

# M1-S1 PROBA TD

OMAR BOUKHADRA

DÉP. MATHÉMATIQUES  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES  
UNIVERSITÉ DE CONSTANTINE 1  
[boukhadra@umc.edu.dz](mailto:boukhadra@umc.edu.dz)

13 octobre 2024

## Contenu

<b>1</b>	<b>Probabilité et v.a.</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Indépendance</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Fonction caractéristique</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Modes de convergence de v.a.</b>	<b>5</b>

# 1 Probabilité et v.a.

**Exercice 1.1** (a) Soit  $(A_i)_{i=1}^n$  une collection d'évènements dans un espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Montrer que  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$ .

(b) Si  $\mathcal{G}$  est une autre tribu de  $\Omega$ , montrer que  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$  est aussi une tribu de  $\Omega$ . Cependant, montrer que  $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$  ne l'est pas nécessairement.

**Exercice 1.2** Modéliser les expériences aléatoires suivantes par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  :

- (a) une pièce de monnaie équilibrée est lancée trois fois.
- (b) Une boule est tirée d'une urne qui contient un nombre donné de boules rouges et bleues.
- (c) deux boules sont tirées sans remise d'une urne qui contient un nombre donné de boules rouges et bleues.
- (d) Idem avec un tirage avec remise.
- (e) une pièce de monnaie équilibrée est lancée répétitivement jusqu'à ce que pile apparaisse.

**Exercice 1.3** (Inégalité de Boole) Prouver que

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

**Exercice 1.4** Montrer que

$$P(\limsup A_n) \geq \limsup P(A_n)$$

**Exercice 1.5** Soit  $\Omega = \mathbb{R}$  et  $\mathcal{F} = \{A \text{ est dénombrable ou } A^c\}$ . Et considérer sur  $\mathcal{F}$ , l'application

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } A^c \text{ est dénombrable} \end{cases}$$

(a) Montrer que  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est un espace probabilisé.

(b) Montrer que  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  est une variable aléatoire par rapport à  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  ssi il existe  $n$  tel que  $(X^{-1}(\{n\}))^c$  est dénombrable (ssi il existe un  $n$  unique tel que  $X^{-1}(\{n\})$  est non dénombrable).

**Exercice 1.6** Soit deux v.a.  $X$  et  $Y$ . Montrer que  $\min\{X, Y\}$ ,  $X + Y$  et  $XY$  sont aussi des v.a.

**Exercice 1.7** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble  $E$  muni de la tribu de ses parties, telle que  $P(X = x) > 0$  pour tout  $x \in E$ . Montrer que  $E$  est fini ou dénombrable.

**Exercice 1.8** Soit  $F, G$  deux f.r. et  $\lambda \in [0, 1]$ . Montrer que  $\lambda F + (1 - \lambda)G$  est une f.r. Est-ce que  $FG$  est une f.r.? Particulièrement, si  $f$  et  $g$  sont les d.p. de ces dernières, montrer que  $\lambda f + (1 - \lambda)g$  est une d.p., celle de  $\lambda F + (1 - \lambda)G$ . Est-ce que  $fg$  en est une?

**Exercice 1.9** Soit  $F$  une f.r. et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que les fonction suivantes sont aussi des f.r. :

$$(a) F(x)^n \quad (b) 1 - (1 - F(x))^n \quad (c) F + (1 - F) \log(1 - F)$$

**Exercice 1.10** Dire si les fonctions suivantes définissent des d.p. en déterminant la valeur de la constante  $c$ , et éventuellement la f.r. associée :

$$f(x) = c x^{-d} \mathbf{1}_{(1, \infty)}(x), \quad g(x) = \frac{c e^x}{(1 + e^x)^2}$$

**Exercice 1.11** Soit  $F$  le f.r. de la v.a.  $X$ . Exprimer en fonction de  $F$  les f.r. des v.a.  $-X, X^+, aX + b$  et  $X^2$ .

**Exercice 1.12** Soit  $X$  une v.a. uniformément distribuée sur  $[0, 2]$ . Poser  $Y = X^2$  et calculer

$$(a) P(1 \leq X \leq 2) \quad (b) P(Y \leq X) \quad (d) P(X + Y \leq 3/4)$$

**Exercice 1.13** Soit une  $X$  une v.a. de f.r.  $F$  et  $U$  une v.a. de distribution uniforme sur  $[0, 1]$ . Soit

$$F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$$

Montrer que

$$X \stackrel{d}{=} F^{-1}(U) \tag{1.1}$$

En déduire que

$$\mathcal{E} \stackrel{d}{=} -\log U$$

**Exercice 1.14** Considérer la fonction suivante sur  $\mathbb{R}_+^2$ ,  $F(x, y) = 1 - e^{-xy}$ . Est-elle une f.r.?

**Exercice 1.15** Soit  $X, Y$  deux v.a. de f.r. commune  $F$ . Montrer que

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

**Exercice 1.16** Soit  $X$  une v.a. de Bernoulli de probabilité de succès  $p$ . Soit  $Y = 1 - X$  et  $Z = XY$ . Trouver la distribution des couples  $(X, Y)$  et  $(X, Z)$ .

**Exercice 1.17** Soit  $X$  une v.a. telle que  $E(|X|^p) < \infty$  pour  $p \geq 1$ . Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^p P(|X| > x) = 0$$

Que peut-on dire alors à propos de l'inégalité de Tchebychev ?

**Exercice 1.18** Soit  $X$  une v.a. telle que  $\|X\|_2 = 1$  et pour un  $\alpha > 0$ ,  $\|X\| \geq \alpha$ . Montrer que  $E(|X|) < \infty$ . Ensuite, prouver que pour tout  $\beta \in [0, 1]$ , on a

$$P(|X| \geq \alpha\beta) \geq (1 - \beta)^2 \alpha^2$$

**Exercice 1.19** Soit  $X_n$  une v.a. de distribution  $\mathcal{B}(n, p)$ . Montrer que

$$E\left(\frac{1}{1 + X_n}\right) = \frac{1 - (1 - p)^{n+1}}{(n + 1)p}$$

Trouver la limite de cette moyenne quand  $n \rightarrow \infty$  et  $p \rightarrow 0$  et que  $np \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ .

## 2 Conditionnement & Indépendance

**Exercice 2.1** Soit  $P(B) \neq 0$  et poser  $Q(A) = P(A | B)$ . Soit  $Q(C) \neq 0$ . Montrer que  $Q(A | C) = P(A | B \cap C)$ .

**Exercice 2.2** Supposer que  $P(A)P(B) \neq 0$  et montrer la *formule de Bayes* :

$$P(A | B) = P(B | A) \frac{P(A)}{P(B)} \quad (2.1)$$

Ensuite, prouver que

$$P(A | B) > P(A) \implies P(B | A) > P(B)$$

**Exercice 2.3** ( $\mathcal{E}(\lambda)$  est sans mémoire) Soit  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ .

(a) Établir que pour tous  $s, t \geq 0$ , on a

$$P(X \geq t + s | X > t) = P(X > s) \quad (2.2)$$

b) Montrer que la propriété (2.2) caractérise la loi exponentielle parmi les lois à densité.

(c) Prouver que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(X \in (t, t + h] | X > t)}{h} = \lambda$$

**Exercice 2.4** Un nombre aléatoire  $N$  de dés sont jetés. Appeler  $S$  la somme des faces apparues. Supposer que  $P(N = n) = 2^{-n}$ . Trouver les probabilités :

$$P(N = 2 \mid S = 4), \quad P(S = 4 \mid N \text{ est pair}).$$

**Exercice 2.5** Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a. i.i.d. dans  $\mathbb{N}^*$  de distribution donnée par  $2^{-n}$ . Trouver les probabilités suivantes :

$$(a) P(\min(X, Y) \leq n) \quad (b) P(X = Y) \quad (c) P(X > Y)$$

**Exercice 2.6** Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a. indépendantes de f.r. respectives  $F$  et  $G$ . Trouver les f.r. de  $\min\{X, Y\}$  et  $\max\{X, Y\}$ . Ensuite, montrer que

$$P(a < m \leq M \leq b) = (F(b) - F(a))(G(b) - G(a))$$

**Exercice 2.7** Soit  $X$  une v.a. de Bernoulli équiprobable indépendante de la v.a.  $Y$  qui est de distribution normale. Trouver la loi de  $XY$ .

**Exercice 2.8** Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a. de f.r.  $F$  et  $G$ . Supposer qu'elles soient positives et indépendantes. Trouver la f.r. de  $XY$ .

**Exercice 2.9** Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a. indépendantes de distributions exponentielles.

- (a) Déterminer la distribution de  $\min\{X, Y\}$ .
- (b) Calculer la probabilité de  $\{X < Y\}$ .
- (c) Montrer que  $\min\{X, Y\}$  est indépendante de l'évènement  $\{X < Y\}$ .
- (d) Donner la f.r. de  $X/Y$ .

**Exercice 2.10** Soit  $X, Y$  et  $Z$  des v.a. indépendantes de distributions exponentielles de paramètres respectifs  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ . Calculer  $P(X < Y < Z)$ .

**Exercice 2.11** Soit  $U = X + Y$  somme de deux v.a. i.i.d. suivant une loi exponentielle standard. Poser  $V = X/U$ . Trouver la distribution de  $(U, V)$  et en déduire celle de  $V$ .

**Exercice 2.12** Soit maintenant  $(X_n)$  une suite de v.a. i.i.d. de distribution exponentielle. Soit  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Pour  $t \geq 0$ , soit

$$N(t) = \#\{n : S_n \leq t\}$$

Montrer que  $N(t) \sim \mathcal{P}(t)$ .

### 3 Fonction caractéristique

**Exercice 3.1** Trouver les f.c. des fonctions suivantes :

$$(a) \frac{1}{\cosh(\pi x)} \quad (b) \frac{1}{2}|x|e^{-|x|}$$

**Exercice 3.2** Soit  $\varphi$  une f.c. Montrer que  $\bar{\varphi}$  et  $\varphi^2$  le sont aussi. Par contre, donner un exemple qui montre que  $|\varphi|$  ne l'est pas nécessairement.

**Exercice 3.3** Soit  $\varphi$  la f.c. d'une v.a.  $X$ . Montrer que pour tout  $t > 0$ ,

$$P(|X| > 1/t) \leq \frac{7}{t} \int_0^t (1 - \operatorname{Re}(\varphi(s))) ds$$

**Exercice 3.4** Soit  $X$  et  $Y$  deux v.a. indépendantes de distribution normale standard. Utiliser les f.c. pour trouver les distributions de  $X^2$  et  $XY$ .

**Exercice 3.5** Soit  $\varphi$  la f.c. de la loi normale standard. Montrer que  $\varphi$  vérifie l'équation différentielle  $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$ . En déduire la forme explicite de  $\varphi$ .

**Exercice 3.6** Trouver des v.a.  $X$  et  $Y$  dépendantes telles que  $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ .

**Exercice 3.7** Trouver les distributions associées aux f.c. suivantes :

$$(a) \cos t \quad (b) (1 - |t|) \mathbb{1}_{|t| \leq 1}(t)$$

Ensuite, dire si les fonctions suivantes sont des f.c. :

$$(c) (1 + t^4)^{-1} \quad (d) e^{-t^4}$$

### 4 Modes de convergence de v.a.

**Exercice 4.1** Soit  $(X_n)$  une suite de v.a. Supposer qu'il existe une série numérique  $\sum u_n$  convergente telle que  $\sum P(X_n \neq u_n) < \infty$ . Montrer que  $\sum X_n$  est p.s. convergente.

**Exercice 4.2** Utiliser l'intégration par parties à la fonction  $x^{-1} x e^{-x^2/2}$  pour obtenir l'estimation :

$$(x^{-1} - x^{-3}) e^{-x^2/2} \leq \int_x^\infty e^{-u^2/2} du \leq x^{-1} e^{-x^2/2}$$

Maintenant, soit  $(X_n)$  une suite de v.a. i.i.d. de distribution  $\mathcal{N}$ . Montrer que

$$(a) \quad \limsup \frac{X_n}{\sqrt{2 \log n}} \stackrel{\text{p.s.}}{=} 1$$

$$(b) \quad \frac{\max_{1 \leq i \leq n} X_i}{\sqrt{2 \log n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 1$$

**Exercice 4.3** Soit  $X$  une v.a. de f.r.  $F$ . Montrer que

$$X_n := X \pm \frac{1}{n} \implies X$$

**Exercice 4.4** (Théorème de Slutsky) Supposer que

$$X_n \implies X, \quad Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} c$$

où  $c$  est une constante. Montrer que

$$(i) \quad X_n + Y_n \implies X + c$$

$$(ii) \quad X_n Y_n \implies cX$$

où  $c \neq 0$  dans le dernier cas.

**Exercice 4.5** Si  $c \in \mathbb{R}$ , montrer que

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} c \implies X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} c$$

**Exercice 4.6** Soit  $(X_n)$  telle que  $X_n \implies X$ . Considérer une autre suite  $(Z_n)$  et montrer que

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} X \wedge Z_n - X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} 0 \implies Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} X$$

**Exercice 4.7** Soit  $(X_n)$  et  $(Y_n)$  deux suites de v.a. convergeant en loi respectivement vers  $X$  et  $Y$ .

- (a) Supposons que  $(X_n)$  et  $(Y_n)$  soient indépendantes et que  $X$  et  $Y$  le soient aussi. Montrer que  $X_n + Y_n$  converge en loi vers  $X + Y$ . Donner un exemple qui montre que sans l'hypothèse d'indépendance, on peut perdre la convergence.
- (b) Supposer que  $Y = 0$ . Montrer que  $X_n + Y_n \implies X$  et  $X_n Y_n \implies 0$

**Exercice 4.8** Si  $X_n \implies X$ , montrer qu'il est généralement faux d'avoir  $X_n - X \implies 0$ .

**Exercice 4.9** Soit  $(X_n)$  une suite de v.a. de f.r. respectives définies par

$$F_n(x) = x - \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}, \quad x \in [0, 1]$$

Montrer que  $X_n \implies U$  mais que les d.p. ne convergent pas vers la d.p. de  $U$ .

**Exercice 4.10** Soit  $(X_n)$  une suite de v.a. de distributions respectives  $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ . Supposer que  $X_n \Rightarrow X$ .

(a) Montrer que  $(\sigma_n^2)$  converge. En déduite que  $X$  est normale. Ensuite, étudier le cas de v.a. non centrées.

(b) Montrer qu'il est vrai que

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X \implies X \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^p} X$$

**Exercice 4.11 (Intégration de Monte Carlo)** Soit  $U_1, U_2, \dots$ , des v.a. i.i.d. de loi  $U_{[0,1]}$ . Supposer que l'on ait

$$\int_0^1 |f(x)| dx < \infty$$

Montrer que

$$I_n := \frac{f(U_1) + \dots + f(U_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \int_0^1 f(x) dx =: I$$

Ensuite, supposer que  $\int_0^1 f(x)^2 dx < \infty$  et estimer  $P(|I_n - I| > a/\sqrt{n})$ .