Chapitre 3 : Espaces euclidiens

Table des matières

Introduction

Dans tout ce chapitre K désignera un corps commutatif et E un K-espace vectoriel.

3.1 Produit scalaire

1. Produit scalaire

Définition 3.1 *Définition*

On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive. Il est noté par $\langle . , . \rangle$ ou <.I.>. C-à-d.

1. $\langle . , . \rangle$ forme bilinéaire symétrique.
2. $\forall x \in E$, $\langle x, x \rangle \geq 0$ avec égalité seulement pour $x = 0$. $(\forall x \in E \backslash \{0\}, \langle x, x \rangle > 0)$.

Exemple 3.1 *Exemple*

1. Soit $E = \mathbb{R}^n$, la forme linéaire $\langle . , . \rangle$ sur E définie par : $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i =^t X.Y$ est un produit scalaire appelé produit scalaire canonique (ou usuel) de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $E = C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[a, b]$, la forme linéaire $\langle . , . \rangle$ sur Edéfinie par : $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire.
3. $E = M_n(K)$ l'espace des matrices carrées, $\langle A, B \rangle = Tr\left({}^t A.B\right)$ est un produit scalaire.

3.2 Espace euclidien

1. Espace euclidien

Définition 3.2 *Définition*

Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

En général tout espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est appelé espace **préhilbertien**.

Définition 3.3 (La norme) *Définition*

Soit E un espace préhilbertien, l'application :

$$\begin{aligned} \|.\| : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{aligned}$$

est appelée norme associée au produit scalaire.

Si E est un espace euclidien, $\|.\|$ est appelée norme euclidienne.

De plus l'application

$$\begin{aligned} d : E \times E &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

est appelée **distance euclidienne**.

Proposition 3.1 (Propriétés de la norme) *Fondamental*

1. Pour tout $x \in E, \|x\| \geq 0 \; et \; \|x\| > 0 \; si \; x \neq 0$.
2. Pour tout $x \in E \; et \; tout \; \lambda \in K, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. Si $x \in E \backslash \{0\}, \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1, \$\$ \frac{x}{\|x\|}$ est appelé vecteur unitaire de E.
4. **(Inégalité de Cauchy-Schwarz)** Pour tout $x, y \in E, |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$, avec égalité si x, y sont liés.
5. **(Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$)**

   $\left|\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \text{ ou } \left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2$.
6. **(Inégalité de Minkovski ou inégalité triangulaire)**

   Pour tout $x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, avec égalité si $x = 0$ ou $y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}_+$.
7. Pour tout $x, y \in E, \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$.
8. **(Théorème de Pythagore)**

   Les vecteurs x, y de E sont orthogonaux si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

3.3 Orthogonalité

1. Orthogonalité

Définition 3.4 (Base orthogonale) *Définition*

Soit E un espace euclidien muni d'une base $B = (u_1, \ldots, u_n)$. La base B est dite orthogonale si les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont deux à deux orthogonaux. C.à.d. $\langle u_i, u_j \rangle = 0, i \neq j$.

Elle est dite orthonormée si $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Exemple 3.2 *Exemple*

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i =^t X.Y$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée. En effet

1. Pour tout $i \in [1, n]$, $\langle e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|e_i\|^2 = 1$ d'où $\|e_i\| = 1$.
2. Pour tout $i, j \in [1, n], i \neq j$: $\langle e_i, e_j \rangle = 0$.

Proposition 3.2 *Fondamental*

Toute famille orthogonale $B = \{u_1, \ldots, u_p\}_{p \leq n}$ de E est libre.

Preuve :

En effet, soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_p u_p = 0$.

Soit $u_k \in B$, d'où on a $\langle u_k, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i \rangle = 0$,

alors $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \langle u_k, u_i \rangle = 0$,

mais $\langle u_k, u_i \rangle = 0$ *pour tout* $i \neq k$, d'où $\alpha_k \langle u_k, u_k \rangle = 0$. Puisque $u_k \neq 0$, on déduit que $\alpha_k = 0$ pour tout k de $[1, p]$. D'où la familles B est libre.

Théorème 3.1 (Existence d'une base orthonormée) *Fondamental*

Tout espace euclidien admet des bases orthonormées pour son produit scalaire.

Théorème 3.2 (Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt) *Fondamental*

Soit E un espace euclidien. On peut construire à partir d'une base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de E une base orthogonale $B' = (u_1, \ldots, u_n)$. La normalisation étant ensuite évidente en prenant $w_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}, 1 \leq i \leq n$, on obtient une base orthonormée $\{w_1, \ldots, w_n\}$.

Preuve :(Algorithme de Gram-Schmidt)

On prend

$$u_1 = v_1$$
$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1$$
$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$
$$\vdots$$
$$u_n = v_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, u_k \rangle}{\|u_k\|^2} u_k.$$

Donc pour tout $i \in [2, n], u_i = v_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle v_i, u_k \rangle}{\|u_k\|^2} u_k$. On peut vérifier facilement que pour tout $i \neq j$, $$\langle u_i, u_j \rangle = 0,$

d'où on obtient une base orthogonale $B' = (u_1, \ldots, u_n)$ pour E.

Il est évident que $\left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \ldots, \frac{u_n}{\|u_n\|} \right)$ est une base orthonormée pour E.

Exemple 3.3 *Exemple*

Soit $B = \{v_1 = (1, -1), v_2 = (1, 2)\}$ une base pour $\mathbb{R}^2$.

Calculer une base orthonormée pour $\mathbb{R}^2$ à partir de$B$.

Solution :

D'après le procédé de Gram-Schmidt on a

$$u_1 = v_1 = (1, -1)$$
$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = (1, 2) - \frac{1-2}{2}(1, -1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

On remarque que $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$, d'où $\left\{ u_1 = (1, -1), u_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right) \right\}$ est une base orthogonale pour $\mathbb{R}^2$ et $B' = \left\{ u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1), u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) \right\}$ est une base orthogonale pour $\mathbb{R}^2$.

Proposition 3.3 *Fondamental*

Soit Eun espace euclidien et F un sous-espace de E, on a

$(1) F^{\perp} = \{x \in E, \ \forall y \in F : \langle x, y \rangle = 0\}$

$(2) \left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$

$(3) E = F \oplus F^{\perp}$ (ou $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$)

$(4) F^{\perp}$ est l'unique supplémentaire de F orthogonale à F.

3.4 Matrices orthogonales

1. Matrices orthogonales

Définition 3.5 *Définition*

On appelle matrice orthogonale toute matrice carrée réelle P d'ordre n telle que ${}^tPP = I_n$. C-` a-d. c'est une matrice inversible et son inverse égale à sa transposée.

Corollaire 3.1 *Fondamental*

Les vecteurs colonnes d'une matrice orthogonale forment une base orthonormée pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 3.3 *Fondamental*

Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée B. Une nouvelle base B' de E est orthonormée pour ce produit scalaire **ssi** la matrice de passage de B à B' est orthogonale.

Preuve :

En effet si $B = (e_1, \dots, e_n)$, $B' = (u_1, \dots, u_n)$ sont deux bases orthonormées de E, alors

$$P = P_B(B') = \left([u_1]_B \quad \cdots \quad [u_n]_B\right) = Mat(Id_E, B', B)$$

$$= \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u_1 & \cdots & u_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array},$$

d'où on a

$$ {}^tPP = \begin{array}{cc} & \\ \begin{array}{c} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{array} & \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & \cdots & u_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1\rangle & \cdots & \langle u_1, u_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_n, u_1\rangle & \cdots & \langle u_n, u_n\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \left(\langle u_i, u_j\rangle\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} p_{ki}p_{kj}\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Puisque B' est orthonormée, alors pour tout $i, j \in [1, n]$, $\langle u_i, u_j\rangle = 0$, si $i \neq j$ et $\langle u_i, u_i\rangle = 1$, d'où ${}^tPP = I_n$ et donc P est orthogonale.

Réciproquement : Soient B, B' deux bases de E telle que$B$ est orthonormée et $P_B(B')$ est orthogonale. Montrons que B' est une base orthonormée. On a

$$P_B(B') = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u_1 & \cdots & u_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

$${}^tP = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{array},$$

d'où

${}^tPP = I_n \iff \left(\sum_{k=1}^n p_{ki}p_{kj}\right)_{1\leq i,j\leq n} = (\langle u_i, u_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n} = I_n$, pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, on obtient par identification pour tout $i, j \in [1, n]$, $\langle u_i, u_j\rangle = 0, \$si\$i \neq j\$et\$\langle u_i, u_i\rangle = 1$. D'où B' est orthonormée.

Exemple 3.4 ***Exemple***

La matrice

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 7 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \\ 8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale.

En effet ${}^tAA = I_3$, et on pourra aussi vérifier que ces vecteurs colonnes forment une base orthonormée pour $\mathbb{R}^3$.

Proposition 3.4 ***Fondamental***

Les seuls valeurs propres possibles dans $\mathbb{R}$ d'une matrice orthogonale $A \in M_n(\mathbb{R})$ sont -1 et 1.

Preuve :

Soit λ une valeur propre de A, où A est orthogonale, d'où on a

$\exists v \in E\backslash\{0\} : Av = \lambda v.$

Alors

$\langle Av, Av\rangle =^t (Av)Av =^t v({}^tAA)v =^t vv = \langle v, v\rangle = \|v\|^2$, (3.1)

d'autre part on a

$\langle Av, Av\rangle =^t (Av)Av =^t (\lambda v)\lambda v = \lambda^2({}^tvv) = \lambda^2\langle v, v\rangle = \lambda^2\|v\|^2$. (3.2)

De (3.1) et (3.2) on obtient

$$\begin{aligned} \lambda^2\|v\|^2 = \|v\|^2 &\Longrightarrow \lambda^2 = 1 \\ &\Longrightarrow \lambda = \pm 1. \end{aligned}$$

3.5 Diagonalisation des matrices symétriques réelles

V

1. Introduction

Si $A = (a_{ij})_n$ est une matrice carrée d'ordre n, on définit la transposée de A en posant : ${}^tA = (a_{ji})_n$. On peut voir les matrices symétriques comme les matrices invariantes par transposition, on dit que A est symétrique si ${}^tA = A$.

La diagonalisation des matrices symétriques repose sur l'interprétation de la transposition en termes d'endomorphismes. La question est : que peut-on dire d'un endomorphisme dont la matrice est symétrique? Ou encore : si f est un endomorphisme de matrice M, que peut-on dire de l'endomorphisme défini par ${}^tM$? C'est ici qu'intervient le produit scalaire.

2. 1. Adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Soient E un espace euclidien, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée, f un endomorphisme de E et x, y deux vecteurs de E. On pose $X = mat_B(x), Y = mat_B(y), et\ A = mat_B(f)$. On a

$$\begin{aligned}\langle f(x), y\rangle &= {}^t(AX)Y \\ &= {}^tX({}^tAY) \\ &= \langle x, f^*(y)\rangle,\end{aligned}$$

où f^* est l'endomorphisme de E défini par $f^*(y) =^t AY$, d'où $mat_B(f^*) =^t A$.

Ainsi, le transposé de A revient à définir l'endomorphisme qui permet de commuter f dans $< f(x), y >$.

Commuter signifie ici que pour tous $x, y \in E$ on a $< f(x), y >=< x, f^*(y)$.

On notera que

1. Il n'y a qu'un seul endomorphisme f^* permettant de commuter f dans $< f(x), y >$.

2. La matrice de f^* dans une base orthonormée s'obtient en transposant celle de f.

Définition 3.6 *Définition*

Soient E un espace euclidien et $f \in L(E)$. L'adjoint de f est l'endomorphisme f^* de E tel que $< f(x), y >=< x, f^*(y)$ pour tout $x, y \in E$.

Les propriétés de la transposition des matrices se traduisent en termes d'endomorphismes comme suit :

Proposition 3.5 *Fondamental*

Soient E un espace euclidien, $\lambda \in R$ et $f, g \in L(E)$.

1. $f^{**} = f$
2. $Id^* = Id$
3. $(f+g)^* = f^* + g^*$

4. $(\lambda f)^* = \lambda f^*$
5. $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
6. $rang(f^*) = rang(f)$
7. $\det mat_B(f^*) = \det mat_B(f)$

   On notera que l'application linéaire

   $$\begin{aligned} M_n(\mathbb{R}) &\to M_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto {}^tA \end{aligned}$$

   se traduit par l'application linéaire

   $$\begin{aligned} L(E) &\to L(E) \\ f &\mapsto f^* \end{aligned}$$

   On peut utiliser cette application pour caractériser les endomorphismes orthogonaux.

Proposition 3.6 *Fondamental*

Soient E un espace euclidien et $f \in L(E)$. Alors f est orthogonal si et seulement si $f^{-1} = f^*$ (où $f^* \circ f = Id_E$).

L'endomorphisme orthogonal conserve le produit scalaire, c-`a-d, si pour tous $x, y \in E$, on a : $< f(x), f(y) >=< x, y >$, il est appelé aussi une isométrie.

Définition 3.7 *Définition*

Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme f de E est dit normal (relativement au produit scalaire de E), s'il commute avec son adjoint.

Il s'agit donc d'un endomorphisme f vérifiant l'égalité $f^* \circ f = f \circ f^*$. On peut aussi dire que f est normal si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée quelconque commute avec sa transposée.

Théorème 3.4 *Fondamental*

Soient E un espace euclidien, $f \in L(E)$ et F un sous-espace de E. Si F est stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f^*.

Preuve :

On suppose que F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, c-`a-d. $f(F) \subset F$.

Soit $y \in F^\perp$, pour tout $x \in F$, on a $f(x) \in F$, d'où $0 = \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.

Ainsi $f^*(y) \in F^\perp$, d'où $f^*(F^\perp) \subset F^\perp$, ce qui preuve que $F^\perp$ est stable par f^*.

Lemme 3.1 *Fondamental*

Soit f un endomorphisme quelconque d'un espace euclidien E, et soit F un sous-espace de E. Si F est stable par f et par f^*, il en est de même de $F^\perp$.

Preuve :

Si $y \in F^\perp$, on a pour tout $x \in F$,

$\langle f(y), x \rangle = \langle y, f^*(x) \rangle = 0$, ce qui montre que $F^\perp$ est stable par f^*.

Lemme 3.2 — *Fondamental*

Si l'endomorphisme f de l'espace euclidien E est normal, alors f et f^* ont les mêmes valeurs propres, et pour chaque valeur propre, ils ont le même sous-espace propre.

Preuve :

En effet, soit λ une valeur propre de f. Le sous-espace propre correspondant E_λ est le noyau de $f - \lambda Id$. Il est donc stable par f et par f^*. Pour tous x et y dans E_λ, on a :

$\langle x, f^*(y)\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle = \langle x, \lambda y\rangle,$

ce qui montre que $f^*(y) = \lambda y$ pour tout y de E_λ. E_λ est donc contenu dans le sous-espace propre de f^* pour la valeur propre λ. En permutant les rôles de f et f^*, on voit qu'il lui est égal.

3. 2. Endomorphisme auto-adjoint

Soient E un espace euclidien et $f \in L(E)$.

Définition 3.8 — *Définition*

On dit que f est un endomorphisme auto-adjoint ou symétrique ssi $f = f^*$ ou $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.

Proposition 3.7 — *Fondamental*

1) f est auto-adjoint ssi il existe une base orthonormée de E dans laquelle sa matrice est symétrique.

2) f est auto-adjoint ssi dans toute base orthonormée de E sa matrice est symétrique.

Preuve :

Soit B une base orthonormée de E, $f \in L(E)$ et $A = mat_B(f)$.

Si f est symétrique (auto-adjoint) on a $f = f^*$ et ${}^tA = A$, donc A est symétrique.

Réciproquement : Si $A \in S_n(R)$ matrice symétrique, en notant $X = mat_B(x), Y = matmat_B(y)$, pour tout $x, y \in E$ on a $\langle f(x), y\rangle =^t (AX)Y =^t X\left({}^tAY\right) =^t X(AY) = \langle x, f(y)\rangle$, d'où $f = f^*$, f est auto-adjoint.

Exercice — *Exemple*

Soit $E = R_n[X]$. On pose :

$\forall(P, Q) \in E^2, \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1}\left(1 - x^2\right)P(x)Q(x)dx.$

Montrer que $\langle . , . \rangle$ est un produit scalaire sur E.

On pose : $\forall P \in E, \phi(P) = \left(\left(x^2 - 1\right)P\right)''$.

Montrer que ϕ est un endomorphisme symétrique de $(E, \langle . , . \rangle)$.

4. 3. Diagonalisation des matrices symétriques

Alors qu'une matrice réelle n'a pas forcement de valeurs propres réelles, par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres i et $-i$ dans l'ensemble des nombres complexes C.

Nous allons montrer qu'une matrice symétrique réelle ou de manière équivalente, un endomorphisme symétrique a toute ses valeurs propres réelles et est diagonalisable dans une base orthonormée.

Lemme 3.3 *Fondamental*

Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles.

Preuve : Soient λ une valeur propre complexe de $A \in S_n(R) \subset M_n(C)$ et x un vecteur propre associé à λ. On a

$AX = \lambda X,$

qui par conjugaison complexe donne

$\overline{A}\,\overline{X} = A\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$, A est réelle donc $\overline{A} = A$.

D'où

${}^tXAX = {}^t X\overline{\lambda}\overline{X} = \overline{\lambda}.{}^t X\overline{X} = \overline{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2, \ldots$ (3.3)

car $x_i\overline{x_i} = |x_i|^2$ où $|x_i|$ c'est le module de x_i. On a aussi, du fait que A est symétrique

${}^tXAX = {}^t(AX)\overline{X} = {}^t(\lambda X)\overline{X} = \lambda.{}^t X\overline{X} = \lambda\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 \ldots.$ (3.4)

De (3.3) et (3.4) on déduit que $\overline{\lambda} = \lambda$, car $\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 \neq 0,$

d'où λ est réelle.

De lemme précèdent on déduit le résultat suivant

Corollaire 3.1 *Fondamental*

Toute matrice symétrique réelle a n valeurs propres réelles distinctes ou confondues.

Preuve : En effet, $P_A(\lambda)$ le polynôme caractéristique de $A \in S_n(\mathbb{R})$ est de degré n qui admet toutes ses racines dans $\mathbb{R}$.

Lemme 3.4 *Fondamental*

On suppose que $n \geq 2$.

Si λ, μ sont deux valeurs propres distinctes de $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors les sous-espaces

propres E_λ et E_μ sont orthogonaux.

Preuve :

Soit f l'endomorphisme associé `a A, pour tout $x \in E_\lambda$ et tout $y \in E_\mu$, on a

$\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu\langle x, y\rangle,$

d'où

$(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0.$

Puisque $\lambda \neq \mu$, on d´déduit que $\langle x, y\rangle = 0$. D'où E_λ et E_μ sont orthogonaux.

Proposition 3.8 *Fondamental*

On suppose que $n \geq 2$.

Si λ_1 est une valeur propre de $f \in S(E)$ (ou de $A \in S_n(\mathbb{R})$), e_1 un vecteur propre associé `a $\lambda_1$ de norme ´égale `a 1 ($\|e_1\| = 1$), alors l'hyperplan $H = (\mathbb{R}e_1)^\perp$ est stable par f et la restriction de f `a H est symétrique.

Preuve :

H est un hyperplan puisque c'est le noyau de la forme linéaire non nulle

$$\begin{aligned} l : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle x, e_1 \rangle \end{aligned}$$

Pour tout $x \in H$, on a

$\langle f(x), e_1 \rangle = \langle x, f(e_1) \rangle = \langle x, \lambda_1 e_1 \rangle = \lambda_1 \langle x, e_1 \rangle = 0,$

et donc $f(x) \in H$.

La restriction g de f ` a H est donc un endomorphisme de H.

En désignant par $(e_i)_{2\le i\le n}$ une base orthonormée de H (procédé de Gram-Schmidt), $B_1 = (e_i)_{1\le i\le n}$ est une base orthonormée de E et la matrice de f dans cette base est

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

o ` u $B \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ est la matrice de g dans $(e_i)_{1\le i\le n}$. Comme f est symétrique, il en est de même de A_1, donc de B et de g.

Théorème 3.5 (Spectral) ***Fondamental***

Soit A une matrice symétrique de $S_n(\mathbb{R})$. Alors, on a les propriétés ´équivalentes suivantes

1. A est diagonalisable.
2. Il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de A.
3. Il existe une matrice orthogonale $P \in M_n(\mathbb{R})$, telle que $P^{-1}AP =^t PAP = D$ soit diagonale.

En termes d'endomorphismes on a le théorème spectral suivant

Théorème 3.6 ***Fondamental***

Soit $f \in S(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors, on a les propriétés ´équivalentes suivantes

1. f est diagonalisable.
2. Il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f.

Exemple 3.5 ***Exemple***

Diagonaliser la matrice suivante dans une base orthonormée.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution : Le polynôme caractéristique de A est $P_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda+2)^2$,

donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ v.p.s. et $\lambda_2 = -2$ v.p.d. et les vecteurs propres associés sont : $v_1 = (1,1,1)$ pour λ_1 et $v_2 = (-1,1,0), v_3 = (-1,0,1)$ pour \(\lambda_{2}\). On remarque que

$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle = 0$ mais $\langle v_2, v_3 \rangle = 1 \neq 0.$

En utilisant le procédé de Gram-Schmidt pour $\{v_2, v_3\}$, on obtient deux vecteurs orthogonaux.

$$u_2 = v_2$$
$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = -\frac{1}{2}(1,1,-2),$$

si on pose $u_1 = v_1$, on obtient une base orthogonale $B = \{u_1, u_2, u_3\}$pour $\mathbb{R}^3$.

D'où une base orthonormée

$$\left\{w_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), w_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), w_3 = -\tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\right\}$$

pour $\mathbb{R}^3$. D'où A est diagonalisable telle que

$$^tPAP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

où

$$P = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale.

Exercice 3.2 ***Exemple***

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Prouver que la suite de matrices (M^n) converge.

Soit $N = \lim\limits_{n\to\infty} M^n$. Caractériser géométriquement l'endomorphisme associé ` a N.

Soit (X_n) la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ d ´définie par $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et $X_{n+1} = MX_n$.

Prouver que la suite (X_n) converge et d ´déterminer sa limite en fonction de u_0, v_0 et w_0.