Cours mathématiques 1

Chapitre 1 :Logique et raisonnements

Dr. Abderrahim Guerfi

Université Frères Mentouri Costantine1

Email : abderrahim.guerfi@umc.edu.dz

5.0

Mars 2024

Table des matières

I chapitre 1 : Logique et raisonnements

1. Objectifs

Les objectifs de ce chapitre sont :

- Connaître les concepts fondamentaux de la logique.
- Utiliser les différents types de raisonnements de base.
- Appliquer le type de raisonnement approprié dans les exercices.

2. Introduction

Dans ce chapitre nous allons étudier les principes de base de la logique formelle, tels que la valeur de vérité, la table de vérité, les opérateurs logiques...

Et aussi, nous allons étudions quelques types de raisonnement.

3. Notions de logique

3.1. Assertion

Définition

Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse. Pas les deux en même temps.

Exemple

1. " $2 + 3 = 5$" est un énoncé qu'on peut jugé sans ambiguïté qu'il est vrai, donc c'est une assertion vraie.
2. " 8 est un nombre impair" est une assertion fausse.

Notation

- On note par P une assertion.
- On associe à chaque assertion P une valeur s'appelle "***Valeur de vérité****" qui est vrai ou faux .
- la valeur de vérité "***vrai***" est noté par "***V***" et la valeur de vérité " ***faux*** " est noté par "***F***".

  Et on résume ceci dans une table s'appelle ***"table de vérité**** " .

P
V
F

3.2. Connecteurs logiques

À partir d'une assertion ou plusieurs assertions, on peut définir de nouvelles assertions au moyen de connecteurs logiques comme la négation, la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence.

Soient P et Q deux assertions

1) ***Négation*** " $\rceil$"

La négation de l'assertion P est l'assertion notée $\rceil P$ ou $\overline{P}$ ou ***non*** P, qui est vraie quand P est fausse et qui est fausse quand P est vraie

la table de vérité de l'assertion P est donnée par

P	$\rceil P$
V	F
F	V

Exemple

La négation de l'assertion " $3<2$ " est l'assertion vraie " $3\geq 2$ ".

2) Conjonction "$\wedge$"

La conjonction de deux assertions P,Q est l'assertion notée $P\wedge Q$ ou "P et Q" qui n'est vraie que si P et Q sont vraies toutes les deux.

La table de vérité de l'assertion P∧Q est donnée par

P	Q	P∧Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple

L'assertion "$2^4 = 16$ et $4^2 = 16$" est vraie car les deux assertions "$2^4 = 16$ " et "$4^2 = 16$" sont vraies toutes les deux.

3) Disjonction "∨"

la disjonction de deux assertions P, Q est l'assertion notée P∨Q ou "P ou Q" qui n'est fausse que si Pet Q sont fausses toutes les deux.

La table de vérité de l'assertion P∨Q est donnée par

P	Q	P∨Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple

L'assertion "$8 > 8$ ou $8 \neq 8$" est fausse car les deux assertions "$8 > 8$" et "$8 \neq 8$" sont fausses toutes les deux.

4) Implication "⇒"

L'implication de P par Q est l'assertion notée P⇒Q qui n'est fausse que si P est vraie et Q est fausse.

La table de vérité de l'assertion P⇒Q est donnée par

P	Q	P⇒ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple

L'assertion "$4^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow 5 = 5$" est vraie car les deux assertions "$4^2 + 3^2 = 5^2$" et "$5 = 5$" sont vraies toutes les deux.

Remarque

- L'implication Q⇒P s'appelle la réciproque de P⇒Q.
- L'implication Q⇒P s'appelle la contraposée de P⇒Q.

5) Equivalence " ⇔ "

L'équivalence de deux assertions P et Q est l'assertion notée $P \Leftrightarrow Q$ qui n'est vraie que si P et Q sont vraies simultanément ou fausses simultanément.

La table de vérité de l'assertion $P \Leftrightarrow Q$ est donnée par

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple

L'assertion "3 est premier ⇔ 2 est pair" est vraie car les deux assertions "3 est premier" et " 2 est pair" sont vraies simultanément

3.3. Propriétes

Soient P et Q deux assertions, on a:

- $P \Leftrightarrow P$.
- $\rceil(\rceil P) \Leftrightarrow P$.
- $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$ et $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$ (Commutativité).
- $\rceil(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\rceil P \vee \rceil Q)$ et $\rceil(P \vee Q) \Leftrightarrow (\rceil P \wedge \rceil Q)$ Sont appelées "lois de Morgan".
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\rceil P \vee Q)$.
- $\rceil(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \rceil Q)$.
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\rceil Q \Rightarrow \rceil P)$.
- $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$.

3.4. Quantificateurs

Une assertion P peut dépendre d'un paramètre x par exemple " $x^2 \geq 5$ "

L'assertion P(x) est vraie ou fausse selon les valeurs de x.

A. Quantificateur Universel "∀ "

Si l'assertion P(x) est vraie pour tous les éléments x de l'ensemble non-vide E,

On écrit "$\forall x \in E : P(x)$" qui se lit comme suit "quel que soit x appartenant à E, P(x) est vraie".

Exemple

L'assertion "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$" est vraie car pour tout réel x, on a : x^2 est positif.

B. Quantificateur Existentiel " ∃ "

s'il existe au moins un élément x de E tel que P(x) est vraie, On écrit " $\exists x \in E : P(x)$ " qui se lit comme suit " il existe au moins un élément x dans E, tel que P(x) est vraie ".

- Si nous voulons dire qu'il existe un unique élément x de E qui vérifie P(x), On écrit "$\exists! x \in E : P(x)$".
  Le symbole " ∃! " s'appelle " ***le quantificateur d'existence et d'unicité*** ".

Exemple

1. L'assertion " $\exists\, x \in \mathbb{R} : x - 3 > 0$ " est vraie car si on prends par exemple $x = 5$ on a : $5 - 3 = 2 > 0$.
2. L'assertion " $\exists!\, x \in \mathbb{R} : x + 1 = 0$ " est vraie car on a une seule solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x + 1 = 0$ qui est : $x = -1$.

C. Négation des quantificateurs

1. La négation de " $\forall\, x \in E : P(x)$ " est " $\exists\, x \in E : \urcorner P(x)$ ".
2. La négation de " $\exists\, x \in E : P(x)$ " est " $\forall\, x \in E : \urcorner P(x)$ ".

Exemple

1. La négation de l'assertion " $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ " est " $\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$ ".
2. La négation de l'assertion " $\exists\, x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 = 0$" est " $\forall\, x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 \neq 0$ ".
3. La négation de l'assertion " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, y > 0 : x+y > 20$ " est " $\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall y > 0 : x + y \leq 20$ ".

Remarque

L'ordre des quantificateurs est très important .

Exemple

Les deux assertions " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R} : x + y > 0$ " et " $\exists\, y \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R} : x + y > 0$ " sont différents.

Pour la première, on peut prendre par exemple $y = 1 - x$, donc c'est une assertion vraie.

Par contre, la deuxième est fausse, Cela ne peut être le même y qui convient pour tout les x.

4. Types de raisonnements

4.1. Raisonnement direct

L'énoncé d'un résultat est souvent de la forme $P \Rightarrow Q$ (des hypothèses impliquent une conclusion).

D'après la table de vérité de l'implication, pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie, il suffit de montrer que si P est une assertion vraie alors l'assertion Q est vraie aussi.

En pratique, on suppose que P soit vraie et au terme d'un raisonnement on montre que Q est vraie.

Exemple

Montrer que: $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$: a =b $\Rightarrow$ ((a + b) / 2) = b.

Démonstration

Supposons que : $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$: a = b et montrons que : ((a + b) / 2) = b

on a :

a = b $\Rightarrow$ (a / 2) = (b / 2)

$\Rightarrow$(a/2) + (b/2) = (b/2) + (b/2)

$\Rightarrow$((a + b) / 2) = b

Par conséquent: $\forall$a, b $\in \mathbb{R}$: a = b $\Rightarrow$ ((a + b) / 2) = b.

4.2. Raisonnement par contraposée

Pour prouver une implication P$\Rightarrow$Q, il est équivalent de montrer l'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ (la contraposée de P$\Rightarrow$Q)

On suppose alors $\overline{Q}$ soit vraie et on montre que $\overline{P}$ est vraie.

L'intérêt d'utiliser cette méthode réside dans le fait que dans de nombreux cas la contraposée d'une implication est plus facile à prouver que l'implication.

Exemple

Soit n $\in \mathbb{N}$, montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

Démonstration

On cherche à montrer que pour tout n $\in \mathbb{N}$: n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair .

En fait, le raisonnement direct de cette implication est très difficile, Pour ce motif on va montrer par la contraposée

On suppose que n est impair et on montre que n^2 est impair

On a:

n est impair $\Rightarrow \exists$ k $\in \mathbb{N}$: n = 2k + 1

$\Rightarrow \exists$k $\in \mathbb{N}$: n^2 = (2k + 1)^2

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : n^2=4k^2+4k+1$

$\Rightarrow \exists k\in\mathbb{N} : n^2= 2 (2k^2 + 2k) +1$

$\Rightarrow \exists\ k \in \mathbb{N} : n^2 = 2k' +1$ avec $k' = 2k^2 + 2k$

$\Rightarrow n^2$est impair.

En définitive: si n^2 est pair alors n est pair.

4.3. Raisonnement par contre-exemple

Ce raisonnement sert à montrer qu'une assertion de la forme " $\forall x \in E : P(x)$ " est fausse, Pour ce-là on montre que sa négation " $\exists\ x \in E : \overline{P(x)}$ " est vraie.

On cherche un élément x de E pour lequel $\overline{P(x)}$ est vraie

Notons que l'élément x qu'on va cherché de E pour lequel P(x) soit fausse est considéré comme exemple de l'assertion " $\exists\ x \in E : \overline{P(x)}$ " et comme étant contre-exemple de l'assertion " $\forall\ x \in E : P(x)$ "

Exemple

Montrer que " $\forall n \in \mathbb{N} : n^2+1$ est premier " est fausse

Démonstration

Pour montrer que cette assertion est fausse, il faut montrer que sa négation " $\exists\ n \in \mathbb{N} : n^2+1$ n'est pas premier " est vraie

En effet, $\exists\ n =3 \in \mathbb{N} : 3^2 + 1 = 10$ n'est pas premier

Conclusion: l'assertion " $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ est premier " est fausse

4.4. Raisonnement par récurrence

Ce raisonnement est utilisé pour montrer qu'une assertion qui dépends d'un nombre naturel n qu'elle est vraie pour tous les nombres naturels n à partir d'un certain rang n_0 ou n_0 est un entier pas nécessairement égale à 0.

La démonstration se déroule en trois étapes:

- ***Initialisation*** On vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
- ***Hérédité*** Fixons $n \geq n_0$, supposons que P(n) est vraie et montrons que P(n+1) est vraie.
- ***Conclusion*** Par Le principe de récurrence P(n) est vraie pour tout n.

Exemple

Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N} : 2^n > n$.

Démonstration

Pour $n \geq 0$, on note P(n) l'assertion suivante: $2^n > n$

Montrons que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$: P(n) est vraie

- ***Initialisation*** Vérifions P(0) , on a pour n = 0, $2^0 = 1 > 0$ d'où P(0) est vraie.
- ***Hérédité*** Fixons n≥ 0, supposons que P(n) est vraie c'est à dire $2^n > n$ et montrons que P(n+1) est vraie c'est à dire $2^{n+1} > n+1$.
  On a $2^{n+1} = 2^n.2 = 2^n + 2^n$
  Or d'après l'hypothèse on a: $2^n > n$
  d'où $2^{n+1} = 2^n + 2^n > 2^n+n$
  d'autre part, on a: $n \geq 0 \Rightarrow 2^n > 2^0$, $(2^0=1)$
  Ainsi $2^{n+1} > n + 1$
- ***Conclusion*** Par Le principe de récurrence on déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$: P(n) est vraie c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n > n$.

Conseil

Pour plus d'explications et de clarification sur Logique et raisonnements, vous pouvez regarder cette vidéo.

Cf. "Logique et raisonnements"

5. Série TD avec la solution + Exercices supplémentaires

[cf. série TDN°1]

Pour des exercices supplémentaires, Voire*

6. Exercices d'application

6.1. Exercice

[solution n°1 p.13]

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Exercice

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0$.

○ vraie

○ fausse

Exercice

- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$.

○ vraie

○ fausse

Exercice

- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$.

○ vraie

○ fausse

Exercice

- $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$.

○ vraie

○ fausse

6.2. Exercice : Choisir la bonne réponse.

[solution n°2 p.13]

"Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie, il suffit de montrer que si P est une assertion vraie alors l'assertion Q est vraie aussi" est le principe de ....

☐ Raisonnement direct

☐ Raisonnement par contraposée

☐ Raisonnement par contre-exemple

☐ Raisonnement par récurrence

6.3. Exercice : Choisir la bonne réponse.

[solution n°3 p.14]

" Pour prouver une implication P⇒Q, il est équivalent de montrer l'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ (la contraposée de P⇒Q). On suppose alors $\overline{Q}$ soit vraie et on montre que $\overline{P}$ est vraie. "

- ☐ Raisonnement direct
- ☐ Raisonnement par contraposée
- ☐ Raisonnement par contre-exemple
- ☐ Raisonnement par récurrence

6.4. Exercice : Choisir la bonne réponse.

[solution n°4 p.14]

" Pour montrer qu'une assertion de la forme " ∀x ∈ E : P(x) " est fausse, il suffit on montre que sa négation " ∃ x ∈ E : $\overline{P(x)}$ " est vraie.

c'est-à-dire on cherche un élément x de E pour lequel $\overline{P(x)}$ est vraie "

- ☐ Raisonnement direct
- ☐ Raisonnement par contraposée
- ☐ Raisonnement par contre-exemple
- ☐ Raisonnement par récurrence

6.5. Exercice : Complète la phrase suivante.

[solution n°5 p.14]

Raisonnement par ______ est utilisé pour montrer qu'une assertion qui dépends d'un nombre naturel n qu'elle est vraie pour tous les nombres naturels n à partir d'un certain rang n_0 ou n_0 est un entier pas nécessairement égale à 0, Ce raisonnement se déroule en trois étapes : Initialisation, Hérédité et Conclusion

6.6. Exercice :

En utilisant le raisonnement par contre-exemple.

Question

Montrer que " ∀n ∈ ℕ : n^2+1 est premier " est fausse

Solutions des exercices

> **Solution** n°1

Exercice p. 11

Exercice

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R} : x + y > 0$.

◉ vraie

○ fausse

Exercice

- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$.

○ vraie

◉ fausse

Exercice

- $\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$.

◉ vraie

○ fausse

Exercice

- $\exists\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R} : x + y > 0$.

○ vraie

◉ fausse

> **Solution** n°2

Exercice p. 11

"Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est vraie, il suffit de montrer que si P est une assertion vraie alors l'assertion Q est vraie aussi" est le principe de ....

- [x] Raisonnement direct
- [ ] Raisonnement par contraposée

- [ ] Raisonnement par contre-exemple
- [ ] Raisonnement par récurrence

> **Solution** n°3

Exercice p. 12

" Pour prouver une implication P⇒Q, il est équivalent de montrer l'implication $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ (la contraposée de P⇒Q). On suppose alors $\overline{Q}$ soit vraie et on montre que $\overline{P}$ est vraie. "

- [ ] Raisonnement direct
- [x] Raisonnement par contraposée
- [ ] Raisonnement par contre-exemple
- [ ] Raisonnement par récurrence

> **Solution** n°4

Exercice p. 12

" Pour montrer qu'une assertion de la forme " ∀x ∈ E : P(x) " est fausse, il suffit on montre que sa négation " ∃ x ∈ E : $\overline{P(x)}$ " est vraie.

c'est-à-dire on cherche un élément x de E pour lequel $\overline{P(x)}$ est vraie "

- [ ] Raisonnement direct
- [ ] Raisonnement par contraposée
- [x] Raisonnement par contre-exemple
- [ ] Raisonnement par récurrence

> **Solution** n°5

Exercice p. 12

Raisonnement par `récurrence` est utilisé pour montrer qu'une assertion qui dépends d'un nombre naturel n qu'elle est vraie pour tous les nombres naturels n à partir d'un certain rang n_0 ou n_0 est un entier pas nécessairement égale à 0, Ce raisonnement se déroule en trois étapes : Initialisation, Hérédité et Conclusion

Glossaire

table de vérité

Une table de vérité est un tableau utilisé en logique mathématique pour représenter toutes les valeurs de vérité possibles pour une proposition ou une expression logique donnée.

Valeur de vérité

La valeur de vérité est un concept utilisé en logique pour déterminer si une proposition est vraie ou fausse.

Bibliographie

[1] Mounira Melki : Cours de mathématiques 1 de première année licence(L 1) sciences de La matière, université frères Mentouri Constantine 1 (2023/2024).

[2] T. Houmor, Cours et exercices avec solutions de première année licence mathématique, université frères Mentouri Constantine 1.

[3] C. Baba Hamed, K. Benhabib, Algèbre 1 : rappels de cours et exercices avec solutions, OPU {1992).

[4] J-M Monier, Algebre 1 : cours et 600 exercices corriges, 2eme Ed., Dunod Paris (2000).

Webographie

http://exo7.emath.fr/un.html

http://www. les-mathematiques. net/