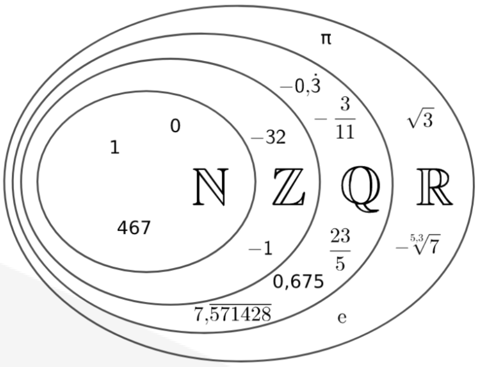
Cours de mathématiques 1



Chapitre 3 : Corps des nombres réels

Dr. Abderrahim Guerfi

Université Frères Mentouri Costantine1

Émail : abderrahim.guerfi@umc.edu.dz

5.0

Mars 2024

Table des matières

I Chapitre 3 : Corps des nombres réels

1. objectifs

Les objectifs de ce chapitre sont :

- Identifier toutes les propriétés du corps des nombres réels.
- Comprendre les deux notions : Valeur absolue et partie entière.
- Utiliser les parties bornées dans ℝ, les intervalles et les voisinages.

2. Introduction

On rappelle les notations usuelles pour les ensembles de nombres:

ℕ l'ensemble des nombres entiers naturels.

ℤ l'ensemble des nombres entiers relatifs.

ℚ l'ensemble des nombres rationnels défini par :

$\mathbb{Q} = \{ (p/q) \mid p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}^* \}$, où : $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$

Cependant, il existe des nombres qui ne sont pas rationnels, les irrationnels.

Les nombres irrationnels apparaissent naturellement dans les figures géométriques, par exemple la diagonale d'un carrée de coté 1 est le nombre irrationnel $\sqrt{2}$, la circonférence d'un cercle de rayon (1/2) est π qui est également un nombre irrationnel. Enfin e=exp(1) est aussi irrationnel.

Il est donc nécessaire d'étendre l'ensemble des rationnels ℚ et créer un ensemble qui contient aussi les irrationnels : c'est l'ensemble des nombres réels ℝ et on a:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

3. Corps des nombres réels

3.1. Propriétés de ℝ

l'ensemble des nombres réels ℝ est un ensemble dans lequel sont définies deux lois internes : $(x,y)\to x+y$ (Addition) et $(x,y)\to x\cdot y$ (Multiplication) .

$(\mathbb{R},+,\cdot)$ est un corps commutatif satisfaisant les axiomes suivantes:

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x+y=y+x$ (commutativité de l'addition).
2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x+y)+z = x+(y+z)$ (associativité de l'addition).
3. Il exite un élément neutre noté 0 pour l'addition vérifiant: $\forall x\in\mathbb{R} : x+0 = x$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$; Il exite un élément noté $(-x)\in\mathbb{R}$ vérifiant: $x+(-x)=0$.
5. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x\cdot y=y\cdot x$ (commutativité de la multiplication).
6. $\forall x, y, z\in \mathbb{R} : (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ (associativité de la multiplication).
7. Il existe un élément neutre pour la multiplication noté $1\neq0$ vérifiant: $\forall x \in \mathbb{R} : x\cdot1=x$.
8. Pour tout $x\neq0$, Il existe un élément inverse noté x^{-1} tel que : $x\cdot x^{-1}=1$.
9. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ (distributivité de la multiplication sur l'addition).

3.2. Ordre sur ℝ

On munit l'ensemble ℝ de la relation notée $\leq$.

$(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné. En effet, on a :

1. $\forall x \in \mathbb{R} : x\leq x$. (réflexive).
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x\leq y \text{ et } y\leq x)\Rightarrow x=y$ (anti-symétrique).
3. $\forall x, y, z\in\mathbb{R} :(x\leq y \text{ et } y\leq z)\Rightarrow x\leq z$ (transitive).
4. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x\leq y$ ou $y\leq x$.

   La relation d'ordre totale $\leq$ est compatible avec l'addition et la multiplication :

   1. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x\leq y\Rightarrow x+z \leq y+z$.
   2. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x\leq y$ et $z\geq0$ alors $zx\leq zy$.

Proposition

Les propriétés suivantes sont vraies dans $(\mathbb{R}, \leq)$.

1. $x > 0 \Rightarrow -x < 0$.
2. $x < 0 \Rightarrow -x > 0$.
3. $x > 0 \Rightarrow (1/x) > 0$.
4. $(x \geq 0 \wedge y \leq 0) \Rightarrow xy \leq 0$.
5. $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Rightarrow -y \leq -x$.
6. $0 < x < y \Leftrightarrow 0 < (1/y) < (1/x)$.
7. $0 < x <y \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < x^n < y^n$.
8. $\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}, (x \leq y \text{ et } z \leq t) \Rightarrow x+z \leq y+t$.

Notations courantes:

$\mathbb{R}^* = \{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\mathbb{R}_+ = \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \}$.

$\mathbb{R}^*_+ = \{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \}$.

$\mathbb{R}_- = \{ x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \}$.

$\mathbb{R}^*_- = \{ x \in \mathbb{R} : x < 0 \}$.

4. Valeur absolue et partie entière

4.1. Valeur absolue

Définition

On appelle valeur absolue sur ℝ l'application de ℝ dans $\mathbb{R}_+$, notée |x| telle que :

$$|x|=\begin{cases} x & si\ x\geq 0 \\ -x & si\ x<0 \end{cases}$$

Propriétés

1. ∀x ∈ ℝ : |x|=max(x,-x) et -|x| ≤ x ≤ |x|.
2. ∀x ∈ ℝ : (|x| = 0 ⇔ x=0).
3. ∀x ∈ ℝ : $\sqrt{x^2}$ = |x| et |x| = |-x|.
4. ∀ (x, y)∈$\mathbb{R}^2$: |xy| =| x||y|.
5. ∀x ∈ ℝ,∀n∈ℕ : $|x|^n = |x^n|$.
6. ∀x ∈ ℝ,∀ α ≥ 0 : (|x| ≤ α ⇔ -α ≤ x ≤ α).
7. ∀(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$: |x+y| = |x|+|y|. ($1^{ère}$ Inégalité triangulaire).
8. ∀(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$: ||x|-|y|| ≤ |x-y|. ($2^{ème}$ Inégalité triangulaire).

Démonstration:

Montrons les deux assertions: 2 et 7.

2)

a) "⇐"

Supposons que : x = 0. D’après la définition de la valeur absolue, on trouve |x|=0.

b) "⇒"

Supposons que : |x|=0. Comme -|x| ≤ x ≤ |x|, on aura : x=0.

En définitive: ∀x ∈ ℝ : (|x|=0 ⇔ x=0).

7)

On a ∀ x, y ∈ ℝ : (-|x| ≤ x ≤ |x| et -|y|≤y≤|y|)⇒-|x|-|y| ≤ x+y ≤ |x|+|y|.

Par la suite, on aura : ∀x, y ∈ ℝ:-(|x|+|y|)≤ x+y ≤ |x|+|y|.

D'où: ∀(x, y) ∈ $\mathbb{R}^2$: |x+y| = |x|+|y|.

4.2. Partie entière

Définition

Pour tout x ∈ ℝ,il existe un unique α∈ℤ tel que : α ≤ x < α+1.

L'entier relatif α est appelé partie entière du réel x et est noté E(x) ou [x], On écrit :

$\forall x \in \mathbb{R} : E(x) \leq x < E(x)+1$.

Exemple

$E(4)=4$, $E(-3)=-3$, $E(\pi)=3$, $E(-\pi)=-4$.

Propriétés

Soit x un nombre réel, On a :

1. $x-1 < E(x) \leq x$.
2. $E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow E(x) \leq E(y)$.
4. $\forall n \in \mathbb{Z} : E(x+n) = E(x)+n$.
5. $\forall x,y \in \mathbb{R} : E(x)+E(y) \leq E(x+y) \leq E(x)+E(y)+1$.

Démonstration

Montrons l'assertion 4.

Par définition, on a : $\forall x \in \mathbb{R} : E(x) \leq x < E(x)+1$.

Ainsi

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} : E(x)+n \leq x+n < E(x)+n+1$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} : ((E(x)+n) \in \mathbb{Z} \wedge (E(x)+n+1) \in \mathbb{Z} \wedge (E(x)+n+1)-(E(x)+n)=1)$

D'où:

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} : E(x+n) = E(x)+n$.

5. Parties bornées dans ℝ

Majorant, Minorant et bornée

Soient m,M deux nombres réels quelconques et A une partie non-vide de ℝ.

- On dit que A est majoré par M si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A : x \leq M$,
  M s'appelle le majorant de A.
- On dit que A est minoré par m si : $\exists\, m \in \mathbb{R}, \forall x \in A : m \leq x$
  m s'appelle le minorant de A.
- Si la partie A est à la fois minorée et majorée alors A est dite bornée .
  Autrement dit: $\exists\, m \in \mathbb{R}, \exists\, M \in \mathbb{R}, \forall\, x \in A : m \leq x \leq M$.
  Ou d'une manière équivalente:
  $\exists \alpha > 0, \forall\, x \in A : |x| \leq \alpha$.

Exemple

1. -5 est un minorant de $]1,2[$.

2. (1/2),0 et $\sqrt{2}$ sont des majorants de]-∞,0[mais il n'y as pas des minorants.

Maximum, Minimum et sup A, inf A

1. Si A est majorée par M et M∈A alors M est le plus grand élément de A noté max A.
2. Si A est minorée par m et m∈A alors m est le plus petit élément de A noté min A.
3. On appelle borne supérieure(si elle existe) de A le plus petit des majorants de A noté sup A.
4. On appelle borne inférieure(si elle existe) de A le plus grand des minorants de A noté inf A.

Proposition

- Si max A et minA existent alors il sont uniques.
- Si sup A et inf A existent alors il sont uniques.

Remarque

1. Si max A existe alors max A = sup A.
2. Si min A existe alors min A=inf A.
3. (M est un majorant de A et M≤M′ (où M′ ∈ℝ)) ⇒ M′ est un majorant de A.
4. (m est un minorant de A et m′≤m (où m′ ∈ℝ)) ⇒ m′ est un minorant de A.
5. Si sup A existe et sup A ∈ A alors sup A = max A.
   Sinon max A n'existe pas.
6. Si inf A existe et inf A ∈ A alors inf A = min A.
   Sinon min A n'existe pas.

Exemple

Soit A=[0,1[

- les majorants de A sont [1,+∞[.
- les minorants de A sont]-∞,0].
- sup A = 1 et 1∉A alors max A n'existe pas.
- inf A = 0 et 0∈A alors min A = 0 .

Existence de sup A et inf A

Axiome (borne supérieure)

Toute partie non-vide de ℝ et majorée admet une borne supérieure dans ℝ.

corollaire

Toute partie non-vide de ℝ et minorée admet une borne inférieure dans ℝ.

6. Intervalles et voisinages

6.1. Intervalle

On appelle intervalle de ℝ tout sous-ensemble I de ℝ tel que:

$\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 : ((\ a\in I \text{ et } b\in I \text{ et } a \le c \le b) \Rightarrow c \in I\ )$.

Autrement dit, un intervalle est défini comme un ensemble où tout réel compris entre deux réels de l'ensemble appartient à l'ensemble.

Remarque

- Par définition $I=\Phi$ est un intervalle.
- $I=\mathbb{R}$ est aussi un intervalle.

Soit $(a, b)\in\mathbb{R}^2$, $a < b$. On définit les intervalles d'extrémités a et b suivants:

- $[a,b]=\{\ x\in\mathbb{R} \mid a \le x \le b\ \}$, $[a,b]$ est appelé intervalle fermé.
- $]a,b[=\{\ x\in\mathbb{R} \mid a < x < b\ \}$, $]a,b[$ est appelé intervalle ouvert.
- $[a,b[=\{\ x\in\mathbb{R} \mid a \le x < b\ \}$, $[a,b[$ est appelé intervalle semi-fermé à gauche.
- $]a,b]=\{\ x\in\mathbb{R} \mid a < x \le b\}$, $]a,b]$ est appelé intervalle semi-ouvert à gauche.

On appelle centre de chacun de ces intervalles le réel : $x=((a+b)/2)$.

On définit aussi les intervalles non bornés suivants:

- $[a,+\infty[=\{\ x\in\mathbb{R} \mid a \le x\ \}$,
- $]a,+\infty[=\{\ x\in\mathbb{R} \mid a < x\ \}$.
- $]-\infty,b]=\{\ x\in\mathbb{R} \mid x \le b\ \}$,
- $]-\infty,b[=\{\ x\in\mathbb{R} \mid x < b\ \}$

Droite réelle achevée

L'ensemble ℝ n'a ni plus grand, ni plus petit élément.

On lui adjoint deux éléments notées: $-\infty$, $+\infty$ de façon à construire l'ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$. On a donc $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\ -\infty, +\infty\ \}$.

l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ est appelé droite réelle achevée.

6.2. Voisinage

Définition

Soit a un réel, $V\subset\mathbb{R}$ un sous-ensemble. On dit que V est un voisinage de a s'il existe un intervalle ouvert I tel que $a\in I$ et $I\subset V$.

Exemple

1. Les intervalles : $[-1,1]$ et $[-1,(1/2)]$ sont des voisinage de 0.
2. Les intervalles : $]0,1]$, $[0,1]$ et $[2,3]$ ne sont pas des voisinage de 0.

✎ *Remarque*

- Tout intervalle contenant a n'est pas nécessairement un voisinage de a, par exemple [a,b[.
- Tout intervalle ouvert contenant a est un voisinage de a.
- La réunion ou l'intersection de deux voisinage de a est un voisinage de a.

7. Séries TD corrigé

[cf. Série TD N°3 Corps des nombres réels]

Pour des exercices supplémentaires voire*

Bibliographie

[3] Mounira Melki, Cours de mathématique 1 de première année licence(L 1) sciences de La matière, université frères Mentouri Constantine 1 (2023/2024).

[2] T.Houmor, Cours et exercices avec solutions de première année licence mathématique, université frères Mentouri Constantine 1.

[1] C.Baba Hamed, K.Benhabib, Algèbre 1 : rappels de cours et exercices avec solutions, OPU {1992).

[4] J-M Monier, Algebre 1 : cours et 600 exercices corriges, 2eme Ed., Dunod Paris (2000).

Webographie

http://exo7.emath.fr/un.html

http://www. les-mathématiques. net/