Série d'exercices N° 01

I

1. Exercice

Soit P une assertion vraie et Q une assertion fausse. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ P ou Q
- ☐ P et Q
- ☐ non(P) ou Q
- ☐ non(P et Q)

2. Exercice

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x \geq 0$
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - n \geq 0$
- ☐ $\forall x \in \mathbb{R}, |x^3 - x| \geq 0$
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, n^3 - 3 \geq 0$

3. Exercice

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ La négation de "$\forall x > 0, ln(x) \leq x$" est "$\exists x \leq 0, ln(x) \leq x$"
- ☐ La négation de "$\exists x > 0, exp(x) > x$" est "$\forall x > 0, exp(x) < x$"
- ☐ La négation de

4. Exercice

Je veux montrer que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier, quelque soit $n \in \mathbb{N}$. Quelles sont les démarches possibles ?

- ☐ Montrer que la fonction $x \mapsto x(x+1)$ est paire

- [ ] Par l'absurde, supposer que $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un réel, puis chercher une contradiction
- [ ] Le résultat est faux, je cherche un contre-exemple

5. Exercice

Je veux montrer par récurrence l'assertion $H_n\ :\ 2^{n+1} > 2n+1$, pour tout entier n assez grand. Pour l'étape d'hérédité je suppose H_n vraie, quelle(s) inégalité(s) dois-je maintenant démontrer ?

- [ ] $2^{n+1} > 2n+3$
- [ ] $2^n > 2n+1$
- [ ] $2^n > 2(n+1)+1$
- [ ] $2^n+1 > 2(n+1)+1$

6. Exercice : Exercices d'approfondissement

Exercice 1 :

En utilisant la table de vérité, montrer les "lois de Morgan" :

1. $\overline{P \wedge Q} \Longleftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}$.
2. $\overline{P \vee Q} \Longleftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}$

Exercice 2 :

Soit I un interval de $\mathbb{R}$ et $f\ : I \rightarrow \mathbb{R}$, une application définie sur I à valeur réelle. Exprimez à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. l'application f s'annule.
2. l'application f est l'application nulle.
3. f n'est pas une application constante.
4. f ne prend jamais deux fois la même valeur.
5. f prend des valeurs arbitrairement grandes.
6. f ne peut s'annuler qu'au plus une seule fois.

Exercice 3 :

- Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier vos réponses.
  1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x+y > 0$.
  2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x+y > 0$.
  3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$.
  4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x+y > 0$.
- Donner leur négation.

Exercice 4:

Montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, (1+x)^n \geqslant 1+nx$

Exercice 5 :

Soit $E = \{a, b\}$. À quels ensembles appartiennent $(a, b), \{a\}, (a, \{b\}), (\{a\}, \{b\}), \{\{a\}, \{b\}\}, (a, E)$?

Exercice 6 :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Exprimer à l'aide de quantificateurs l'assertion

« A est inclus dans B, puis sa négation.

Exprimer enfin sous forme quantifiée l'assertion «A est inclus dans$\bar{B}$ »

Exercice 7 :

Que pensez-vous de l'énoncé et de la démonstration suivante : «Soit f l'application de $\mathbb{R}^+$dans le plan qui au réel positif t associe le point de coordonnées $x(t) = \dfrac{1-t}{1+t}$ et $y(t) = \dfrac{2\sqrt{t}}{1+1}$ dans un repère orthonormé d'origine O. L'image de f est le cercle de centre O et de rayon 1.

Démonstration : soit M un point de l'image de f. Il existe $t \in \mathbb{R}^+$tel que $(x(t), y(t))$ soient les coordonnées de M. On calcule

$$\begin{aligned} x(t)^2 + y(t)^2 &= \frac{1-2t+t^2}{(1+t)^2} + \frac{4t}{(1+t)^2} \\ &= \frac{1+2t+t^2}{(1+t)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Nous avons démontré que l'image de f est bien le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Exercice 8 :

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. Démontrer que

1. $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$
2. $A = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$

Exercice 9 :

Soit E un ensemble et $A \subset E$. Caractériser $X \subset E$ dans chacun des cas suivants :

- $A \cup X = E$
- $A \cap X = A$
- $A \cup X = A$
- $A \cap X = \emptyset$

Exercice 10 :

Écrire toutes les applications de $E = \{1, 2\}$ dans $F = \{a, b\}$ (avec $a \neq b$) et, pour chacune, indiquer si elle est injective, surjective, bijective.

Exercice 11 :

- Soit $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ n \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

g est-elle injective ? surjective ? bijective ?

- Soit $f : n \in \mathbb{N} \mapsto 2n \in \mathbb{N}$. Est ce que $f, g \circ f, f \circ g$ sont injectives, surjectives, bijectives ?

Exercice 12 :

Dire si les applications suivantes sont injectives, surjectives, bijectives (auquel cas déterminer la bijection réciproque) :

- $f : k \in \mathrm{N} \mapsto 2k + 1 \in \mathrm{N}^*$.
- .
- $h : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1} \in \mathbb{R}$.
- $k : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \in \mathbb{R}$.
- $\ell : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + 3y, x + y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 13 :

Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables dont la dérivée est continue, $F = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensembles des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $D : E \to F$ l'application qui a $f \in E$ associe $f' \in F$ (la dérivée de f).

D est-elle injective ? surjective ?