
  $$\begin{aligned} g \circ f : E &\to G \\ x &\to (g \circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

Remarque

La composition des applications ***n'est pas commutative***. c'est à dire $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemple

Soient $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*_+$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = (1/x)$ et $g : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}^*$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $g(x) = 1 + x^2$,

on a .$g \circ f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tel que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 + (1/(x^2))$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

D'autre part, on a $f \circ g : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}^*_+$ tel que $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (1/(1+x^2))$, $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$

on voit que $g \circ f \neq f \circ g$..

Propriétés

1. Si $f : E \to F$ est une application, alors $Id_F \circ f = f = f \circ Id_E$.

2. Si $h : G \to H$ est une application, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, on dit que :" ∘ "est ***associative***.

7.4. Image directe, image réciproque

Image directe:

Soit $f : E \to F$ une application et $A \subset E$

On appelle image directe de A par f le sous ensemble de F défini par $f(A) = \{ f(x) / x \in A \} \subset F$.

Exemple

1. Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x -1$, $f([0, 1]) = ?$
   on a : $f([0, 1]) = \{ f(x) / x \in [0, 1] \}$,
   mais $x \in [0, 1] \Leftrightarrow 0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le 2x \le 2 \Rightarrow -1 \le 2x -1 \le 1 \Rightarrow -1 \le f(x) \le 1$.
   Alors $f([0, 1]) = [-1, 1]$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ définie par $\forall x\in \mathbb{R}, f(x) = | x |$. $f(\mathbb{Z}) = ?$, $f(\mathbb{R}_-) = ?$
   On a $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$ et $f(\mathbb{R}_-) = \mathbb{R}_+$.

Remarque

$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A : f(x) = y$.

Image réciproque:

Soit $f : E \to F$ une application et $B \subset F$.

On appelle image réciproque de B par f le sous ensemble de E défini par

$f^{-1} (B) = \{ x \in E / f(x) \in B \} \subset E$.

Exemple

1. Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$, et soit $B =\{ 1/9 \} \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(B) = ?$ on a: $f^{-1}(B) = \{ x \in \mathbb{R} / f(x) \in B\}$, mais $f(x) \in B \Rightarrow f(x) = (1/9) \Rightarrow x^2 = (1/9) \Rightarrow x = \pm(1/3)$. Alors $f^{-1}(B) = \{ -(1/3), (1/3)\}$.
2. Soit $f : [0, 5] \to [0, 5]$ définie par $\forall x \in [0, 5], f(x) = 5 - x$. et soit $B =] 1, 3 [\subset [0, 5]$, $f^{-1}(B) = ?$
   On a : $f^{-1}(B) = \{ x \in [0, 5] / f(x) \in B\}$, mais $f(x) \in B \Rightarrow 1 < f(x) < 3 \Rightarrow 1 < 5 - x < 3 \Rightarrow -4 < -x < -2 \Rightarrow 2 < x < 4$, alors $x \in] 2, 4 [\Rightarrow f^{-1}(B) =] 2, 4 [$.

Remarque

$\forall x \in E : x \in f^{-1} (B) \Leftrightarrow f (x) \in B$.

Propriétés

Soient $f : E \to F$ une application, $A, B \subset E$ et $C, D \subset F$.

on a:

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
4. $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.
5. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
6. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

7.5. Injection, surjection, bijection

Injection

Soient E et F deux ensembles.

Une application $f : E \rightarrow F$ est injective(ou une injection) si : $\forall\, x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$..

ou par contraposition $\forall\, x_1, x_2 \in E : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Exemple

L' application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x) = 3x + 5$ est injective.

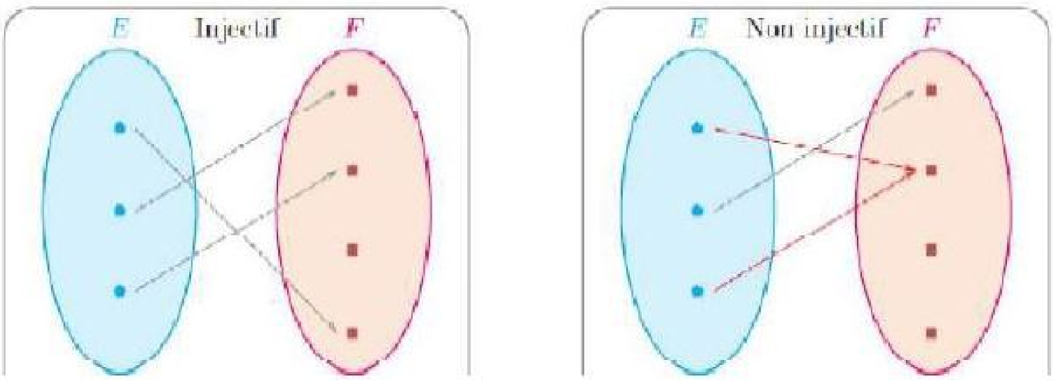
En effet $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1 + 5 = 3x_2 + 5 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Donc $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Alors f est injective.

Remarque

Une application $f : E \rightarrow F$ n'est pas injective si :

$\exists\, x_1, x_2 \in E : x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$.



Injection

Exemple

L'application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $\forall\, x \in \mathbb{R} : g(x) = x^2$ n'est pas injective.

Car si on prend par exemple $x_1 = 3$ et $x_2 = -3$, on a $x_1 \neq x_2$ et $g(x_1) = g(x_2) = 9$.

Donc g n'est pas injective.

Surjection

Soient E et F deux ensembles.

Une application f : E → F est surjective(ou une surjection) si :

$\forall$ y ∈ F,$\exists$ x ∈ E : y = f(x).

Exemple

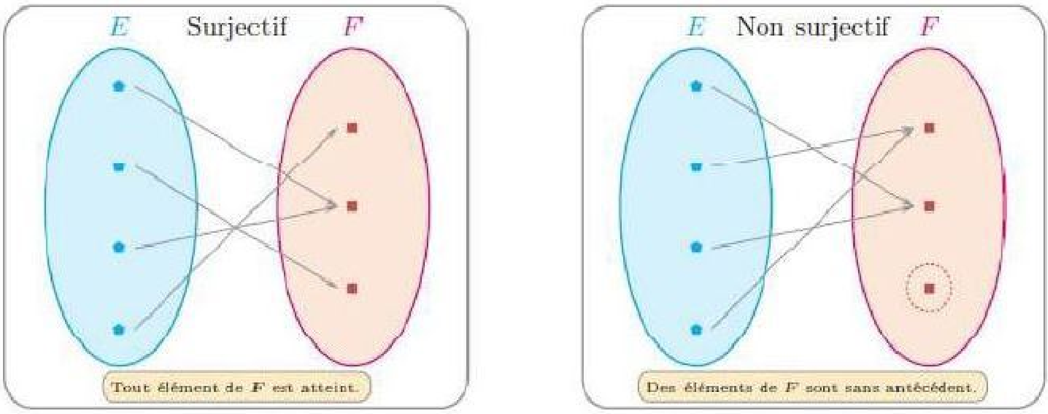
L'application f : ℝ → ℝ définie par $\forall$ x ∈ ℝ : f(x) = x^3 est surjective.

En effet pour tout y ∈ ℝ on cherche x tel que y = f(x). on a f(x) = y ⇒ x^3 = y ⇒ x = $y^{(1/3)}$.

Donc f est surjective.

Remarque

Une application f : E → F n'est pas surjective si : $\exists$ y ∈ F,$\forall$ x ∈ E : y ≠ f(x).



Surjection

Exemple

L'application g : ℤ → ℕ définie par $\forall$ x ∈ ℤ : g(x) = x^2 n'est pas surjective.

Car si on prend par exemple y = 3 on a g(x) = y ⇒ x^2 = 3 ⇒ x = ± $\sqrt{3}$.

mais $\sqrt{3}$ ∉ ℤ, Alors y = 3 n'as pas d'antécédent par g. Donc g n'est pas surjective.

Bijection

Soient E et F deux ensembles.

Une application f : E → F est bijective (ou une bijection) si :

$\forall$y ∈ F,$\exists$! x ∈ E : y = f(x).

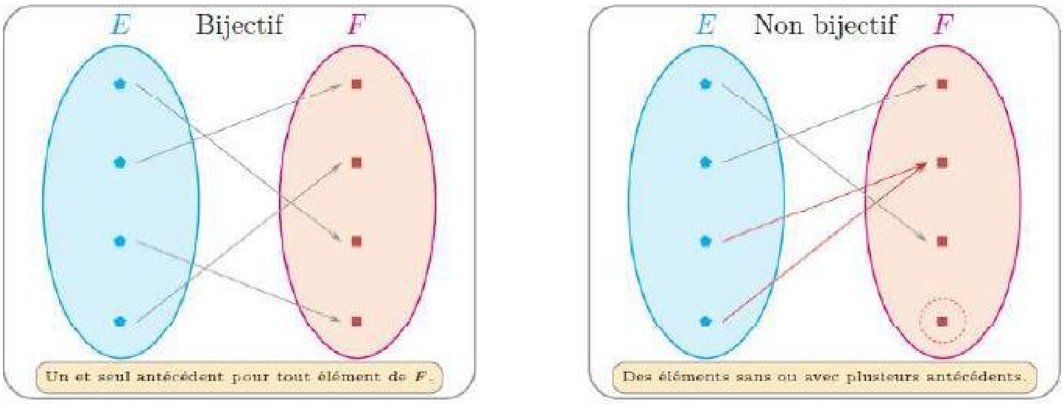
Autrement dit : f est bijective ⇔f est injective et surjective.

Exemple

- L'application f : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall$ x $\in \mathbb{R}$: f(x) = 3x + 5 est bijective.
  En effet: on déjà montré précédemment que f est injective, Alors il suffit de vérifier que f est surjective c'est à dire pour tout y $\in \mathbb{R}$ on cherche x tel que y = f(x). ona f(x) = y $\Rightarrow$ 3x + 5 = y $\Rightarrow$ x = ((y - 5) / 3). Donc f est surjective.
  Par conséquent: f est injective et surjective donc f est bijective
- L'application g : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, g(x) = x^2 n'est pas bijective.
  Car si on prend par exemple x_1 = 4 et x_2 = -4 on a $x_1 \neq x_2$ et g(x_1) = g(x_2) = 16 alors g n'est pas injective.
  et donc g n'est pas bijective.

Remarque

f est bijective $\Leftrightarrow$ l'équation y = f(x) admet une solution unique.



Bijection

Proposition

Soient E ,F et G trois ensembles.

et soient f : E $\rightarrow$ F et g : F $\rightarrow$ G deux applications.

on a les propriétés suivantes:

1. Si f et g sont injectives alors g $\circ$ f est injective.
2. Si f et g sont surjectives alors g $\circ$ f est surjective.
3. Si g $\circ$ f est injective alors f est injective.
4. Si g $\circ$ f est surjective alors g est surjective.

7.6. Application réciproque

Définition

Soient E , F deux ensembles et f : E $\rightarrow$ F une application bijective

on appelle application réciproque de f (ou une bijection réciproque de f) l'application f^{-1} : F $\rightarrow$ E définie par :

$\forall$ y $\in$ F, x = f^{-1} (y) si y = f(x).

Exemple

Soit l'application $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$

f est bijective et sa bijection réciproque est l'application $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $\forall y \in \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Remarque

les représentations graphiques de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Proposition

Soit $f : E \to F$ une application

- Si f est bijective alors son application réciproque f^{-1} est elle même bijective et vérifie:

$(f^{-1})^{-1}= f$, $f^{-1} \circ f = Id_E$, $f \circ f^{-1} =Id_F$.

- S'il existe une application $g : F \to E$ telle que :
  $g \circ f = Id_E$, $f \circ g = Id_F$.
  Alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Proposition

Soient E ,F et G trois ensembles.

et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

- Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Conseil

Pour plus d'explications et de clarification sur Ensembles et applications, vous pouvez regarder cette vidéo.

Cf. "Ensembles et applications"

8. séries TD Corrigé avec des exercices supplémentaires

[cf. Série TDN°2-Première Partie Ensembles][cf. Série TDN°2 -Relations Binaires Et Applications]

Pour des exercices supplémentaires voire*

9. Exercice

[solution n°1 p.26]

Répondre par vrai ou faux aux assertions suivantes :

Exercice

- $\{ 5 \} \cup \{ 5 \} = \{ (5, 5) \}$.

- Vrai
- Faux

Exercice

- $\{ 3 \} - \{ 3 \} = \{ 0 \}$.

- Vrai
- Faux

Exercice

- $\{ 2 \} \times \{ 7 \} = \{ 14 \}$.

- Vrai
- Faux

Exercice

- $\varnothing \subset \{ \varnothing \}$.

- Vrai
- Faux

10. Exercice

[solution n°2 p.26]

La relation "≤" définie sur ℝ

la relation d'orthogonalité " ⊥ "sur l'ensemble des droites du plan ou de l'espace .

La relation "<" définie sur ℝ

le parallélisme " ∥ "sur l'ensemble des droites du plan.

la relation $d'inclusion \subset sur$ les parties d'un ensembles.

La relation d'égalité "=" définie sur ℝ

Relation d'équivalence	Relation d'ordre	Ni relation d'équivalence ni relation d'ordre

11. Exercice : Complète les phrases suivantes.

[solution n°3 p.27]

- f est bijective ⇔f est ____________ et ____________.
- Si g∘f est injective alors ____________ est injective.
- Si g∘f est surjective alors ____________ est surjective

Solutions des exercices

> **Solution** n°1

Exercice p. 24

Exercice

- $\{ 5 \} \cup \{ 5 \} = \{ (5, 5) \}$.

○ Vrai

◉ Faux

Exercice

- $\{ 3 \} - \{ 3 \} = \{ 0 \}$.

○ Vrai

◉ Faux

Exercice

- $\{ 2 \} \times \{ 7 \} = \{ 14 \}$.

○ Vrai

◉ Faux

Exercice

- $\varnothing \subset \{ \varnothing \}$.

◉ Vrai

○ Faux

> **Solution** n°2

Exercice p. 25

Relation d'équivalence	**Relation d'ordre**	**Ni relation d'équivalence ni relation d'ordre**
La relation d'égalité "=" définie sur ℝ	La relation "≤" définie sur ℝ	La relation "<" définie sur ℝ
le parallélisme " ∥ "sur l'ensemble des droites du plan.	la relation $d'inclusion \subset sur$ les parties d'un ensembles.	la relation d'orthogonalité " ⊥ "sur l'ensemble des droites du plan ou de l'espace .

> **Solution** n°3

Exercice p. 25

- f est bijective ⇔f est `injective` et `surjective`.
- Si g∘f est injective alors `f` est injective.
- Si g∘f est surjective alors `g` est surjective

Glossaire

diagramme de Venn

Le diagramme de Venn est un outil visuel utilisé en mathématiques pour représenter les relations entre différents ensembles.

Bibliographie

[3] Mounira Melki, Cours de mathématique 1 de première année licence(L 1) sciences de La matière, université frères Mentouri Constantine 1 (2023/2024).

[2] T.Houmor, Cours et exercices avec solutions de première année licence mathématique, université frères Mentouri Constantine 1.

[1] C.Baba Hamed, K.Benhabib, Algèbre 1 : rappels de cours et exercices avec solutions, OPU {1992).

[4] J-M Monier, Algebre 1 : cours et 600 exercices corriges, 2eme Ed., Dunod Paris (2000).

Webographie

http://exo7.emath.fr/un.html

http://www. les-mathématiques. net/