Université des frères Mentouri - Constantine1

2ème Année Maths (L2) **Série TD N° 3 - Algèbre 4** ***Année universitaire : 2024/2025***

Exercice 1 : Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable
2. Construire une base orthonormée pour $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propre de A et trouver une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $P^t AP = D$.

Exercice 2 : Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on considère l'application : $<.,.> : E \times E \to R$ définie par

$$\forall P, Q \in E2, < P, Q >= \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,dx,$$

et soit l'application T: E $\to E$ définie par: $\forall P \in E,\ T(P) = XP'' + (1 - X)P'$.

1. Montrer que $<.,.>$ est un produit scalaire sur E.

2. Montrer que T est un endomorphisme symétrique sur E. (pour montrer la symétrie on pourra s'intéresser à la dérivée de la fonction: $x \mapsto xP'(x)e^{-x}$)

Exercice 3 : Soit n un entier naturel non nul et $E = M_n(\mathbb{R})$.

L'application définie par : $\forall (A, B) \in E^2,\ \langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} b_{ii}$

est-elle un produit scalaire sur E ? On justifiera la réponse

Exercice 4 : Montrer que :

1) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \mathbf{2} < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > + \|\boldsymbol{y}\|^2$. 2) $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - \mathbf{2} < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} > + \|\boldsymbol{y}\|^2$.

3) $< \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} > = \|\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{y}\|^2$, pour tous $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{E}$ espace euclidien.

4) $\|\boldsymbol{PX}\| = \|\boldsymbol{X}\|$, où $\boldsymbol{P}$ matrice orthogonale. 5) $Ker\ (f^*) = (Im(f))^{\perp}$. 6) $Im(f^*) = (Ker(f))^{\perp}$.
7) $rg(f^*) = rg(f)$, où $f \in End(E)$ et E est un espace euclidien. 8) $F \subset G \Rightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$, où $F\ et\ G$ sont des sous-espaces de E.

Exercice 5 : Soit $(\boldsymbol{E}, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien de dimension finie n, f un endomorphisme symétrique de E et $u = f^* \circ f$ un endomorphisme de E, où f^* est l'adjoint de f (c-à-d. $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$).

1. Montrer que u est symétrique et déduire qu'il est diagonalisable et ses valeurs propres sont positives ou nulles.

2. Montrer que $Ker(u) = Ker(f)$ et que $Im(u) = (Ker(f))^{\perp}$.

Exercice : (Supp) Soit n un entier naturel non nul. Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on pose

$$N_\infty(A) = \max_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|$$

1. Montrer que l'application N_∞ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. Pour toute matrice M orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$, montrer que : $\frac{1}{\sqrt{n}} \le N_\infty(M) \le 1$.

o0O0o