CHAPITRE 4 : FORMES QUADRATIQUES

Table des matières

Introduction

Dans tout ce chapitre K désigne un corps commutatif de caractéristique différente de deux, ce qui signifie que dans ce corps $1+1 \neq 0$. Moralement cela revient à dire que dans K on peut diviser par deux. E un K-espace vectoriel de dimension finie.

On s'intéresse ici aux fonctions de K^n définies par des formules du type

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 + \mu_{12} x_1 x_2 + \ldots + \mu_{n-1n} x_{n-1} x_n,$$

où les λ_i et les μ_{ij} sont des scalaires fixés. Ce sont les fonctions définies par les polynômes homogènes de degré deux. On les appelle formes quadratiques. Elles apparaissent par exemple dans l'étude des courbes algébriques de degré deux. Dans $\mathbb{R}^2$, une courbe de degré deux est une partie C définie par une équation

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0,$$

où $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Le membre de gauche de cette équation est constitué d'une forme quadratique $(ax^2 + by^2 + cxy)$, d'une forme linéaire $dx + ey$ et d'une constante f. L'étude des formes quadratiques permet de montrer assez facilement que C est une conique.

4.1 Formes quadratiques

1. Introduction

Toute forme bilinéaire b sur E définit une fonction q sur E par $q(x) = b(x, x)$.

Une telle fonction est appelée forme quadratique sur E. Il se trouve qu'il est inutile de faire appel à toutes les formes bilinéaires pour obtenir toutes les formes quadratiques sur E. En effet,

- premièrement, si b est alternée alors pour tout $x \in E, b(x, x) = 0$,

- et deuxièmement, $b(x, x) = b_{sym}(x, x) + b_{alt}(x, x) = b_{sym}(x, x)$.

Ainsi, b définit la même forme quadratique que la forme symétrique b_{sym}: deux formes bilinéaires qui diffèrent d'une forme alternée définissent la même forme quadratique.

2. Formes quadratiques

Définition 4.1 *Définition*

Soit E un K-espace vectoriel et $q : E \to K$. On dit que q est une forme quadratique sur E s'il existe une forme bilinéaire symétrique b sur E telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = b(x, x)$. On dit que q est la forme quadratique associée à b et b la forme polaire de q. On note $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E.

Nous avons une surjection naturelle

$S_2(E) \to Q(E)$

et aussi $L_2(E) \to Q(E)$.

Exemple 4.1 *Exemple*

1. La fonction $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ est la forme quadratique sur $\mathbb{R}$ associée à la forme bilinéaire $\begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy. \end{array}$

2. L'application $\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 \end{array}$ est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ associée à la forme bilinéaire $\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x_1y_1 + 5x_2y_2 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1. \end{array}$

3. La fonction $\begin{array}{l} C([0, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_0^1 f^2(t)dt \end{array}$ est la forme quadratique sur $C([0, 1], \mathbb{R})$ associée à la forme bilinéaire $\begin{array}{l} C([0, 1], \mathbb{R}) \times C([0, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ (f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt. \end{array}$

4. La fonction $\begin{array}{l} M_n(K) \to \mathbb{R} \\ M \mapsto Tr(M^2) \end{array}$ est la forme quadratique sur $M_n(K)$ associée à la forme bilinéaire $\begin{array}{l} M_n(K) \times M_n(K) \to \mathbb{R} \\ (M,N) \mapsto Tr(MN) \end{array}$.

Proposition 4.1 (Identités remarquables) ***Fondamental***

Soit b une forme bilinéaire symétrique sur E, q la forme quadratique associée à b, on a pour tout $x, y \in E$

1) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x), \quad \forall \lambda \in K$

2) $q(x+y) = q(x) + q(y) + 2b(x,y)$

3) $b(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$.

Preuve :

1) On a $\begin{aligned} q(\lambda x) &= b(\lambda x, \lambda x) = \lambda b(x, \lambda x) \\ &= \lambda^2 b(x,x) = \lambda^2 q(x) \end{aligned}$.

2) $\begin{aligned} q(x+y) &= b(x+y, x+y) \\ &= b(x,x) + b(y,y) + b(x,y) + b(y,x) \text{ (car } b \text{ est symétrique).} \\ &= q(x) + q(y) + 2b(x,y) \end{aligned}$

3) De 2) on a $2b(x,y) = q(x+y) - q(x) - q(y) \Leftrightarrow b(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$.

Proposition 4.2 ***Fondamental***

Si q est un forme quadratique sur E, alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique sur E associée à q qu'on appelle forme polaire de q définie par

$b(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$.

Preuve :

La forme quadratique q est d´définie par $q(x) = b_0(x,x), \ x \in E$, où b_0 est une forme bilinéaire sur E.

L'application b définie sur $E \times E$ par $b(x,y) = \frac{1}{2}(b_0(x,y) + b_0(y,x))$ est bilinéaire et symétrique avec $b(x,x) = q(x)$ pour tout $x \in E$, ce qui prouve l'existence de b. Comme b est bilinéaire symétrique, on a pour tout $x, y \in E$ $b(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$ (d'après la proposition précédente),

d'où b existe et elle est unique.

Exemple 4.2 ***Exemple***

Soit la forme quadratique \$q\$ d\'{e}finie par :

$$\begin{aligned} q \ : \ \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ q(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 &- 4x_1x_2, \end{aligned}$$

tel que $x = (x_1, x_2)$. Sa forme polaire est $\begin{aligned} b(x,y) &= \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)] \\ &= 2x_1y_1 + 5x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 \end{aligned}$.

Remarque 4.1 *Complément*

Quand la forme quadratique est donnée par un polynôme homogène de degré deux, la forme polaire b s'obtient en polarisant chaque monôme de ce polynôme.

Un monôme de la forme $(a_{ii}x_i^2)$ est polarisé en $(a_{ii}x_iy_i)$ et un monôme de la forme $(a_{ij}x_ix_j)$ est polarisé en $\frac{a_{ij}}{2}(x_iy_j + x_jy_i)$.

Exemple 4.3 *Exemple*

1) Dans l'exemple 4.1 on a

$$\begin{aligned} b(x,y) &= 2x_1y_1 + 5x_2y_2 - \frac{4}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= 2x_1y_1 + 5x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 \end{aligned}$$

2) La forme quadratique
$$\begin{aligned} q \,:\, \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ q(x) &= 7x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2x_3, \end{aligned}$$

se polarise en

$$\begin{aligned} b \,:\, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ b(x,y) &= 7x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + \frac{5}{2}x_2y_3 + \frac{5}{2}x_3y_2. \end{aligned}$$

4.2 Matrice d’une forme quadratique

1. Introduction

Soient E un espace vectoriel de dimension n, x et y des éléments de E, $B=(e_i)$ une base de E et b une forme bilinéaire sur E. D'après le chapitre 2 on a montré que $b(x,y)={}^tXMY$, où $M=M_B(b)=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}=(b(e_i,e_j))_{1\leq i,j\leq n}$.

2. Matrice d’une forme quadratique

Définition 4.2 *Définition*

Soient E un espace vectoriel de dimension n, (e_i) une base de E, b une forme bilinéaire symétrique sur E et q une forme quadratique associée à b. La matrice $M_B(b)$ est aussi appelée matrice de q dans la base B, c-à-d. $M_B(q)=M_B(b)$, d'où on a pour tout $x\in E$

$q(x)=b(x,x)={}^tXMX$, où X est la matrice colonne des coordonnées de x.

On déduit que

$$\begin{aligned} q(x) &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j \end{aligned}$$

. Si on écrit l'expression précédente sous la forme

$q(x)=\sum_{i=1}^{n} c_{ii}x_i^2+\sum_{1\leq i<j\leq n} c_{ij}x_ix_j$, où $c_{ii}=a_{ii}$ et $c_{ij}=2a_{ij}$.

D'où on a

$$M_B(q)=\begin{pmatrix} c_{11} & \frac{c_{12}}{2} & \cdots & \frac{c_{1n}}{2} \\ \frac{c_{12}}{2} & c_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{c_{n-1,n}}{2} \\ \frac{c_{1n}}{2} & \cdots & \frac{c_{n-1,n}}{2} & c_{nn} \end{pmatrix}$$

qui est une matrice symétrique.

Exemple 4.4 *Exemple*

Soit la forme quadratique

$q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, où $q(x)=x_1^2+7x_2^2+6x_1x_2-2x_1x_3+3x_2x_3$, on a

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 7 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.2 *Complément*

Soit q une forme quadratique donnée et b sa forme polaire, on a les résultats suivants

1) Si q est une forme quadratique donnée par $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j$, alors sa forme polaire est donnée par $b(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_iy_i + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}(x_iy_j + x_jy_i)$.

2) Une forme quadratique q est dite non dégénérée quand sa forme polaire b l'est.

3) On définit le noyau et le rang d'une forme quadratique comme ceux de sa forme polaire. C-à-d. $\ker(q) = \ker(b), rang(q) = rang(b)$.

4) On dit que $x \in E$ est isotope par rapport à q si $q(x) = 0$.

5) L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel de E par rapport à q est son orthogonal par rapport à b.

Exemple 4.5 *Exemple*

Soit la forme quadratique: $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x) = x_1^2 - x_2^2$.

♢ La matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

♢ La forme polaire de q est $b(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$.

♢ Le noyau de q est

$$\ker(q) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : b(x,y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^2\right\}$$

$$\begin{cases} b(x,e_1) = 0 \\ b(x,e_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

d'où $\ker(q) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. On déduit que q est non dégénérée et $rang(q) = 2$.

♢ Les vecteurs isotropes de q sont les deux droites vectorielles d'équations: $x_2 = x_1$$ et $x_2 = -x_1$.

4.3 Réduction des formes quadratiques

1. 4.3.1 Réduction dans le cas général

Rappel

On rappelle qu'une base $B=(e_1,\ldots,e_n)$ d'un K-espace vectoriel E est dite b-orthogonale où b est une forme bilinéaire sur E si et seulement si pour tout $i,j\in[1,n], i\neq j, b(e_i,e_j)=0$, c-à-d. les vecteurs de B sont deux à deux b-orthogonaux.

On dit que $B=(e_i)$ est b-orthonormée si pour tout $(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2$,

$$b(e_i,e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{cases},$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Nous savons que tout espace euclidien E possède des bases orthonormées et que dans une telle base, $b(x,y)$ prend la forme $b(x,y)=\sum_{i=1}^n x_iy_i$ et $q(x)=\sum_{i=1}^n x_i^2$.

Nous allons généraliser ce résultat aux formes quadratiques.

Proposition 4.3 *Fondamental*

On notera que les assertions suivantes sont équivalentes

1. La base $B=(e_i)$ est q-orthogonale.

2. Dans la base $B=(e_i)$ la forme q s'écrit sous la forme $q(x)=\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$.

3. Dans la base $B=(e_i)$ la matrice de q est diagonale.

De la même manière nous avons les équivalences suivantes

(i) La base $B=(e_i)$ est q-orthonormée.

(ii) Dans la base $B=(e_i)$ la forme q s'écrit sous la forme $q(x)=\sum_{i=1}^n x_i^2$.

(iii) Dans la base $B=(e_i)$ la matrice de q est la matrice identité.

Définition 4.3 *Définition*

On appelle réduction d'une forme quadratique q, la recherche d'une base orthogonale de E, tel que sur cette base q s'écrit sous la forme

$q(x)=\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2,\ \lambda_i\in\mathbb{R}$,

et les (x_i)sont les coordonnées de x dans cette base. De plus la matrice de q dans cette base est diagonale.

Théorème 4.1 **Fondamental**

Nous donnons deux formulations différentes du même résultat.

1. Tout espace pseudo-euclidien (E,q) de dimension finie possède une base orthogonale.

2. Tout espace pseudo-euclidien (E,q) de dimension finie possède une base dans laquelle la matrice de q est diagonale.

Autrement dit ils existent $r \in \{1,\ldots,n\}$, une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E et des scalaires non nuls $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ tels que

$$M(q)=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \cdots & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ \vdots & & \lambda_r & & & \vdots \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

évidemment r est le rang de q.

Preuve :

Nous procédons par récurrence sur n, la dimension de E. Pour $n=1$ le résultat est trivial.

Supposons le vrai pour les espaces de dimension $n-1$. Soit (E,q) un espace de dimension n, si $q=0$, le résultat est trivial, nous supposons donc qu'il existe $a\in E$ tel que $q(a)\neq 0$.

On pose $\langle a\rangle^{\perp}=\{x\in E, b(x,a)=0\}$. On l'appelle l'orthogonal de a, c'est le sous-espace des éléments q-orthogonaux à a. On notera que

$\langle a\rangle^{\perp}=\ker b(.\,,a)$.

Et puisque la forme linéaire $b(.\,,a)$ n'est pas nulle, l'orthogonal de a est un hyperplan de E. Puisque par ailleurs $a\notin\langle a\rangle^{\perp}$, nous avons $E=\langle a\rangle\oplus\langle a\rangle^{\perp}$.

D'après l'hypothèse de récurrence, l'orthogonal de a possède une base q-orthogonal $(e_1,\ldots,e_{n-1})$. La famille $(a,e_1,\ldots,e_{n-1})$ est alors une base q-orthogonal de E.

Nous souhaiterons faire une remarque sur le cas réel. Nous disposons en effet dans ce cas d'un raccourci: le théorème spectral. Ce dernier affirme que toute matrice symétrique réelle d'ordre n est diagonalisable dans une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ ainsi, si A désigne la matrice de q dans une base de E, la symétrie de cette matrice implique l'existence d'une matrice orthogonale $P\in M_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Or le fait que P soit orthogonale implique que ${}^tP=P^{-1}$et dont ${}^tPAP$ est diagonale, d'où le résultat.

Cette preuve algébrique établit un curieux lien entre les formes quadratiques et les endomorphismes. On peut dans la pratique profiter de ce lien pour réduire notre forme réelle q. Concrètement, on appelle (e) la base de E dans laquelle la matrice de q est A et on diagonalise cette dernière. Cela consiste à chercher les valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ de A, et des vecteurs propres $\mathbb{R}^n$ associées a chacune de ces valeurs. On prend soin de choisir ces vecteurs de manière à ce qu'ils forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Ce dernier point est fondamental, on obtient ainsi une matrice diagonale D tel que

$D=P^{-1}AP$

où P est la matrice de la base $(v_1,\ldots,v_n)$ dans la base canonique, ensuite on transpose cette écriture à (E,q) en définissant la base $(a_1,\ldots,a_n)$ de E par $M_{(e)}(a_1,\ldots,a_n)=P$.

Dans cette base q est réduite.

Remarque 4.3 *Complément*

Le théorème spectral est un résultat propre au corps $\mathbb{R}$.

Premièrement, dans un espace complexe E il n'y a pas de bases orthonormées : pour obtenir une notion analogue il faut remplacer la notion de produit scalaire par la notion de produit hermitien.

Deuxièmement, il existe des matrices symétriques complexes qui ne sont pas diagonalisables, c'est le cas par exemple de

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}.$$

2. 4.3.2 Réduction en carrés de Gauss

Fondamental

Nous donnons ici une autre manière d'établir le théorème de réduction. Cette m´méthode due à ***Carl Friedrich Gauss*** est pratique pour les exercices, et permet d'obtenir explicitement et facilement une base orthogonale. Commençons par reformuler le théorème de réduction.

Soit q une forme quadratique non nulle sur un K-espace vectoriel E de dimension finie n muni d'une base $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de sorte que, pour tout $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \in E$

$q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} 2a_{ij}x_ix_j \ (*)$.

La méthode de Gauss consiste à ´écrire q sous la forme d'une combinaison de carrés de formes linéaires indépendantes $l_1, \ldots, l_n$ en procèdent par récurrence sur n : Distinguons deux cas

Premier cas : L'un des a_{ii} est non nul, par exemple $a_{11} \neq 0$. Alors on sépare dans $(*)$ les monômes contenant x_1 des autres

$q(x) = a_{11}x_1^2 + x_1 f(x_2, \ldots, x_n) + g(x_2, \ldots, x_n),$

où f est une forme linéaire et g est une forme quadratique en les $x_2, \ldots, x_n$. On écrit alors

$$\begin{aligned} q(x) &= a_{11}\left(x_1 + \frac{f(x_2, \ldots, x_n)}{2a_{11}}\right)^2 - \frac{(f(x_2, \ldots, x_n))^2}{4a_{11}} + g(x_2, \ldots, x_n), \\ &= a_{11}(l_1(x))^2 + q'(x), \end{aligned}$$

où $l_1(x) = x_1 + \frac{f(x_2,\ldots,x_n)}{2a_{11}}$ une forme linéaire et $q'(x) = -\frac{(f(x_2,\ldots,x_n))^2}{4a_{11}} + g(x_2, \ldots, x_n)$ une forme quadratique en les $x_2, \ldots, x_n$. On applique le même procédé de récurrence sur $q'(x)$ on obtient des formes linéaires indépendantes de la forme linéaire l_1 telles que

$q(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(l_i(x))^2, r \leq n.$

Deuxième cas : Tous les a_{ii} sont nuls. Dans ce cas $q(x)$ ne s'écrit qu'avec des rectangles

$q(x) = \sum_{1\leq i<j\leq n} 2a_{ij}x_ix_j = \sum_{1\leq i<j\leq n} c_{ij}x_ix_j, \text{ où } c_{ij} = 2a_{ij}.$

Il existe $i < j$ tel quec_{ij} est non nul et quitte à permuter les indices nous pouvons supposer que $c_{12} \neq 0$. Décomposons $q(x)$ selon les termes qui contiennent x_1, ceux qui contiennent x_2 et les autres :

$q(x) = c_{12}x_1x_2 + x_1f(x_3, \ldots, x_n) + x_2g(x_3, \ldots, x_n) + h(x_3, \ldots, x_n),$

où f, g sont des formes linéaires et h est une forme quadratique en les$x_3, \ldots, x_n$. On écrit alors

$$\begin{aligned} q(x) &= c_{12}\left(x_1x_2 + \frac{f}{c_{12}}x_1 + \frac{g}{c_{12}}x_2\right) + h \\ &= c_{12}\left(x_1 + \frac{g}{c_{12}}\right)\left(x_2 + \frac{f}{c_{12}}\right) - \frac{fg}{c_{12}} + h. \end{aligned}.$$

On utilise l'identité remarquable $ab = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]$,

on obtient

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{c_{12}}{4}\left(x_1 + x_2 + \frac{f}{c_{12}} + \frac{g}{c_{12}}\right)^2 - \frac{c_{12}}{4}\left(x_1 - x_2 + \frac{g}{c_{12}} - \frac{f}{c_{12}}\right)^2 - \frac{fg}{c_{12}} + h \\ &= \frac{c_{12}}{4}(l_1(x))^2 - \frac{c_{12}}{4}(l_2(x))^2 + q'(x), \end{aligned},$$

où l_1, l_2 sont deux formes linéaires indépendantes et $q'(x)$ est une forme quadratique en les $x_3, \ldots, x_n$. On itère le même procédé sur la forme quadratique $q'(x)$ on obtient

$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (l_i(x))^2, r \leq n,$

où les $l_1, \ldots, l_r$ sont des formes linéaires indépendantes et l'entier $r \leq n$ est le rang de q.

Définition 4. 3 (Signature d'une forme quadratique) *Définition*

Si $K = \mathbb{R}$, il existe une base orthogonale $B = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ où la matrice de q est diagonale. Soit s le nombre de coefficients strictement positifs et soit t le nombre de coefficients strictement négatifs. Le couple (s,t) s'appelle **la signature** de q noté $sgn(q)$. C-à-d. $s = card\{i \in [1,n] : q(e_i) > 0\}$, $t = card\{i \in [1,n] : q(e_i) < 0\}$, et $r = s + t$ est le rang de q, c-à-d. $rg(q) = s + t$.

Remarque 4.3 *Complément*

1. Si $t = 0$, on dit que la forme q est positive.
2. Si $s + t = n$, on dit que la forme est non dégénérée.
3. Si $s = n$, on dit que la forme est définie positive. Dans ce cas, la forme polaire b est un produit scalaire et l'espace muni de b est euclidien.

Théorème 4.2 (Loi d'inertie de Sylvester) *Fondamental*

La signature (s,t) est un invariant de q, c-à-d. la signature de q ne dépend pas du choix de la base q-orthogonale. Autrement dit :

Soit q une forme quadratique de rang r sur un espace vectoriel réel E de dimension finie. Alors, il existe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et des entiers s et t tels que, pour tout vecteur $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ de E, on ait

$q(x) = x_1^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_{s+t}^2, \quad s + t = r \leq n$. Le couple (s,t) est unique.

Remarque 4.4 *Complément*

La loi d'inertie de Sylvester est un théorème de classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel de dimension finie.

Sylvester applique ces résultats à la mécanique et analyse l'énergie à transmettre à un solide pour lui donner une vitesse de rotation. C'est ce qu'on désigne par principe d'inertie de Sylvester .

Exemple 4.6 *Exemple*

Soit la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 + 8x_1x_3.$

Donner une réduction en carrés de Gauss de q et déduire : la signature, le rang, une base q-orthogonale, son expression et sa matrice dans cette base.

Solution : On a

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 + 8x_1x_3 \\ &= \left(x_1^2 + x_1(6x_2 + 8x_3)\right) + 3x_2^2 - 4x_3^2 \\ &= (x_1 + 3x_2 + 4x_3)^2 - (3x_2 + 4x_3)^2 + 3x_2^2 - 4x_3^2 \\ &= (x_1 + 3x_2 + 4x_3)^2 - 6x_2^2 - 20x_3^2 - 24x_2x_3 \\ &= (x_1 + 3x_2 + 4x_3)^2 - 6\left(x_2^2 + 4x_2x_3\right) - 20x_3^2 \\ &= (x_1 + 3x_2 + 4x_3)^2 - 6(x_2 + 2x_3)^2 + 4x_3^2 \end{aligned}.$$

Donc, la signature de q est $sgn(q) = (2, 1)$, et $rang(q) = 3$, ceci implique que

$\ker(q) = \{0\}.$

D'où cette forme est non dégénérée.

Recherche d'une base q-orthogonale : On pose

$$\begin{cases} x_1^{'} = x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ x_2^{'} = x_2 + 2x_3 \\ x_3^{'} = x_3 \end{cases},$$

alors

$$\begin{cases} x_1 = x_1^{'} - 3x_2^{'} + 2x_3^{'} \\ x_2 = x_2^{'} - 2x_3^{'} \\ x_3 = x_3^{'} \end{cases}.$$

D'où $X = PX^{'}$, où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique à la base orthogonale.

$B^{'} = \{u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (-3, 1, 0), u_3 = (2, -2, 1)\}.$

L'expression de q dans B_0 est

$q(x) = x_1^{\prime 2} - 6x_2^{\prime 2} + 4x_3^{\prime 2},$

tel que $x_1^{'}, x_2^{'}, x_3^{'}$ sont les coordonnées de x dans B'.

La matrice de q dans $B^{'}$ est

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.7 Exemple

Soit la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^4$ par $q(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$.

Réduction en carrés de Gauss :

$$\begin{aligned}
q(x) &= (x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2x_3 + 4x_2x_4) + 2x_3x_4 \\
&= [x_1x_2 + x_1(2x_3 + 2x_4) + x_2(x_3 + 4x_4)] + 2x_3x_4 \\
&= (x_1 + (x_3 + 4x_4))(x_2 + (2x_3 + 2x_4)) - (x_3 + 4x_4)(2x_3 + 2x_4) + 2x_3x_4 \\
&= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4)^2 - 2\left(x_3^2 + 4x_4^2 + 4x_3x_4\right) \\
&= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4)^2 - 2(x_3 + 2x_4)^2 \\
&= \left[\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4)\right]^2 - \left[\sqrt{2}(x_3 + 2x_4)\right]^2.
\end{aligned}$$

On peut déduire que $sgn(q) = (1, 2), rang(q) = 3, dimker(q) = 1$, d'où q est dégénérée.

La recherche d'une base orthogonale : Soit le changement de variables

$$\begin{cases}
x_1' = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4) \\
x_2' = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4) \\
x_3' = \sqrt{2}(x_3 + 2x_4) \\
x_4' = x_4
\end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases}
x_1 = x_1' + x_2' - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3' - 2x_4' \\
x_2 = x_1' - x_2' - \sqrt{2}x_3' + 2x_4' \\
x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_3' - 2x_4' \\
x_4 = x_4'
\end{cases}.$$

D'où $X = PX^{'}$,

$$P = \begin{pmatrix}
1 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -2 \\
1 & -1 & -\sqrt{2} & 2 \\
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -2 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix},$$

où P est la matrice de passage de la base canonique à la base orthogonale B'.

$$B' = \left\{v_1 = (1, 1, 0, 0), v_2 = (1, -1, 0, 0), v_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), v_4 = (-2, 2, -2, 1)\right\}.$$

L'expression de q dans $B^{'}$ est $q(x) = x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2$.

La matrice de q dans $B^{'}$ est

$$D = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}..$$

3. 4.3.3 La réduction dans une base de vecteurs propres

Théorème 4.3 *Fondamental*

Soit q une forme quadratique définie sur l'espace vectoriel réel E muni d'une base B. Notons $M = mat_B(q)$, alors il existe au moins une base q-orthogonale sur laquelle q s'écrit sous la forme :

$q(x) = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2$,

où les $\left(x_i'\right)_{1\leq i\leq n}$ sont les coordonnées de x dans cette base, les $\lambda_i \in \mathbb{R}$ sont les valeurs propres de M.

Preuve :

Soit $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. Puisque M est une matrice symétrique réelle, alors il existe une matrice orthogonale P $\left({}^tPP = I\right)$ telle que

$$D = P^{-1}MP = {}^t P.M.P$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda_n & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{soit diagonale}$$

Alors $\{Pe_1, \ldots, Pe_n\}$ est une base q-orthogonale. Nous pouvons alors écrire

$$q(x) = {}^tX.M.X$$
$$q(x) = {}^tX.\left(P.D.{}^tP\right).X$$
$$q(x) = \left({}^tX.P\right).D.\left({}^tP.X\right)'$$
$$q(x) = {}^t\left({}^tP.X\right)D.\left({}^tP.X\right),$$

on a $X = PX'$, donc $X' = P^{-1}X = {}^t PX$, d'où

$$q(x) = {}^t X'.D.X' = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i'^2,$$

où les λ_i sont les valeurs propres de M.

Exemple 4.8 *Exemple*

Soit $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x, y) = -x^2 + 11y^2 - 16xy$, B est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a

$$M = M_B(q) = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -8 & 11 \end{pmatrix} \text{matrice symétrique.}$$

- Calcul des valeurs propre de la matrice M :

$p_M(\lambda) = \det(M - \lambda I) = (\lambda + 5)(\lambda - 15)$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 15, \lambda_2 = -5$.

- Les sous espaces vectoriels associées aux valeurs propres sont :

$E_{\lambda_1} = \langle(1, -2)\rangle, E_{\lambda_2} = \langle(2, 1)\rangle$.

On choisit une base q-orthogonale, et orthonormée par rapport au produit scalaire qui est

$$B' = \left\{e_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2), e_2' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)\right\}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

matrice orthogonale.

$$
\begin{aligned}
M' &= M(q,B') =^t PMP = P^{-1}MP \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -8\\ -8 & 11\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}. \\
&= \begin{pmatrix}15 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

L'expression de q dans B' est : $q(x) =^t X'M'X' = 15x'^2 - 5y'^2$.

Exemple 4.9 *Exemple*

Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.

B est la base canonique de $\mathbb{R}^3$: On a

$M = M_B(q) = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ matrice symétrique.

- Calcul des valeurs propre de la matrice M

$p_M(\lambda) = \det(M - \lambda I) = (1-\lambda)(\lambda+2)^2$.

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$.

- Les sous-espaces propres sont $E_{\lambda_1} = \langle v_1 = (1,1,1)\rangle, E_{\lambda_2} = \langle v_2 = (-1,1,0), v_3 = (-1,0,1)\rangle$. On remarque que $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, v_3\rangle = 0$, $\langle v_2, v_3\rangle = 1 \neq 0$, en utilisant le procédé de Gram-Schmidt on obtient

$$
\begin{cases}
u_1 = v_1\\
u_2 = v_2\\
u_3 = v_3 - \frac{<v_3,v_2>}{\|v_2\|^2}.\, v_2 = -\frac{1}{2}(1,1,-2)
\end{cases}.
$$

On peut choisir une base q-orthogonale formée de vecteurs propres

$\{(1,1,1), (-1,1,0), -\frac{1}{2}(1,1,-2)\}$,

et une base orthonormée par rapport au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres

$B' = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0), -\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)\right\}$

et on a

$$
M' = mat_{B'}(q) =^t PMP = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix},
$$

où

$$
P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1\\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1\\ \sqrt{2} & 0 & 2\end{pmatrix} \text{ matrice orthogonale.}
$$

L'expression de q dans B' est

$q(x) =^t X'M'X' = x_1'^2 - 2x_2'^2 - 2x_3'^2$.

où x_1', x_2', x_3' sont les coordonnées de x dans B'. De plus on a

$$X' = {}^tPX = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}(x_1+x_2+x_3) \\ -\sqrt{3}(x_1-x_2) \\ -(x_1+x_2-2x_3) \end{pmatrix}.$$

D'où

$$q(x) = x_1'^2 - 2x_2'^2 - 2x_3'^2$$
$$= \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)^3 - (x_1-x_2)^2 - \frac{1}{3}(x_1+x_2-2x_3)^2.$$

Cette d` dernière ´écriture ce n'est que la réduction en carrés de Gauss.

Remarque 4.5 *Complément*

Attention, les éléments de la diagonale de la matrice d'une forme quadratique dans une base q-orthogonale ne sont pas nécessairement les valeurs propres de $M = M_B(q)$.

Corollaire 4.1 *Fondamental*

Soit q une forme quadratique de signature (s,t) et B une base de E. Si $M = M_B(q)$, alors s est le nombre de valeurs propres positives de M et t est le nombre de valeurs propres négatives de M.

Proposition 4.4 *Fondamental*

Soit q une forme quadratique définie sur un espace vectoriel réel E de signature (s,t) et $M = mat_B(q)$.

1. q est positive **ssi** toutes les valeurs propres de M sont positives.
2. q est définie positive **ssi** toutes les valeurs propres de M sont strictement positives.

4. 4.3.4 Formes quadratiques équivalentes

Définition 4. 4 *Définition*

Deux formes quadratiques q_1, q_2 définies sur E sont dites équivalentes s'il existe un automorphisme $u : E \to E$ tel que $q_2 = q_1 \circ u$.

Remarque 4.6 *Complément*

La relation binaire "**équivalente**" est une relation d'équivalence.

Proposition 4.5 *Fondamental*

Soient B une base de E, q_1, q_2 deux formes quadratiques de E de matrices A_1, A_2 respectivement dans B. Alors, q_1 et q_2 sont équivalentes si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que $A_2 =^t PA_1P$.

Preuve :

q_1, q_2 sont équivalentes s'il existe un automorphisme $u : E \to E$ tel que $q_2 = q_1 \circ u$.

Notons $P = mat_B(u)$, soient $x \in E$ et X la matrice colonne des coordonnées de x dans B. On a $q_2(x) = q_1(u(x)) \Leftrightarrow^t XA_2X =^t (PX)A_1PX =^t X\big({}^tPA_1P\big)X$. D'où $A_2 =^t PA_1P$.

Remarque 4.7 *Complément*

Deux forme quadratiques sont équivalentes si elles ont la même signature.

Exercice *Exemple*

Trouver les réductions de Gauss des formes quadratiques suivantes, en précisant une base orthogonale, le rang et la signature. On précisera pour chaque forme quadratique, la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et la forme polaire associée :

1. $q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + xy + yz$
2. $q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$
3. $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$.