Série TD N° 2 - Algèbre 4

Exercice 1 : Soit $E = \mathbb{R}^3$ un espace vectoriel réel de base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ et b une forme bilinéaire définie par: $b(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 13x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 - 5x_2y_3 - 5x_3y_2$

a) Ecrire la matrice M de b dans la base B et déterminer le noyau de b et préciser le rang de b.

b) Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E et $g: E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, telle que: $b(x,y) = g(u(x),y), \forall x,y \in E$.

- Déterminer la matrice A de u dans la base B en fonction des matrices M et S de b et g respectivement.
- Montrer que les vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes sont g-orthogonaux et b-orthogonaux à la fois.

Exercice 2 : Soient $E = \mathbb{R}^2, B(e1,e2)$ la base canonique.

1) Soit la forme bilinéaire $b_1(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2$.

a) Vérifier que b_1 est symétrique. Est-elle positive ? Calculer $Ker(b_1)$, que peut-on déduire? Déduire $rang(b_1)$.

b) Calculer les vecteurs isotropes par rapport à b_1.

2) Soit la forme bilinéaire $b_2(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$.

a) Vérifier que b_2 est symétrique et définie positive. Que peut-on déduire?

b) Déduire les vecteurs isotropes par rapport à b_2.

Exercice 3 : Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre 2 et soit l'application $f: E \times E \to \mathbb{R}$, telle que $f(A,B) = det(A+B) - det(A-B)$

1) Montrer que f est une forme bilinéaire.
2) Calculer sa matrice dans la base canonique de E.

Exercice 4 : (Sup.) Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

On considère l'application $b: E \times E \to \mathbb{R}$ définie par : $b(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q'(t)dt$.

1. Justifier que b est une forme bilinéaire sur E.
2. Déterminer la matrice M représentant b dans la base canonique $B_0 = (1, X, X^2)$ de E.
3. Quel est le rang de b ?
4. b est-elle symétrique? antisymétrique? Déterminer M_1 et M_2 les parties symétrique et antisymétrique de M.
5. A-t-on $b(P,P) \geq 0$ pour tout polynôme P? à quelle condition sur P, a-t-on $b(P,P) = 0$?

o0O0o