TD N°2 : Ensembles, Relations Binaires et Applications

Deuxième Partie

Relations Binaires Et Applications

Exercice 1.

1. On considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2,\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x - y \text{ est un multiple de } 3.$$

ⓐ Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
ⓑ Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.
ⓒ Montrer que : $\dot{7} = \dot{4}$.

2. Soit "$\leq$" la relation binaire sur $\mathbb{N}^*$ défine par :

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \text{ divise } y.$$

ⓐ Montrer que "$\leq$" est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$. L'ordre est-il totale ?

Exercice 2.

1. Soit f une application de E dans F et A et B deux partie de E. Montrer que :

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

2. Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x^2.$$

On considère les ensembles $A = [-2, 1]$ et $B = [0, 3]$.
ⓐ Comparer les ensembles $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.
ⓑ Quelle condition doit vérifier f pour que :

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Exercice 3.

1. Soit f une application de E dans F. Soient C et D deux partie de F. Montrer que :

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D).$$

2. Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 + x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

ⓐ Déterminer les ensembles :
$f(\mathbb{R})$, $f^{-1}\{0\}$, $f^{-1}\{1\}$, $f^{-1}\{-1\}$, $f^{-1}\{[1, 2]\}$.
ⓑ f est-elle injective ?
ⓒ f est-elle surjective ?
ⓓ f est-elle bijective ?