TD PROBA M1

Omar Boukhadra

Dépt. Mathématiques
Faculté des Sciences Exactes
Université de Constantine 1
boukhadra@umc.edu.dz

3 mai 2025

Contenu

1 Probabilité et v.a.

Exercice 1.1 (a) Soit $(A_i)_{i=1}^n$ une collection d'évènements dans un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$. Montrer que $\cap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$.

(b) Si $\mathcal{G}$ est une autre tribu de Ω, montrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est aussi une tribu de Ω. Cependant, montrer que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ ne l'est pas nécessairement.

Exercice 1.2 Modéliser les expériences aléatoires suivantes par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

- (a) une pièce de monnaie équilibrée est lancée trois fois.
- (b) Une boule est tirée d'une urne qui contient un nombre donné de boules rouges et bleues.
- (c) deux boules sont tirées sans remise d'une urne qui contient un nombre donné de boules rouges et bleues.
- (d) Idem avec un tirage avec remise.
- (e) une pièce de monnaie équilibrée est lancée répétitivement jusqu'à ce que pile apparaisse.

Exercice 1.3 (Inégalité de Boole) Prouver que

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Exercice 1.4 Montrer que

$$P(\limsup A_n) \geq \limsup P(A_n)$$

Exercice 1.5 Soit $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = \{A \text{ est dénombrable ou } A^c\}$. Et considérer sur $\mathcal{F}$, l'application

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } A^c \text{ est dénombrable} \end{cases}$$

(a) Montrer que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé.

(b) Montrer que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ est une variable aléatoire par rapport à $\mathcal{F}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ ssi il existe n tel que $(X^{-1}(\{n\}))^c$ est dénombrable (ssi il existe un n unique tel que $X^{-1}(\{n\})$ est non dénombrable).

Exercice 1.6 Soit deux v.a. X et Y. Montrer que $\min\{X, Y\}, X + Y$ et XY sont aussi des v.a.

Exercice 1.7 Soit X une v.a. à valeurs dans un ensemble E muni de la tribu de ses parties, telle que $P(X = x) > 0$ pour tout $x \in E$. Montrer que E est fini ou dénombrable.

Exercice 1.8 Soit F, G deux f.r. et $\lambda \in [0, 1]$. Montrer que $\lambda F + (1 - \lambda)G$ est une f.r. Est-ce que FG est une f.r. ? Particulièrement, si f et g sont les d.p. de ces dernières, montrer que $\lambda f + (1 - \lambda)g$ est une d.p., celle de $\lambda F + (1 - \lambda)G$. Est-ce que fg en est une ?

Exercice 1.9 Soit F une f.r. et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les fonction suivantes sont aussi des f.r. :

$$(a)\ F(x)^n \qquad (b)\ 1 - (1 - F(x))^n \qquad (c)\ F + (1 - F)\log(1 - F)$$

Exercice 1.10 Dire si les fonctions suivantes définissent des d.p. en déterminant la valeur de la constante c, et éventuellement la f.r. associée :

$$f(x) = c\,x^{-d}\,\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x), \quad g(x) = \frac{c\,e^x}{(1 + e^x)^2}$$

Exercice 1.11 Soit F le f.r. de la v.a. X. Exprimer en fonction de F les f.r. des v.a. $-X, X^+, aX + b$ et X^2.

Exercice 1.12 Soit X une v.a. uniformément distribuée sur $[0, 2]$. Poser $Y = X^2$ et calculer

$$(a)\ P(1 \le X \le 2) \qquad (b)\ P(Y \le X) \qquad (d)\ P(X + Y \le 3/4)$$

Exercice 1.13 Soit une X une v.a. de f.r. F et U une v.a. de distribution uniforme sur $[0, 1]$. Soit

$$F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \ge u\}$$

Montrer que

$$X \overset{\mathrm{d}}{=} F^{-1}(U) \tag{1.1}$$

En déduire que

$$\mathcal{E} \overset{\mathrm{d}}{=} -\log U$$

Exercice 1.14 Considérer la fonction suivante sur $\mathbb{R}_+^2$, $F(x, y) = 1 - e^{-xy}$. Est-elle une f.r. ?

Exercice 1.15 Soit X, Y deux v.a. de f.r. commune F. Montrer que

$$P(a < X \le b, c < Y \le d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

Exercice 1.16 Soit X une v.a. de Bernoulli de probabilité de succès p. Soit $Y = 1 - X$ et $Z = XY$. Trouver la distribution des couples (X, Y) et (X, Z).

Exercice 1.17 Soit X une v.a. telle que $E(|X|^p) < \infty$ pour $p \geq 1$. Montrer que

$$\lim_{x \to \infty} x^p \, P(|X| > x) = 0$$

Que peut-on dire alors à propos de l'inégalité de Tchebychev ?

Exercice 1.18 Soit X une v.a. telle que $\|X\|_2 = 1$ et pour un $\alpha > 0$, $\|X\| \geq \alpha$. Montrer que $E(|X|) < \infty$. Ensuite, prouver que pour tout $\beta \in [0, 1]$, on a

$$P(|X| \geq \alpha\beta) \geq (1 - \beta)^2 \alpha^2$$

Exercice 1.19 Soit X_n une v.a. de distribution $\mathcal{B}(n, p)$. Montrer que

$$E\Big(\frac{1}{1 + X_n}\Big) = \frac{1 - (1 - p)^{n+1}}{(n + 1)p}$$

Trouver la limite de cette moyenne quand $n \to \infty$ et $p \to 0$ et que $np \to \lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

2 Conditionnement & Indépendance

Exercice 2.1 Soit $P(B) \neq 0$ et poser $Q(A) = P(A \mid B)$. Soit $Q(C) \neq 0$. Montrer que $Q(A \mid C) = P(A \mid B \cap C)$.

Exercice 2.2 Supposer que $P(A)P(B) \neq 0$ et montrer la *formule de Bayes* :

$$P(A \mid B) = P(B \mid A)\,\frac{P(A)}{P(B)} \tag{2.1}$$

Ensuite, prouver que

$$P(A \mid B) > P(A) \Longrightarrow P(B \mid A) > P(B)$$

Exercice 2.3 ($\mathcal{E}(\lambda)$ est sans mémoire) Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

(a) Établir que pour tous $s, t \geq 0$, on a

$$P(X \geq t + s \mid X > t) = P(X > s) \tag{2.2}$$

b) Montrer que la propriété (2.2) caractérise la loi exponentielle parmi les lois à densité.

(c) Prouver que

$$\lim_{h \to 0} \frac{P(X \in (t, t+h] \mid X > t)}{h} = \lambda$$

Exercice 2.4 Un nombre aléatoire N de dés sont jetés. Appeler S la somme des faces apparues. Supposer que $P(N = n) = 2^{-n}$. Trouver les probabilités :

$$P(N = 2 \mid S = 4), \qquad P(S = 4 \mid N \text{ est pair}).$$

Exercice 2.5 Soit X et Y deux v.a. i.i.d. dans $\mathbb{N}^*$ de distribution donnée par 2^{-n}. Trouver les probabilités suivantes :

(a) $P(\min(X, Y) \leq n)$ (b) $P(X = Y)$ (c) $P(X > Y)$

Exercice 2.6 Soit X et Y deux v.a. indépendantes de f.r. respectives F et G. Trouver les f.r. de $\min\{X, Y\}$ et $\max\{X, Y\}$. Ensuite, montrer que

$$P(a < m \leq M \leq b) = (F(b) - F(a))(G(b) - G(a))$$

Exercice 2.7 Soit X et Y deux v.a. indépendantes et de même distribution uniforme sur $[0, 1]$. Trouver la d.p. de $(\min\{X, Y\}, \max\{X, Y\})$ et les lois marginales.

Exercice 2.8 Soit X une v.a. de Bernoulli équiprobable indépendante de la v.a. Y qui est de distribution normale. Trouver la loi de XY.

Exercice 2.9 Soit X et Y deux v.a. de f.r. F et G. Supposer qu'elles soient positives et indépendantes. Trouver la f.r. de XY.

Exercice 2.10 Soit X et Y deux v.a. telles que $|\rho(X, Y)| = 1$. Montrer que X et Y sont p.s. en relation linéaire.

Exercice 2.11 Soit X et Y deux v.a. indépendantes de distributions exponentielles.
- (a) Déterminer la distribution de $\min\{X, Y\}$.
- (b) Calculer la probabilité de $\{X < Y\}$.
- (c) Montrer que $\min\{X, Y\}$ est indépendante de l'évènement $\{X < Y\}$.
- (d) Donner la f.r. de X/Y.

Exercice 2.12 Soit X, Y et Z des v.a. indépendantes de distributions exponentielles de paramètres respectifs α, β et γ. Calculer $P(X < Y < Z)$.

Exercice 2.13 Soit $U = X + Y$ une somme de deux v.a. i.i.d. suivant une loi exponentielle standard. Poser $V = X/U$. Trouver la distribution de (U, V) et en déduire celle de V.

Exercice 2.14 Soit maintenant (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de distribution exponentielle. Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Pour $t \geq 0$, soit

$$N(t) = \#\{n : S_n \leq t\}$$

Montrer que $N(t) \sim \mathcal{P}(t)$.

3 Fonction Caractéristique

Exercice 3.1 Trouver les f.c. des d.p. suivantes :

$$(a)\,\frac{1}{\cosh(\pi x)} \qquad (b)\,\frac{1}{2}|x|e^{-|x|}$$

Exercice 3.2 Soit φ une f.c. Montrer que $\overline{\varphi}$ et φ^2 le sont aussi. Par contre, donner un exemple qui montre que $|\varphi|$ ne l'est pas nécessairement.

Exercice 3.3 Soit φ la f.c. d'une v.a. X. Montrer que pour tout $t > 0$,

$$P(|X| > 1/t) \leq \frac{7}{t} \int_0^t (1 - \mathrm{Re}(\varphi(s))\,\mathrm{d}s$$

Exercice 3.4 Soit X et Y deux v.a. indépendantes de distribution normale standard. Utiliser les f.c. pour trouver les distributions de X^2 et XY.

Exercice 3.5 Soit φ la f.c. de la loi normale standard. Montrer que φ vérifie l'équation différentielle $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$. En déduire la forme explicite de φ.

Exercice 3.6 Trouver des v.a. X et Y dépendantes telles que $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

Exercice 3.7 Trouver les distributions associées aux f.c. suivantes :

$$(a)\,\cos t \qquad (b)\,(1 - |t|)\,\mathbb{1}_{|t|\leq 1}(t)$$

Ensuite, dire si les fonctions suivantes sont des f.c. :

$$(c)\,(1 + t^4)^{-1} \qquad (d)\,e^{-t^4}$$

Exercice 3.8 Si une f.c. φ admet une densité n fois différentiable et telle que ses dérivées soient intégrables, montrer que

$$\varphi(t) = o(|t|^{-(n-1)})$$

4 Modes de Convergence de v.a.

Exercice 4.1 Soit (X_n) une suite de v.a. Supposer qu'il existe une série numérique $\sum u_n$ convergente telle que $\sum P(X_n \neq u_n) < \infty$. Montrer que $\sum X_n$ est p.s. convergente.

Exercice 4.2 Utiliser l'intégration par parties à la fonction $x^{-1}\, xe^{-x^2/2}$ pour obtenir l'estimation :

$$\left(x^{-1} - x^{-3}\right)\, e^{-x^2/2} \leq \int_x^{\infty} e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u \leq x^{-1} e^{-x^2/2}$$

Maintenant, soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de distribution $\mathcal{N}$. Montrer que

$$(a) \quad \limsup \frac{X_n}{\sqrt{2 \log n}} \overset{\text{p.s.}}{=} 1$$

$$(b) \quad \frac{\max_{1 \leq i \leq n} X_i}{\sqrt{2 \log n}} \xrightarrow[n \to \infty]{P} 1$$

Exercice 4.3 Soit X une v.a. de f.r. F. Montrer que

$$X_n := X \pm \frac{1}{n} \Longrightarrow X$$

Exercice 4.4 (Théorème de Slutsky) Supposer que

$$X_n \Longrightarrow X, \quad Y_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} c$$

où c est une constante. Montrer que

$$\begin{array}{lrcl} (i) & X_n + Y_n & \Longrightarrow & X + c \\ (ii) & X_n Y_n & \Longrightarrow & c\,X \end{array}$$

Exercice 4.5 Si $c \in \mathbb{R}$, montrer que

$$X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{D}} c \Longrightarrow X_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} c$$

Exercice 4.6 Soit (X_n) telle que $X_n \Longrightarrow X$. Considérer une autre suite (Z_n) et montrer que

$$X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{D}} X \wedge Z_n - X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{D}} 0 \Longrightarrow Z_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{D}} X$$

Exercice 4.7 Soit (X_n) et (Y_n) deux suites de v.a. convergeant en loi respectivement vers X et Y.

(a) Supposons que (X_n) et (Y_n) soient indépendantes et que X et Y le soient aussi. Montrer que $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + Y$. Donner un exemple qui montre que sans l'hypothèse d'indépendance, on peut perdre la convergence.

(*b*) Supposer que $Y = 0$. Montrer que $X_n + Y_n \Longrightarrow X$ et $X_n Y_n \Longrightarrow 0$

Exercice 4.8 Si $X_n \Longrightarrow X$, montrer qu'il est généralement faux d'avoir $X_n - X \Longrightarrow 0$.

Exercice 4.9 Soit (X_n) une suite de v.a. de f.r. respectives définies par

$$F_n(x) = x - \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}, \quad x \in [0, 1]$$

Montrer que $X_n \Longrightarrow U$ mais que les d.p. ne convergent pas vers la d.p. de U.

Exercice 4.10 Soit (X_n) une suite de v.a. de distributions respectives $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$. Supposer que $X_n \Longrightarrow X$.

(*a*) Montrer que (σ_n^2) converge. En déduite que X est normale. Ensuite, étudier le cas de v.a. non centrées.

(*b*) Montrer qu'il est vrai que

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \Longrightarrow X \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X$$

Exercice 4.11 (Intégration de Monte Carlo) Soit $U_1, U_2, \ldots$, des v.a. i.i.d. de loi $U_{[0,1]}$. Supposer que l'on ait

$$\int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$$

Montrer que

$$I_n := \frac{f(U_1) + \cdots + f(U_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x =: I$$

Ensuite, supposer que $\int_0^1 f(x)^2 \, \mathrm{d}x < \infty$ et estimer $P(|I_n - I| > a/\sqrt{n})$.

5 Espérance Conditionnelle

Exercice 5.1 Soit X et Y deux v.a. qui donnent les résultats de deux lancers de dé indépendants et S leur somme. Quelle est la loi de X sachant que S est paire ?

Exercice 5.2 Soit X de distribution uniforme standard. Trouver la distribution de X sachant que $X \in [a, b]$. Ensuite, considérer une deuxième v.a. Y de même distribution et indépendante de X. Poser $m = \min\{X, Y\}$ et $M = \max\{X, Y\}$. Déterminer la distribution de (X, Y) conditionnée à $\{a \leq m \leq M \leq b\}$.

Exercice 5.3 Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : \quad P(X \geq n + m \mid X \geq m) = P(X \geq n)$$

On dit alors que X est **sans mémoire**.

(a) On pose $P(X = 0) = p$. Déterminer la loi de X.

(b) Soit Y une v.a. indépendante de X et de même loi. Quelle est la loi de $S = X + Y$?

(c) Trouver la loi de X conditionnée à S.

Exercice 5.4 Soit N le nombre (aléatoire) d'œufs pendus par une poule. Supposer que $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et que chaque œuf éclose indépendamment des autres avec une probabilité p. Appeler K le nombre de poussins. Donner la distribution de K, ensuite calculer $E(K), E(K \mid N)$ et $E(N \mid K)$.

Exercice 5.5 (Rendez-vous) A et B se sont donné rendez-vous entre 17h et 18h en s'entendant sur le fait qu'il n'attendraient pas l'autre plus de 10 minutes. Supposer qu'ils arrivent indépendamment à des instants uniformément distribués à l'heure fixée. Calculer la probabilité d'une rencontre. Quelle la probabilité que A rencontre B si A fixe précisément son heure d'arrivée ?

Exercice 5.6 Soit Y et Y deux v.a. i.i.d. de moyenne μ. Expliquer l'erreur dans l'équation suivante

$$E(X \mid X + Y = z) = E(X \mid X = z - Y) = E(z - Y) = z - \mu$$

Exercice 5.7 Soit (S_n) une suite de m.a. et N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de la suite. Montrer que S_N est une v.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de S_N sachant $N = n$ est la loi de X_n.

Exercice 5.8 Soit un couple de v.a. réelles (X, Y) de distribution continue avec une d.p. f. Trouver la d.p.c. de Y sachant X si $f(x, y) = xe^{-x(y+1)}$ sur $\mathbb{R}_+^2$.

Exercice 5.9 Soit X et Y deux v.a. réelles avec une d.p. commune définie sur $\{0 \leq x \leq y\}$ par $f(x,y) = x(y-x)e^{-y}$. Trouver les d.p.c. f_Y^x et f_X^y et en déduire que

$$E(Y \mid X) = X + 2, \qquad E(X \mid Y) = Y/2$$

Exercice 5.10 (Variance conditionnelle) On définit naturellement la **variance conditionnelle** de Y par rapport à X par

$$V(Y \mid X) = E(D_X(Y)^2 \mid X)$$

Montrer que

$$V(Y \mid X) = E(Y^2 \mid X) - E(Y \mid X)^2$$

Ensuite, déduire que

$$V(Y) = E(V(Y \mid X)) + V(E(Y \mid X))$$

Exercice 5.11 Soit $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0, \theta^2)$ dont le coefficient de corrélation est ρ. Montrer que

$$(a)\ E(Y \mid X) = \frac{\rho\theta}{\sigma} X \qquad\qquad (b)\ V(Y \mid X) = \theta^2(1-\rho^2)$$

Exercice 5.12 (IM conditionnelle) Montrer que

$$P(|Y| > a \mid X) \leq a^{-1} E(|Y| \mid X) \tag{IMC}$$

Exercice 5.13 (ICS conditionnelle) Montrer que

$$E(|YZ| \mid X)^2 \leq E(Y^2 \mid X) E(Z^2 \mid X) \tag{ICSC}$$

6 Marches Aléatoires

Exercice 6.1 Considérons une m.a.s. sur $\{0, 1, \ldots, N\}$ avec la probabilité $p = 1 - q \in (0, 1)$ de sauter à droite. On place des barrières absorbantes aux extrémités 0 et N. Montrer que $P_k(H < \infty) = 1$ et que $E_k(H^m) < \infty$ pour tout m.

Exercice 6.2 Reprendre l'Exercice 6.1. Soit H le nombre de pas nécessaires à la marche, partie de k avant d'atteindre les barrières. Pour tout k, montrer que $P_k(H < \infty) = 1$. Ensuite, montrer que

$$E_k(H) = \frac{1}{p-q}\left(N\,\frac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)^N} - k\right)$$

Exercice 6.3 Reprendre l'Exercice 6.2 et appeler H^+ le nombre des pas positifs de la marche jusqu'à l'absorption. Montrer que

$$E_k(H^+) = \frac{1}{2}\left(E_k(H) - k + N(1 - p_k)\right)$$

Exercice 6.4 Quelle est la probabilité qu'un parieur impulsif possédant une somme de k unités de monnaie perde tout son argent dans un jeu répétitif où il peut gagner une unité à chaque essai indépendant avec une probabilité p ?

Exercice 6.5 Considérer une m.a.s. symétrique dans $\mathbb{Z}$. Soit $H_0 = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$, le temps du premier retour de la marche à l'origine. Montrer que

$$P(H_0 = 2n) = \frac{C_{2n}^n}{(2n-1)2^{2n}}$$

En déduire que $E(H_0^\alpha) < \infty$ ssi $\alpha < 1/2$.

Exercice 6.6 Pour une m.a.s. symétrique dans $\mathbb{Z}$, poser $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ et montrer que pour $m \geq 0$,

$$P(M_n = m) = P(S_n = m) + P(S_n = m + 1) \tag{6.1}$$

Exercice 6.7 Considérer une m.a.s. dans $\mathbb{Z}$ telle que $p = 1 - q < 1/2$. Montrer que le maximum $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ satisfait $P(M_n > m) = (p/q)^m$ pour $m \geq 0$.

Exercice 6.8 Soit (S_n) une m.a. telle que les sauts $X_n \in \mathbb{Z}$. Soit R_n le nombre de sites distincts visités par la marche jusqu'à l'instant n en partant de 0. Montrer que

$$P(R_n = R_{n-1} + 1) = P(S_1 \cdots S_n \neq 0) \tag{6.2}$$

En déduire que

$$\frac{E(R_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} P(H_0 = \infty)$$

où H_0 est l'instant du premier retour à 0. Dans le cas d'une m.a.s., trouver que

$$P(H_0 = \infty) = |p - q| \tag{6.3}$$

7 Martingales

Exercice 7.1 Soit (S_n) une m.a.s. asymétrique sur $\{0, 1, \ldots, N\}$ avec des barrières à 0 et à N. Soit $Y_n = \varrho^{S_n}$ avec $\varrho = q/p$. Montrer que (Y_n) forme une martingale adapté à sa filtration naturelle.

Exercice 7.2 Soit (ξ_n) une suite de v.a. i.i.d. telle que $P(\xi_n = 1) = 1/2 = P(\xi_n = -1)$. Posons $X_0 = 0$ et

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}\, \xi_i$$

La suite (X_n) modélise l'expérience d'un parieur qui double la mise à chaque pari et représente les gains du parieur jusqu'à l'essai n ; elle est traditionnellement appelée la *Martingale*. Montrer que (X_n) est effectivement une martingale adapté à sa filtration naturelle. Ensuite, calculer la moyenne des pertes.

Exercice 7.3 Soit f une fonction super-harmonique sur $\mathbb{R}^d$, i.e. elle admet des dérivées secondes continues et

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2} \leq 0$$

On sait alors que

$$|B(0,r)|^{-1} \int_{B(x,r)} f(y)\, \mathrm{d}y \leq f(x) \tag{7.1}$$

où $|B(x,r)|$ est le volume d'une boule centrée en x et de rayon r.

Soit (S_n) une m.a. avec des saut X_i de distribution μ uniforme sur $B(o,r)$, ceci étant, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que les $f(S_n)$ forment une super-martingale adapté à sa filtration naturelle. Notons que cette dernière appellation vient de super-harmonique !

Exercice 7.4 Soit (X_n) est une martingale. Montrer que les $(X_n - a)^+$ forment une sous-martingale, et aussi $(|X_n|^p)$ si $(X_n) \subset L^p$.

(*i*) $(|X_n|^p)$ est une sous-martingale si $(X_n) \subset L^p$.

(*ii*) les v.a. $(X_n - a)^+$ constituent une sous-martingale.

Exercice 7.5 Soit (X_n) est une martingale dans L^2. Montrer que pour $m > n$,

$$V\big(X_m - X_n \mid \mathcal{F}_n\big) = E(X_m^2 \mid \mathcal{F}_n) - X_n^2$$

Exercice 7.6 Si $\mathcal{F}_n \uparrow \mathcal{F}_\infty$ et que $|X_n| \leq Y \in L^1$, montrer que $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$ et

$$E(X_n \mid \mathcal{F}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} E(X \mid \mathcal{F}_\infty) \tag{TCDC}$$

Exercice 7.7 Soit (S_n) une m.a.s. symétrique qui par de $S_0 = k$. Montrer que $S_n^2 - n$ forme une martingale. Ensuite, considérer des barrières aux points 0 et $N\,(\geq k > 0)$ et poser H le temps d'atteinte des dernières. Supposer que $E(H) = E(S_0)$ et $E(S_H^2 - H) = E(S_0^2)$, la condition de De Moivre, et trouver $E(H)$ et la probabilité de ruine.