COURS D'ALGEBRE 4

DR. AMMAR BOUDELIOU

Université Constantine 1 Frères Mentouri

Faculté des sciences exactes

Département de mathématiques

Email : ammar_boudeliou@umc.edu.dz

Janvier 2024

Table des matières

Objectifs

Les objectifs visé de ce cours sont :

- Exposer quelques notions et théorèmes nécessaires des formes linéaires et la dualité
- Connaitre les formes bilinéaires symétriques et leur propriétés
- Comprendre les espace euclidiens, produit scalaire
- L'objectif principal de ce cours est connaître les méthodes de la réduction des formes quadratiques
- Etude des formes hermitiennes

Introduction

L'ouvrage que nous présentons ici peut servir comme support d'algèbre bilinéaire destiné aux étudiants de la licence LMD, en particulier pour les étudiants de 2ème année (Maths) et il peut aussi servir aux étudiants des sciences et technologie. Depuis quelques années, l'algèbre linéaire et bilinéaire est devenue une partie essentielle du bagage mathématique nécessaire aux ingénieurs, physiciens et autres scientifiques. Ce besoin reflète l'importance et les applications étendues du sujet.

Ce polycopié est destiné à être utilisé comme manuel pour un cours d'algèbre bilinéaire ou comme supplément à d'autres

ouvrages. Il vise à présenter des notions de base de l'algèbre bilinéaire qui seront utiles à tous les lecteurs quelle que soit leur spécialisation. Il est inclus plus de matière que l'on en peut insérer dans la plupart des cours d'algèbre bilinéaire. Ceci a été fait dans le but de rendre l'ouvrage plus souple, de fournir un livre de référence utile et stimuler l'intérêt porté à cette matière.

Chaque chapitre comprend des énoncés clairs de définitions de principes et de théorèmes avec démonstrations, des éléments d'illustration et de description et des exemples qui servent à illustrer et à amplifier la théorie, à mettre au point de façon précise les passages délicats, sans lesquels l'étudiant se sent constamment sur un terrain incertain, et à permettre la répétition des principes fondamentaux, si essentiels à une étude efficace. Cet ouvrage est enrichi par une biographie de quelques savants cités dans le cours.

Le premier chapitre est consacré à la présentation de différentes notions sur les formes linéaires et dualité. le deuxième chapitre et consacré à l'étude des formes bilinéaires définies sur un espace vectoriel de dimension finie où on donne des définitions, la matrice d'une forme bilinéaire, changement de base, noyau et rang d'une forme bilinéaire, équivalence entre formes bilinéaires et orthogonalité par rapport à une forme bilinéaire. Dans le troisième chapitre on présente des notions essentielles concernant : le produit scalaire, les espaces euclidiens, l'orthogonalité, les matrices orthogonales et la diagonalisation des matrices symétriques réelles. En quatrième chapitre nous nous intéressons à l'étude des formes quadratiques et ses réduction qui est notre but principal de ce polycopié. On termine notre polycopié par la donnée des notions de bases sur les formes hermitiennes.

Chapitre 1 : FORMES LINÉAIRES ET DUALITÉ

1. Introduction

Dans tout ce chapitre K désignera un corps commutatif et E un K-espace vectoriel (de dimension finie ou non).

2. Formes linéaires, espace dual

Définition 1.1 *Définition*

Soit E un K espace vectoriel. On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans K.

On appelle espace dual de E, noté E^*, l'espace vectoriel des formes linéaires sur E. Autrement dit, $E^* = L(E, K)$ et $\varphi \in E^*$ signifie que $\varphi : E \to K$ est une application linéaire telle que : $\forall (x, y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2, \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$.

Exemple 1.1 *Exemple*

1. L'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2x + y$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.
2. L'application nulle de E dans K est une forme linéaire, appelée forme nulle sur E.
3. Si $E = K[X]$ l'espace des polynômes à coefficients dans K, alors pour tout $a \in K$, l'application $P \mapsto P(a)$ est une forme linéaire sur E.
4. Si $E = C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[a, b]$, alors l'application $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire sur E.
5. Si $E = M_n(K)$, alors l'application trace : $A = (a_{ij}) \mapsto tr(A) = \sum_1^n a_{ii}$ est une forme linéaire sur E.
6. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Tout élément $x \in E$ s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = \sum_1^n x_i e_i$.

   Pour chaque $j \in [1, n]$, l'application $e_j^* : E \to K, x \mapsto e_j^*(x) = x_j$ est une forme linéaire sur E, appelée $j^{ème}$ forme coordonnée relative à la base B.

Proposition 1.1 *Fondamental*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$.
- L'application de K^n dans K qui à tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ associe le scalaire $\varphi(x) = \sum_1^n \lambda_j x_j$, est une forme linéaire sur K^n. Réciproquement, pour toute forme linéaire φ sur K^n, il existe un n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ tel que pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, on ait $\varphi(x) = \sum_1^n \lambda_j x_j$.

Preuve :

Le premier point résulte d'une vérification directe.

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de K^n et soit $\varphi : K^n \to K$ une forme linéaire sur K^n.

Tout élément $x \in K^n$ s'écrit d'une façon unique sous la forme $x = \sum_1^n x_j e_j$ et donc $\varphi(x) = \sum_1^n x_j \varphi(e_j)$. D'où l'existence et l'unicité des $\lambda_j = \varphi(e_j), 1 \leq j \leq n$.

Proposition 1.2 *Fondamental*

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Alors son dual E^* est de dimension finie et $\dim E = \dim E^*$.

Preuve : En effet, $\dim E^* = \dim L(E, K) = \dim E \times \dim K = \dim E$.

3. Hyperplan

Définition 1.2 *Définition*

Soit E un K-espace vectoriel. On appel ***hyperplan*** de E, le noyau de toute forme linéaire sur E autre que la forme nulle.

Autrement dit, une partie H de E est un hyperplan de E s'il existe $\varphi \in E^* \backslash \{0\}$ telle que $H = \ker(\varphi)$. On dit alors que la relation $\varphi(x) = 0$ est une équation de l'hyperplan H.

Exemple 1.2 *Exemple*

a) $H = \{A \in M_n(K); Tr(A) = 0\}$ est un hyperplan de $M_n(K)$.

b) $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 3y + z = 0\right\}$est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

c) $H = \{P \in K[X]; P(0) = 0\}$ est un hyperplan de $K[X]$.

Proposition 1.3 *Fondamental*

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) H est un hyperplan de E.

b) Il existe dans E une droite vectorielle D supplémentaire de H telle que $E = H \oplus D$.

Si E est de dimension finie, les conditions précédentes sont équivalentes à

c) $\dim(H) = \dim(E) - 1$ (autrement dit, H est de codimension 1).

d) Toute droite vectorielle de E engendrée par un vecteur n'appartenant pas à H est un supplémentaire de H.

Preuve :

$a) \Rightarrow b)$: Si H est un hyperplan de E, il existe $\varphi \in E^* \backslash \{0\}$ telle que $H = \ker(\varphi)$. Puisqueφ n'est pas nulle, il existe $v \in E$ tel que $\varphi(v) \neq 0$.

Considérons la droite vectorielle $D = Kv$ et montrons que $E = H \oplus D$. Soit $x \in H \cap D$. Il existe $\lambda \in K$ tel que $x = \lambda v$ et $\varphi(x) = 0$, donc \lambda $\varphi(v) = \varphi(\lambda v) = 0$. Comme $\varphi(v)$ est non nul, on déduit que $\lambda = 0$ et $x = 0$. Ainsi $H \cap D = \{0\}$. Soit $x \in E$ et montrons que $x \in H + D$. Soit $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)}$ et posons $y = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)} v$ qui est un élément de H puisque $\varphi(y) = \varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)} v\right) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(v)} \varphi(v) = 0$. D'où $x = y + \lambda v \in H + D$.

c) Si E est de dimension finie, on a $dimker(\varphi) + \dim Im(\varphi) = \dim E$. D'où $dimH + dimK = dimE$, alors $dim(H) = dim(E) - 1$ (puisque $dimK = 1$).

Remarque 1.1 *Complément*

Si E est de dimension finie n et $B = (e_j)_{j=1}^{n}$ une base de E. Relativement à la base B un hyperplan H de E admet une équation unique, de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$ où on a noté $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées des vecteurs $x \in E$ par rapport à B.

Corollaire 1.1 *Complément*

Deux formes linéaires non nulles sur un espace vectoriel E sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau.

Preuve :

Soit $\varphi, \psi \in E^* \backslash \{0\}$. Supposons que $\ker(\varphi) = \ker(\psi) = H$. Soit $v \notin H$ (donc $\varphi(v)$ et $\psi(v)$ ne sont pas nuls). Posons $\alpha = \frac{\varphi(v)}{\psi(v)}$ et montrons que $\varphi = \alpha\psi$. Soit $x \in E$, d'après la proposition précédente $E = H \oplus Kv$, donc x s'écrit $x = y + \lambda v$ avec $y \in H$ et $\lambda \in K$. D'où $\varphi(x) = \varphi(y) + \lambda\varphi(v) = \lambda\varphi(v) = \lambda(\alpha\psi(v)) = \alpha(\psi(y) + \lambda\psi(v)) = \alpha\psi(x)$. Donc φ et ψ sont proportionnelles.

La réciproque est immédiate car

$$\begin{aligned}\ker(\varphi) &= \{x \in E : \varphi(x) = 0\} \\ &= \{x \in E : \alpha\psi(x) = 0, \alpha \neq 0\} \\ &= \{x \in E : \psi(x) = 0\} \\ &= \ker(\psi).\end{aligned}$$

4. Base duale

Proposition 1.4 *Fondamental*

Soit $B = (e_j)_{j=1}^{n}$ une base d'un un espace vectoriel de dimension finie E. La famille des formes coordonnées $B^* = (e_i^*)_{i=1}^{n}$ est une base de l'espace dual E^*, appelée base duale de la base B.

De plus, pour tout $i, j \in [1, n]$, on a les relations d'orthogonalité de Kronecker :

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{si } i = j \\ 0 \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Preuve :

Par définition $e_i^* : E \to K, x = \sum_1^n x_j e_j \mapsto e_i^*(x) = x_i$.

Donc $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ pour tout $i, j \in [1, n]$.

Soit $\varphi \in E^*$ et considérons la forme linéaire $\phi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)e_i^*$. Pour tout $j \in [1, n]$, on a $\phi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)e_i^*(e_j) = \varphi(e_j)$. Les formes linéaires φ et ϕ coïncident sur une base de E sont donc égales.

Par conséquent, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)e_i^*$, et la famille B^* est une famille génératrice de E^*. Comme $\dim E^* = \dim E = n$, la famille B^* est une base de E^*.

Corollaire 1.2 *Complément*

Soient $B = (e_j)_{j=1}^n$ une base de E et $B^* = (e_i^*)_{i=1}^n$ sa base duale, alors on a les relations suivantes :

▶ $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i$.

▶ $\forall \varphi \in E^*, \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$.

▶ $\forall f \in L(E), a_{ij} = e_i^*(f(e_j))$, où $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = Mat_B(f)$.

Proposition 1.5 *Fondamental*

a) Si φ est une forme linéaire non nulle sur E, il existe un vecteur $x \in E$ (non nul) tel que $\varphi(x) = 1$.

b) Si x est un vecteur non nul de E, il existe une forme linéaire $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = 1$.

Preuve :

a) Si $\varphi \in E^* \backslash \{0\}$, alors il existe $v \in E$ tel que $\varphi(v) \neq 0$. Le vecteur $x = \frac{v}{\varphi(v)}$ convient.

b) Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ est non nul, alors il existe $i_0 \in [1, n]$ tel que $e_{i_0}^*(x) = x_{i_0} \neq 0$. La forme linéaire $\varphi = \frac{1}{e_{i_0}^*(x)} e_{i_0}^*$ convient.

Proposition 1.6 *Fondamental*

Toute base de E^* est la base duale d'une unique base de E, appelée base préduale.

Preuve :

Soit $F = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base de E^* . L'application $\Phi : x \mapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ de E dans K^n est linéaire. Soit $x \in \ker(\Phi)$, donc $\varphi_1(x) = \ldots = \varphi_n(x) = 0$. Si x n'est pas nul, alors d'après la proposition précédente, il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) = 1$ Cette forme linéaire s'écrit dans la base F sous la forme $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$.

Par conséquent $1 = \varphi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(x) = 0$ ce qui est absurde. On en déduit que $x = 0$, et donc le noyau de Φ est réduit à $\{0\}$ et que Φ est injective. Comme $\dim(E) = n = \dim(K^n)$, l'application Φ est un isomorphisme.

Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de K^n. Pour tout j, un vecteur e_j vérifie $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$ pour tout i si et seulement si $\Phi(e_j) = e_j$. Puisque Φ est un isomorphisme, la famille $B = \left(\Phi^{-1}(e_1), \ldots, \Phi^{-1}(e_n)\right)$ est une base de E et c'est la seule famille de E satisfaisant aux conditions de Kronecker. Par conséquent, B est l'unique base de E dont F est la base duale.

Proposition 1.7 (Changement de base duale) *Fondamental*

Soient B_1 et B_2 deux bases de E, et soit P la matrice de passage de B_1 à B_2. Alors la matrice de passage de B_1^* à B_2^* est ${}^tP^{-1}$.

Preuve :

Posons $B_1 = (e_1, \ldots, e_n), B_2 = (f_1, \ldots, f_n)$ et $P = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, puis notons $Q = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de passage de B_1^* à B_2^*. Par définition de la matrice de passage on a pour tout $k \in [1, n]$, $f_k = \sum_{l=1}^n a_{lk} e_l$ et pour tout $j \in [1, n]$, $f_j^* = \sum_{l=1}^n b_{lj} e_l^*$. Donc pour tout $j, k \in [1, n]$,

$$\begin{aligned}\delta_{jk} = f_j^*(f_k) &= \left(\sum_{l=1}^{n} b_{ij} e_i^*\right)\left(\sum_{l=1}^{n} a_{lk} e_l\right)\\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} b_{ij} a_{lk} \delta_{il}\\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{ij} a_{ik}\\ &= \left({}^tQP\right)_{jk}.\end{aligned}$$

Donc ${}^tQP = I_n$ et $Q =^t P^{-1}$.

Corollaire 1.3 (Calcul pratique de la base duale) *Complément*

Soient $B_0 = (e_i)_{i=1}^n$ la base canonique de E et $B_0^* = (e_i^*)_{i=1}^n$ sa base duale. Soit $B = (v_i)_{i=1}^n$ une autre base de E et $B^* = (v_i^*)_{i=1}^n$ sa base duale. Les vecteurs v_i (respectivement v_i^*) étant exprimés dans la base B_0 (respectivement B_0^*). Alors $Mat_{B_0^*}(B^*) =^t (Mat_{B_0}(B))^{-1}$.

Exemple 1.3 *Exemple*

a) Soient les vecteurs $v_1 = (-3, -1, 1), v_2 = (5, 2, -1), v_3 = (6, 2, -1)$ de $\mathbb{R}^3$ exprimés dans la base canonique (e_1, e_2, e_3).

La famille $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puisque la matrice

$P = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6\\ -1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ est inversible de déterminant -1. Déterminons sa base duale.

Solution :

Soit $B^* = (v_1^*, v_2^*, v_3^*)$ la base duale de B. Alors la matrice de passage de $B_0^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ (base duale de la base canonique) à B^* est

$${}^tP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

On conclue donc que

$$\begin{cases} v_1^*(x,y,z) = y + 2z\\ v_2^*(x,y,z) = -x + 3y\\ v_3^*(x,y,z) = x - 2y + z\end{cases},$$

ou encore

$$\begin{cases} v_1^* = e_2^* + 2e_3^*\\ v_2^* = -e_1^* + 3e_2^*\\ v_3^* = e_1^* - 2e_2^* + e_3^*\end{cases}.$$

b) Déterminer la base préduale de la base formée des formes linéaires suivants

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x + 2y + 3z\\ f_2(x,y,z) = 2x + 3y + 4z\\ f_3(x,y,z) = 3x + 4y + 6z\end{cases}$$

Dans la base $B_0^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ ces formes linéaires elles s'écrivent

$$\begin{cases} f_1 = e_1^* + 2e_2^* + 3e_3^* \\ f_2 = 2e_1^* + 3e_2^* + 4e_3^*. \\ f_3 = 3e_1^* + 4e_2^* + 6e_3^* \end{cases}$$

La famille $F = (f_1, f_2, f_3)$ est bien une base de $\left(\mathbb{R}^3\right)^*$ puisque la matrice

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ est inversible.

Soit $B = (v_1, v_2, v_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ dont F est la base duale. La matrice de passage de de B_0 à B est donc

$${}^tQ^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On conclue donc que $v_1 = (-2, 0, 1)$, $v_2 = (0, 3, -2)$ et $v_3 = (1, -2, 1)$.

5. Bidual d'un espace vectoriel

Définition 1.3 — *Définition*

Soit E un espace vectoriel. Le dual de E^*, noté E^{**} est appelé bidual de E.

Proposition 1.8 — *Fondamental*

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et considérons l'application

$$\begin{aligned} \Phi : E &\to E^{**} \\ x &\mapsto \tilde{x} : E^* \to K \\ &\qquad\quad \varphi \mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve :

En effet, la linéarité est facile à démontrer car: $\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in K, \Phi(\alpha x + \beta y) = (\widetilde{\alpha x + \beta y}) : E^* \to K$. D'autre part, pour tout $\varphi \in E^*$ on a

$$(\widetilde{\alpha x + \beta y})(\varphi) = \varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) = \alpha\tilde{x}(\varphi) + \beta\tilde{y}(\varphi) = \left(\alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y}\right)(\varphi).$$

D'où $\Phi(\alpha x + \beta y) = (\widetilde{\alpha x + \beta y}) = \alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y} = \alpha\Phi(x) + \beta\Phi(y)$.

La bijection : Soit $x \in Ker(\Phi)$, alors $\varphi(x) = 0$ pour tout $\varphi \in E^*$. On en déduit d'après la proposition 1.5 que $x = 0$. Donc Φ est injectif et comme E, E^* et E^{**} ont la même dimension, Φ est un isomorphisme de E sur E^{**}.

Cet isomorphisme permet d'identifier le bidual E^{**} à E.

Exrecice 1.1 — *Exemple*

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égale à 3. Pour $P \in \mathbb{R}_3[X]$ on pose $f_1(P) = P(0), \quad f_2(P) = P(1), \quad f_3(P) = P'(0), \quad f_4(P) = P'(1)$.

1. Montrer que f_i est une forme linéaire sur E pour $i = 1, 2, 3, 4$ et que $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est une base du dual E^*.

2. Déterminer une base $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ de E dont $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est la base duale.

Exercice 1.2 ? *Exemple*

Soit $E = \mathbb{R}^4$, et $F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x + y - z + t = 0\}$ et $D = vect(v), v = (1, 1, 1, 1)$. a) Montrer que F est un hyperplan de E.

b) Montrer que F et D sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

c) Soit un réel $m \in \mathbb{R}$ et $u = (m, m + 1, 2m, m - 2) \in E$. Pour quelles valeurs de m les sous-espaces F et $\Delta = vect(u)$ sont-ils supplémentaires dans E?