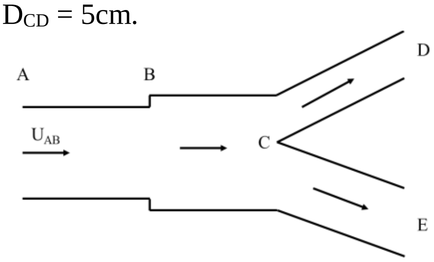
TD N° 03 de MDF

Exercice 1 :

L'eau s'écoule à travers une conduite horizontale AB de diamètre D_{AB} = 10cm avec une vitesse moyenne de U_{AB} =2m/s. Cette conduite est liée avec d'autre conduite BC de diamètre D_{BC} = 18cm. La conduite BC, se divise en deux branches CD et CE (Voir la figure). La vitesse moyenne d'écoulement dans la conduite CE est de U_{CE} = 3m/s. Sachant que le débit volumique Q_{vCD} de la conduite CD est égale $Q_{vAB}/3$. Calculer :

1. Le débit volumique et le débit massique dans la conduite AB,
2. Les vitesses moyennes d'écoulement dans les conduites BC et CD,
3. Le diamètre de la conduite CE.

On donne : $g = 9.81\ m/s^2$, $\rho = 1000 kg/m^3$, D_{CD} = 5cm.

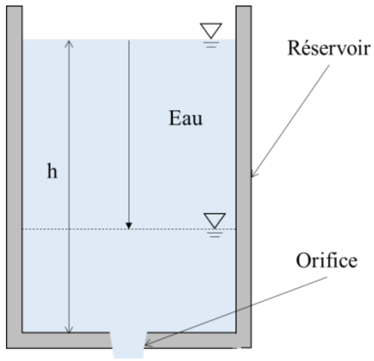


Exercice 2 :

Un réservoir de grande section A_1 ouvert à l'atmosphère rempli d'eau, s'écoule à travers un orifice. Cet orifice est situé au fond du réservoir avec une forme rectangulaire de 0.2m de largeur et 0.3m de longueur. Au début, la hauteur d'eau dans le réservoir est de 5m comme indiqué sur la figure ci-dessous. Calculer :

1. Le débit volumique de vidange,
2. Le temps théorique de vidange jusqu'à la hauteur d'eau dans le réservoir est de 2m,
3. Le temps pour vider le réservoir complètement,

On donne : $g = 9.81 m/s^2$, la masse volumique de l'eau $\rho_e = 1000 kg/m^3$, z_1 = 5m, z_2 = 2m, $A_1 = 12.56 m^2$. C_v = 0.6.



SOLUTION DE LA SERIE de TD N°03

Exercice N°01 :

1. Les débits volumique et massique qui traversent la conduite AB sont :
   a. Le débit volumique dans la conduite AB est :

$$Q_v = U.A \Rightarrow Q_{vAB} = U_{AB}A_{AB} = U_{AB}\frac{\pi D_{AB}^2}{4}$$

A.N :

$$Q_{vAB} = 2x\frac{\pi(0.10)^2}{4} = 0.01571 m^3/s = 942.6 \text{ l/min}$$

   b. Le débit massique dans la conduite AB est :

$$Q_m = \rho Q_v \Rightarrow Q_{mAB} = \rho Q_{vAB}$$

A.N :

$$Q_{mAB} = 1000x0.01571 = 15.71 \text{ kg/s}$$

2. Les vitesses moyennes d'écoulement dans les conduites BC et CD :

On suppose que l'eau est un fluide parfait incompressible et s'écoule en régime permanent, en appliquant l'équation de conservation de masse entre les deux conduites AB et BC, on obtient :

   a. La conduite BC :

$$Q_{vAB} = Q_{vBC} = U_{AB}.A_{AB} = U_{BC}.A_{BC}$$
$$\Rightarrow U_{BC} = \frac{U_{AB}.A_{AB}}{A_{BC}} = \frac{U_{AB}.D_{AB}^2}{D_{BC}^2}$$

A.N :

$$U_{BC} = \frac{2x(0.10)^2}{(0.18)^2} = 0.617 \text{ m/s}$$

   b. La conduite CD :

$$Q_{vCD} = \frac{Q_{vAB}}{3} = \frac{U_{AB}.A_{AB}}{3} = U_{CD}.A_{CD}$$
$$\Rightarrow U_{CD} = \frac{U_{AB}.A_{AB}}{3.A_{CD}} = \frac{U_{AB}.D_{AB}^2}{3.D_{CD}^2}$$

A.N :

$$U_{CD} = \frac{2x(0.10)^2}{3x(0.05)^2} = 2.67\,m/s$$

3. Le diamètre de la conduite CE :

D'après l'équation de continuité le débit volumique est conservé entre l'entrée et la sortie :

$$\begin{aligned}
&Q_{vAB} = Q_{vBC} = Q_{vCD} + Q_{vCE} \Rightarrow Q_{vCE} = Q_{vAB} - Q_{vCD} \\
&\Rightarrow U_{CE}.A_{CE} = U_{AB}.A_{AB} - U_{CD}.A_{CD} \\
&\Rightarrow U_{CE}.\frac{\pi D_{CE}^2}{4} = U_{AB}.\frac{\pi D_{CE}^2}{4} - U_{CD}.\frac{\pi D_{CE}^2}{4}
\end{aligned}$$

Le diamètre de la conduite CE, est :

$$D_{CE} = \sqrt{\frac{U_{AB}.D_{AB}^2 - U_{CD}.D_{CD}^2}{U_{CE}}}$$

A.N :

$$D_{CE} = \sqrt{\frac{2x(0.10)^2 - 2.67x(0.05)^2}{3}} = 0.0666m = 6.66cm$$

Exercice **N°**2 :

1. La puissance délivrée par la pompe hydraulique est calculée comme suite :

   On suppose que, l'eau est un fluide parfait, l'équation de Bernoulli entre A et C avec échange de travail s'écrite :

$$\frac{P_A}{\rho_e g} + \frac{U_A^2}{2g} + z_A + h_P = \frac{P_C}{\rho_e g} + \frac{U_C^2}{2g} + z_C$$

$P_C = P_A = P_{atm}$ et $U_A = 0$, on obtient :

$$h_P = \frac{U_C^2}{2g} + (z_C - z_A) \Rightarrow h_P = \frac{U_C^2}{2g} + h$$

La vitesse d'écoulement dans la conduite est calculée comme suite :

$$\begin{aligned}
&Q = A.U \\
&\Rightarrow U_C = \frac{Q}{A} = \frac{4.Q}{\pi.D^2} = \frac{4x55x10^{-3}}{\pi x60x(0.02)^2} = 2.92m/s
\end{aligned}$$

A.N :

$$h_P = \frac{(2.92)^2}{2x9.81} + 21.5 = 21.93m$$

La puissance fournie de la pompe hydraulique est calculée comme suite :

$$\dot{W}_P = \rho.g.Q.h_P$$

A.N :

$$\dot{W}_P = 1000x9.81x\frac{55}{60}x10^{-3}x21.93 \approx 197W$$

2. La puissance délivrée à la pompe hydraulique est calculée comme suite :

$$\eta_P = \frac{\dot{W}_P}{\dot{W}'_P} \Rightarrow \dot{W}'_P = \frac{\dot{W}_P}{\eta_P}$$

A.N :

$$\dot{W}'_P = \frac{197000}{0.8} = 246.25kW$$

3. La pression effective au point B est calculée comme suite :

L'équation de Bernoulli entre A et B s'écrie :

$$\frac{P_A}{\rho_e g} + \frac{U_A^2}{2g} + z_A = \frac{P_B}{\rho_e g} + \frac{U_B^2}{2g} + z_B$$

$P_A = P_{atm}$, $U_A = 0$, $U_C = U_B$ (même débit, même conduite) et la pression $P_{effe} = P_{abs} - P_{atm}$, on obtient :

$$\frac{P_B - P_{atm}}{\rho_e g} = \frac{P_{B-effe}}{\rho_e g} = (z_A - z_B) - \frac{U_B^2}{2g}$$

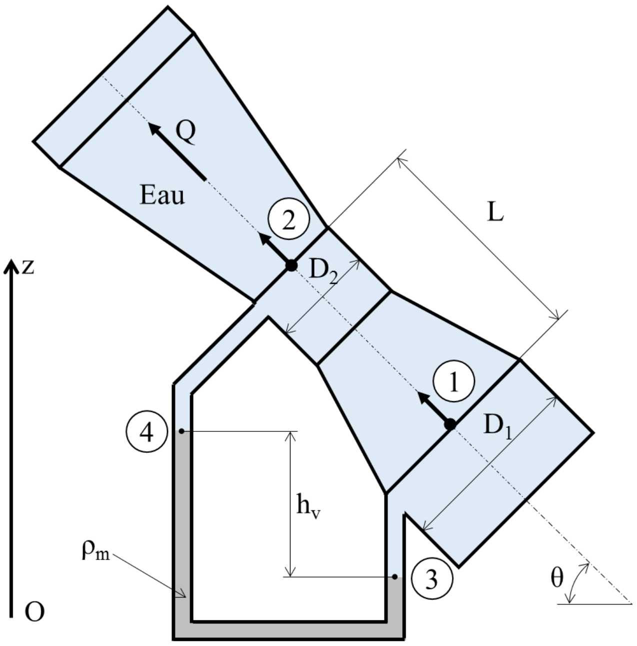
$$\Rightarrow P_{B-effe} = \rho_e g(z_A - z_B) - \frac{\rho_e U_B^2}{2}$$

A.N :

$$P_{B-effe} = 1000x9.81x2.5 - \frac{1000x(2.92)^2}{2} = 20.2618kPa$$

Exercice N°3 ;

1. La variation de pression dans le col de venturi-mètre est :



On suppose que le fluide est parfait. L'équation fondamentale de l'hydrostatique appliquée entre les deux points (1) et (2) nous donne :

$$P_1 + \rho_e g(z_1 - z_3) - \rho_m g h_v - \rho_e g(z_2 - z_4) = P_2$$

$$P_1 - P_2 = \rho_e g(z_3 - z_1) + \rho_m g h_v + \rho_e g(z_2 - z_4)$$

$$P_1 - P_2 = \rho_e g(z_3 - z_1 + z_2 - z_4) + \rho_m g h_v$$

On a : $z_3 - z_4 = -h_v$ et $z_2 - z_1 = L.\sin\theta$

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \rho_e g(-h_v + L\sin\theta) + \rho_m g h_v$$

A.N :

$$\Delta P = P_1 - P_2 = 1000x9.81(-0.22 + 0.35x\sin 45) + 13600x9.81x0.22 = 2.96x10^4\,\text{Pa}$$

2. Le débit volumique traversant le venturi-mètre :

En appliquant le théorème de Bernoulli entre les deux points (1) et (2) situés sur la même ligne de courant, on obtient :

$$\frac{P_1}{\rho_e g} + \frac{U_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho_e g} + \frac{U_2^2}{2g} + z_2 \Leftrightarrow \frac{P_1 - P_2}{\rho_e g} = \left(\frac{U_2^2 - U_1^2}{2g}\right) + (z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = \rho_e\left(\frac{U_2^2 - U_1^2}{2}\right) - \rho_e g h_v$$

Par conséquent, la variation de pression entre les deux points est $P_1 - P_2 = \rho_e g(-h_v + L\sin\theta) + \rho_m g h_v$, en remplaçant cette valeur dans l'équation précédente, on obtient :

$$\rho_e g(-h_v + L\sin\theta) + \rho_m g h_v = \rho_e\left(\frac{U_2^2 - U_1^2}{2}\right) + \rho_e g(z_2 - z_1)$$

Où $z_2 - z_1 = L\sin\theta$, on a :

$$(\rho_m - \rho_e) g h_v = \rho_e\left(\frac{U_2^2 - U_1^2}{2}\right)$$

D'autre part, en appliquant l'équation de conservation de masse entre les points (1) et (2), nous obtenons :

$$Q_v = U_1.A_1 = U_2.A_2$$
$$\Rightarrow U_1 = \frac{Q_v}{A_1} = \frac{4.Q_v}{\pi D_1^2} \text{ et } U_2 = \frac{Q_v}{A_2} = \frac{4.Q_v}{\pi D_2^2}$$

En remplaçant les valeurs de vitesses U_1 et U_2 dans l'équation précédente, on obtient :

$$(\rho_m - \rho_e) g h_v = \frac{\rho_e 8 {Q_v}^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{D_2^4} - \frac{1}{D_1^4}\right)$$

Le débit volumique Q_v qui traverse le venturi-mètre est :

$$Q_v = \pi D_2^2 \sqrt{\frac{((\rho_m/\rho_e) - 1) g h_v}{8\left[1 - (D_2/D_1)^4\right]}}$$

A.N :

$$Q_v = \pi(0.19)^2 \sqrt{\frac{((13600/1000) - 1) 9.81 x 0.22}{8\left[1 - (0.19/0.38)^4\right]}} = 0.216 m^3/s$$

Exercice N°04 :

1. Le débit volumique de vidange :

   Comme déjà vue précédemment, la vitesse réelle de vidange d'un réservoir est donnée par la relation suivante :

$$U_2 = C_v \sqrt{2gh}$$

Où :

U_2 : la vitesse de vidange d'un réservoir en m/s,

C_v : le coefficient de vitesse dans ce cas sa valeur est 0.6,

g : l'accélération de la pesanteur en m/s^2,

h : la hauteur vertical de fluide dans le réservoir en m.

Le débit volumique de vidange est calculé par la relation suivante :

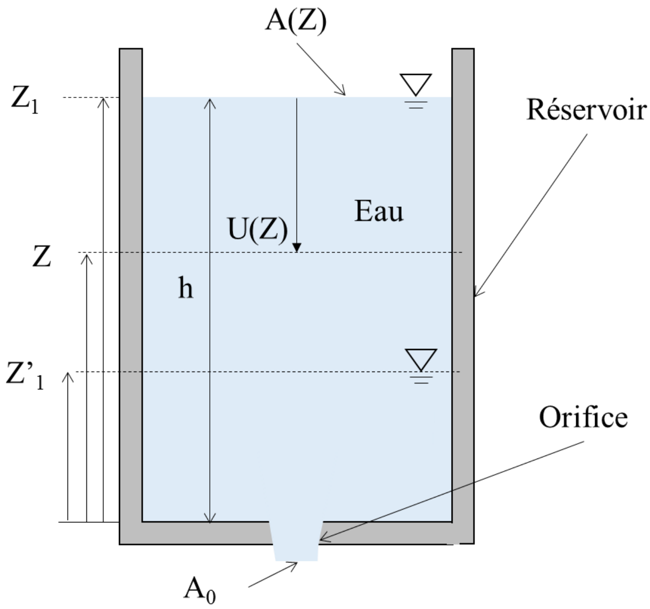
$$Q_v = A_2 U_2 = A_2 C_v \sqrt{2gh}$$

A.N :

$$Q_v = 0.2x0.3x0.6x\sqrt{2x9.81x5} = 0.367m^3/s$$

2. Le temps théorique de vidange d'un réservoir :

Dans le cas général, en temps quelconque la surface libre est à une hauteur, z, voir la figure ci-dessous. Au départ, a la surface libre est à $z = z_1$ et à la fin elle est à $z = z_2$.



Ainsi, l'équation de conservation de masse dans le fluide entre la hauteur quelconque z et la hauteur z_2 donne :

$$A(z)U(z) = A_2U_2 = A_2C_v\sqrt{2gz} \qquad \text{(a)}$$

D'autre part, la vitesse à la hauteur z peut donc également s'écrire par la relation suivante :

$$U(z) = -\frac{dz}{dt} \qquad \text{(b)}$$

Le singe (-) parce que le rapport dz/dt est inférieur de zéro.
On remplaçant l'équation (b) dans l'équation (a), on trouver :

$$A(z)\left(-\frac{dz}{dt}\right) = A_2C_v\sqrt{2gz}$$

On séparant les variables z et t, on trouve :

$$dt = \frac{-A(z)}{A_2C_v\sqrt{2g}}\frac{dz}{\sqrt{z}}$$

Le temps de vidange de réservoir de z_1 à z'_1 est donné par l'intégration de l'équation précédente :
À l'instant initial : temps 0 et hauteur = z_1,
À l'instant d'étudié : temps t et hauteur z'_1.

$$\int_0^t dt = \int_{z_1}^{z'_1} -\frac{A(z)}{A_2 C_v \sqrt{2g}} z^{-1/2} dz$$

Si les sections de l'orifice A_2 et de réservoir A_1 sont constantes $A(z) = A_1$, on a :

$$t = \frac{A_1}{A_2 C_v \sqrt{2g}} \int_{z'_1}^{z_1} z^{-1/2} dz$$

Après l'intégration de l'équation précédente, on obtient :

$$t = \frac{2.A_1}{A_2 C_v \sqrt{2g}} \left(\sqrt{z_1} - \sqrt{z'_1}\right)$$

a. Le temps nécessaire pour passer de la hauteur initiale z_1 = 5m à la hauteur z'_1 = 2m :

A.N :
À l'instant initial : temps 0 et hauteur = 5m,
À l'instant d'étudié : temps t et hauteur 2m.

$$t_{1-1'} = \frac{2x12.56}{0.2x0.3x0.6\sqrt{2x9.81}} \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right) = 129.47s = 2\,\text{min et}\,9s$$

b. Le temps de vidange totale t du réservoir, c'est le temps pour passer de z_1 à la hauteur z'_1 = 0 :

A.N :
À l'instant initial : temps 0 et hauteur = 5,
À l'instant d'étudié : temps t et hauteur 0.

$$t = \frac{2x12.56}{0.2x0.3x0.6\sqrt{2x9.81}} \left(\sqrt{5}\right) = 352.25s = 5\text{min et } 52s$$

Exercice N°05 :

Le débit volumique réel d'huile qui traverse le diaphragme est montré par l'équation (III-22) :

$$Q_r = C_d A_0 A_1 \sqrt{\frac{2gh\left(\left(\rho_m / \rho_h\right) - 1\right)}{A_1^2 - A_0^2}}$$

A.N :

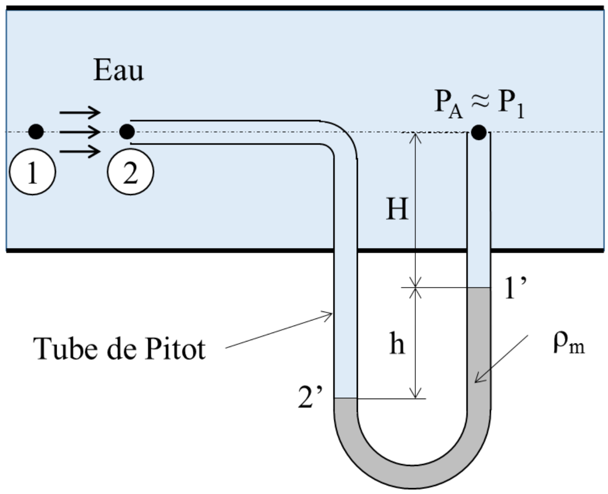
$$Q_r = 0.6x \frac{\pi(0.15)^2}{4} x \frac{\pi(0.3)^2}{4} \sqrt{\frac{2x9.81x0.40x\left((13600/850) - 1\right)}{\left(\pi(0.3)^2/4\right)^2 - \left(\pi(0.15)^2/4\right)^2}} = 0.11881 m^3/s$$

Exercice N°06 :

La vitesse moyenne d'écoulement dans la conduite est :

En supposant que l'eau est un fluide parfait, incompressible et que l'écoulement est permanant. L'application de l'équation de *Bernoulli le long d'une ligne de courant, entre les deux points (1) et (2), donne :*

$$\frac{P_1}{\rho_e g}+\frac{U_1^2}{2g}+z_1=\frac{P_2}{\rho_e g}+\frac{U_2^2}{2g}+z_2$$



On a $z_1 = z_2$, et $U_2 = 0$:

$$\frac{P_1}{\rho_e g}+\frac{U_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\rho_e g}\Rightarrow P_2-P_1=\rho_e\frac{U_1^2}{2}$$

Ainsi, les pressions de deux points (1) et (2) sont :

$$P_1=P_{1'}-\rho_e gH$$

$$P_2=P_{2'}-\rho_e g(H+h)$$

En remplaçant ces valeurs de P_1 et P_2 dans l'équation précédente, on obtient :

$$P_{2'}-\rho_e g(H+h)-P_{1'}+\rho_e gH=\rho_e\frac{U_1^2}{2}$$

$$\Rightarrow\rho_e\frac{U_1^2}{2}=P_{2'}-P_{1'}-\rho_e gh$$

Par ailleurs, la variation de pression dans le manomètre est :

$$P_{2'}-P_{1'}=\rho_m gh$$

En remplaçant cette valeur dans l'équation précédente, on obtient :

$$\rho_e\frac{U_1^2}{2}=\rho_m gh-\rho_e gh\Rightarrow U_1=\sqrt{\frac{2gh(\rho_m-\rho_e)}{\rho_e}}$$

L'expression de la vitesse réelle est :

$$U_{r1} = C_v . U_1 = C_v . \sqrt{\frac{2gh(\rho_m - \rho_e)}{\rho_e}}$$

A.N :

$$U_{r1} = 0.98\sqrt{\frac{2x9.81x0.03x(13600-1000)}{1000}} = 2.67 m/s$$