Université Constantine 1 - Frères Mentouri

$2^{ème}$*Année Maths (L2)* **_Année universitaire : 2024/2025_**

Série TD N° 4 - Algèbre 4

Exercice 1 : On considère la forme bilinéaire suivante : $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$b\,(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1 - 3x_1y_3 - 3x_3y_1 - 3x_2y_4 - 3x_4y_2 + x_3y_4 + x_4y_3$$

1- Ecrire la matrice M de b relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Préciser le rang de b. Quel est son noyau ? Que peut-on dire de b ?

2- Donner la forme quadratique q associée, et calculer sa matrice.

3- Trouver une réduction en carrés de Gauss en précisant une base q-orthogonale, sa matrice dans cette base, la signature de q et le rang de q.

4- Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes de q.

Exercice 2 : Soit l'application : $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$q(x) = 16x_1^2 - 16x_2^2 + 5x_3^2 - 16x_1x_3 + 16x_2x_3 + 2x_3x_4, \forall x \in \mathbb{R}^4$$

1- Vérifier que q est une forme quadratique. Ecrire sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et la forme polaire associée b.

2- Donner une réduction en carrés de Gauss, en précisant une base orthogonale ainsi que le rang et la signature de q.

3- Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes de q.

4- Trouver l'orthogonal de $F = < e_1, e_2 + 2e_3 >$.

Exercice 3: (Supp.) On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique q définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 10x_2x_3.$$

1- Donner sa matrice, sa forme polaire b et calculer son noyau ***Ker(q)***. Que peut-on déduire ?

2- En utilisant la réduction en carrés de Gauss. Montrer que l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que $q(x) = 0$ est la réunion de deux plans vectoriels dont on donnera des équations.

3- Déterminer une base q- orthogonale B' de $\mathbb{R}^3$, puis en donner sa signature, son rang.

4- Donner l'expression de q ainsi que sa matrice dans B'.

5- Calculer l'orthogonal de $F = Vect\,\{v_1 = (1,1,0), v_2 = (2,0,1)\}$.

ooOoo