Série TD N° 1 D'Algèbre 4

Série TD N° 1 D'Algèbre 4 -2024/2025

Exercice 1:

1) Déterminer la forme linéaire f définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que: $f(1,1,1) = 0, f(2,0,1) = 1, f(1,2,3) = 4$.

2) Donner un hyperplan H de $\mathbb{R}^3$, une base de $\mathbb{R}^3$ et tous ses supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2:

Soit E=$\mathbb{R}^4$, $F = \{(x,y,z,t) \in E : x + y - z + t = 0\}$ et $D = vect\{v = (1,1,1)\}$

1) Montrer que F est un hyperplan de E, déduire sa dimension, une base et tous ses supplémentaires.

2) Montrer que F et D sont supplémentaires.

3) Soit m un réel et $u = (m, m+1, 2m, m-2)$ un vecteur de E. Pour quelles valeurs de m, les sous-espaces F et D sont-ils supplémentaires?

Exercice 3: 1) Montrer que $B = \{v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,0,1), v_3 = (0,1,1)\}$ est une base pour $\mathbb{R}^3$ et calculer sa base duale B^*.

2) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soient f_1^*, f_2^*, f_3^* des formes linéaires sur E définies par $f_1^* = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*, f_2^* = -e_1^* + 2e_3^*, f_3^* = e_1^* + 3e_2^*$.

Montrer que (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est une base de E^* et déterminer sa base pré-duale (f_1, f_2, f_3) de E.

Exercice 4 : (Supp) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la base $B = (1, X, \ldots, X^n)$. Pour tout $i \in [0,n]$, on définit une forme linéaire f_i sur E par :

$$j \in [0.n], f_i(X^j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

1) Montrer que $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une base de E^*.

2) On considère ϕ, ψ de E^* définies par : $\forall P \in E, \quad \phi(P) = P(1), \quad \psi(P) = P\prime(0)$..

Déterminer les coordonnées de chacune des formes ϕ *et* ψ *dans la base* $(f_0, \ldots, f_n)$.

3) $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est-il un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$? Si oui, en donner tous ses supplémentaires.

4) $\mathbb{R}^{n-1}$ est-il un hyperplan de $\mathbb{R}^n$? En déduire une caractérisation des hyperplans de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5 : On considère l'application suivante

$b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, b(x,y) = x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_3 + 5x_3y_2.$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire.
2. Calculer la matrice de b dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, donner son rang et calculer son noyau.
3. b est-elle non dégénérée?

Dr. Ammar Boudeliou