TD N° 04 de MDF

Exercice 1 :

Un fluide s'écoule à travers une conduite linéaire de longueur 1km. Déterminer le régime d'écoulement et calculer la perte de charge dans la conduite pour les cas suivants :

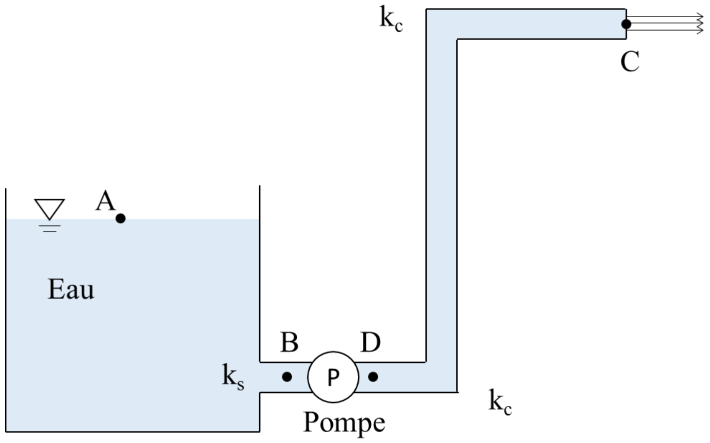
1. De fluide de viscosité cinématique $\upsilon = 118\text{x}10^{-6}$ m^2/s, le débit volumique de l'écoulement Q_v = 19 l/s, le diamètre de la conduite D = 20cm, la rugosité de conduite 2mm.
2. De l'eau ρ = 1000 kg/m3, de viscosité dynamique $\mu = 10^{-3}$ kg/m.s, la vitesse moyenne de 2m/s, le diamètre de la conduite D = 0.3m, la rugosité de la conduite 2mm.

Exercice 2 :

L'eau est pompée à partir du réservoir A par une pompe hydraulique, comme indiquer sur la figure ci-dessous. La pompe hydraulique est refoulée l'eau à travers une conduite de longueur 30m, de diamètre 20mm et de rugosité 0.05mm. Le débit volumique dans la conduite est de 55 litre/min. Le coefficient de perte de charge linéaire λ = 0.027. Par contre les coefficients de pertes de charge singulières, à l'entrée de la conduite k_s = 0.5 et au niveau des coudes k_c = 1.1. Calculer :

1. La puissance fournie par la pompe hydraulique,
2. La pression effective dans la conduite au point B. On néglige les pertes de charges linéaires.

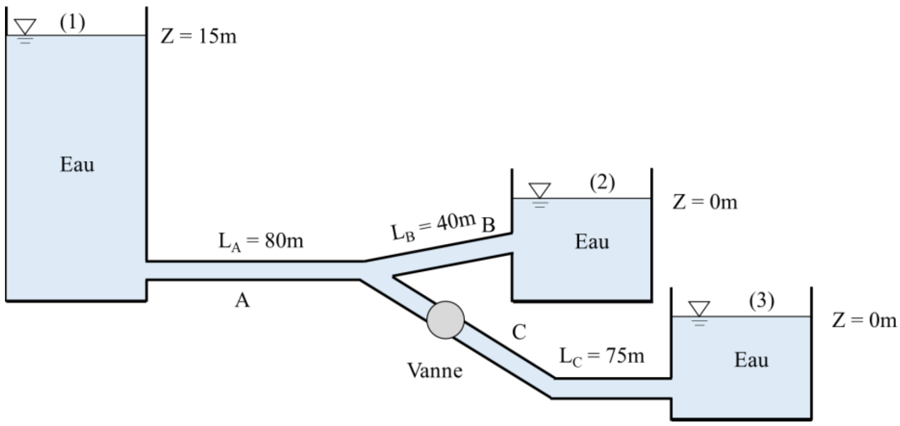
On donne : Z_A = 3.5m, Z_B = 1m, Z_C = 25m, $\rho e_{(eau)}$ = 1000 kg/m^3.



Exercice 3 :

L'eau s'écoule du réservoir (1) vers les deux réservoirs (2) et (3), comme montre la figure ci-dessous. Les trois réservoirs sont reliés par un système de trois conduites A, B et C de même diamètre D = 10cm. Le coefficient de pertes de charges linéaires est de 0.02 pour toutes les conduites. On supposer que les coefficients de pertes de charges singulières sont nuls sauf que de la vanne est k_v = 0.5. Lorsque la vanne est ouverte calculer :

1. Les vitesses moyennes d'écoulement dans les trois conduites.
2. Les débits volumiques dans les trois conduites.



SOLUTION DE LA SERIE de TD N°04

Exercice N°01 :

1. Dans le premier cas :
   a. Déterminant le nombre de Reynolds donné par la relation suivante :

$$Re = \frac{UD}{\nu}$$

La vitesse d'écoulement :

$$Q = U.A \Rightarrow U = \frac{Q}{A} = \frac{4.Q}{\pi D^2}$$

A.N :

$$U = \frac{4x19x10^{-3}}{\pi x0.2^2} = 0.6m/s$$

$$Re = \frac{0.6x0.2}{118x10^{-6}} = 1016.94 = 1017$$

Re = 1016.94 < 2000, donc le régime d'écoulement est laminaire.

   b. On calcule la perte de charge linéaire par la formule suivante :

$$\Delta H_L = \lambda \frac{U^2 L}{2gD}$$

Le coefficient de perte de charge linéaire est calculé par la relation suivante :

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

A.N :

$$\lambda = \frac{64}{1017} = 0.063$$

$$\Delta H_L = 0.063 \frac{0.6^2 x1000}{2x9.81x0.2} = 5.78m$$

2. Dans le deuxième cas :
   a. On calcule le nombre de Reynolds pour déterminer le régime d'écoulement :

$$Re = \frac{\rho UD}{\mu}$$

A.N :

$$Re = \frac{1000x2x0.3}{10^{-3}} = 600000$$

Le nombre de Reynolds est Re = 600000 > 4000 donc l'écoulement est turbulent.

b. On calcule la perte de charge linéaire par la formule suivante :

$$\Delta H_L = \lambda \frac{U^2 L}{2gD}$$

Le régime est turbulent, on appliquer la formule de Colebrook pour calculer le coefficient de perte de charge linéaire :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left[\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right]$$

L'équation précédente est une équation non-linéaire pour la résoudre, on utilise la méthode du point fixe. On pose $1/\sqrt{\lambda} = x$ et en remplaçant cette valeur dans la formule de Colebrook, on aura :

$$x = -2\log_{10}\left[\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{R_e}x\right]$$

A.N :

On donne une valeur initiale pour x_0 et on calcule x_1 et ainsi de suite dès les valeurs x_i et x_{i+1} sont proches :

On pose $x_0 = 0$, on trouve x_1 :

$$x_1 = -2\log_{10}\left[\frac{2}{3.7x300} + \frac{2.51}{Re}x_0\right]$$
$$x_1 = -2\log_{10}\left[\frac{2}{3.7x300} + \frac{2.51}{600000}x0\right] = 5.488586$$

On pose $x_1 = 5.488586$, on trouve x_2 :

$$x_2 = -2\log_{10}\left[\frac{2}{3.7x300} + \frac{2.51}{600000}.x_1\right]$$
$$x_2 = -2\log_{10}\left[\frac{2}{3.7x300} + \frac{2.51}{600000}x5.488586\right] = 5.477587$$

On pose $x_2 = 5.477587$, on trouve x_3 :

$$x_3 = -2\log_{10}\left[\frac{2}{3.7x300} + \frac{2.51}{600000}.x_2\right]$$
$$x_3 = -2\log_{10}\left[\frac{2}{3.7x300} + \frac{2.51}{600000}x5.477587\right] = 7.477609$$

On pose $x_3 = 5.477609$, on trouve x_4 :

$$x_4 = -2\log_{10}\left[\frac{2}{3.7x300} + \frac{2.51}{600000}.x_3\right]$$
$$x_4 = -2\log_{10}\left[\frac{2}{3.7x300} + \frac{2.51}{600000}x5.477609\right] = 5.477609$$

On arrête le calcul parce que les valeurs de x_3 et x_4 sont très proches.

Donc la valeur de $x = 5.477609$ et $\lambda = 1/x^2 = 0.033$.

A.N :

$$\Delta H_L = 0.033\frac{2^2 x1000}{2x9.81x0.3} = 22.43m$$

Exercice N°2 :

En appliquant l'équation de Bernoulli entre A et C avec échange de travail, on trouve :

$$\frac{P_A}{\rho_e g} + \frac{U_A^2}{2g} + z_A + h_P = \frac{P_C}{\rho_e g} + \frac{U_C^2}{2g} + z_C + \Delta H_T$$

On a $P_C = P_A = P_{atm}$ et $U_A = 0$, on obtient :

$$h_P = \frac{U_C^2}{2g} + z_C - z_A + \Delta H_T$$

La vitesse d'écoulement dans la conduite est :

$$Q = A.U$$
$$\Rightarrow U_C = \frac{Q}{A} = \frac{4.Q}{\pi.D^2}$$

A.N :

$$U_C = \frac{4x55x10^{-3}}{\pi x60x(0.02)^2} = 2.92m/s$$

Les pertes de charges totales sont :

$$\Delta H_T = \Delta H_L + \Delta H_S$$

La perte de charge linéaire dans la conduite est :

$$\Delta H_L = \lambda\frac{U_c^2 L}{2gD}$$

A.N :

$$\Delta H_L = 0.027x\frac{(2.92)^2 x30}{2x9.81x0.02} = 17.60m$$

Les pertes d charges singulières sont :

$$\Delta H_S = \Delta H_{Se} + \Delta H_{Sc1} + \Delta H_{Sc2}$$

$$\Delta H_S = k_e\frac{U_c^2}{2g} + k_{c1}\frac{U_c^2}{2g} + k_{c2}\frac{U_c^2}{2g}$$

A.N :

$$\Delta H_S = 0.5\frac{(2.92)^2}{2x9.81} + 1.1\frac{(2.92)^2}{2x9.81} + 1.1\frac{(2.92)^2}{2x9.81} = 1.1733m$$

La charge délivrée par la pompe hydraulique hp est :

A.N :

$$h_P = \frac{(2.92)^2}{2x9.81} + 25 - 3.5 + (17.60 + 1.1733) = 40.708m$$

La puissance fournie par la pompe hydraulique :

$$\dot{W}_P = \rho.g.Q.h_P$$

A.N :

$$\dot{W}_P = 1000x9.81x\frac{55}{60}x10^{-3}x40.708 \approx 366W$$

La pression effective au point B :

L'équation de Bernoulli entre A et B s'écrie :

$$\frac{P_A}{\rho_e g} + \frac{U_A^2}{2g} + z_A = \frac{P_B}{\rho_e g} + \frac{U_B^2}{2g} + z_B + \Delta H_s$$

$P_A = P_{atm}$, $U_A = 0$, $U_C = U_B$ (même débit, même conduite) et la pression $P_{effe} = P_{abs} - P_{atm}$, on obtient :

$$\frac{P_B - P_{atm}}{\rho_e g} = \frac{P_{B-effe}}{\rho_e g} = (z_A - z_B) - \frac{U_B^2}{2g} - \Delta H_s$$

$$\Rightarrow P_{B-effe} = \rho_e g(z_A - z_B) - \frac{\rho_e U_B^2}{2} - \rho_e g.\Delta H_s$$

Les pertes d charges singulières sont :

$$\Delta H_S = \Delta H_{Se}$$

$$\Delta H_S = k_e \frac{U_c^2}{2g} = 0.5\frac{(2.92)^2}{2x9.81} = 0.217m$$

A.N :

$$P_{B-effe} = 1000x9.81x2.5 - \frac{1000x(2.92)^2}{2} - 1000x9.81x0.217 = 18.133kPa$$

Exercice N°3 ;

1. L'équation de Bernoulli entre (1) et (2) à travers le circuit A-B :

$$\frac{P_1}{\rho_e g} + \frac{U_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho_e g} + \frac{U_2^2}{2g} + z_2 + \Delta H_{LA} + \Delta H_{LB}$$

On a $P_1 = P_2 = P_{atm}$ et $U_1 = U_2 = 0$, on trouve :

$$z_1 - z_2 = \Delta H_{LA} + \Delta H_{LB}$$

On remplaçant les formules de perte de charge linaire dans l'équation précédente, on trouve :

$$z_1 - z_2 = \lambda_A \frac{U_A^2 L_A}{2gD} + \lambda_B \frac{U_B^2 L_B}{2gD}$$

A.N :

$$15 - 0 = 0.02 \frac{U_A^2 x80}{2x9.81x0.1} + 0.02 \frac{U_B^2 40}{2x9.81x0.1}$$

$$15 = (0.8155)U_A^2 + (0.4077)U_B^2 \qquad \text{(a)}$$

2. L'équation de Bernoulli entre (1) et (3) à travers le circuit A-C :

$$\frac{P_1}{\rho_e g} + \frac{U_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_3}{\rho_e g} + \frac{U_3^2}{2g} + z_3 + \Delta H_{LA} + \Delta H_{LC} + \Delta H_S$$

On a $P_1 = P_2 = P_{atm}$ et $U_1 = U_2 = 0$, on trouve :

$$z_1 - z_3 = \Delta H_{LA} + \Delta H_{LC} + \Delta H_S$$

On remplaçant les formules de perte de charge linaire et singulière dans l'équation précédente, on trouve :

$$z_1 - z_3 = \lambda_A \frac{U_A^2 L_A}{2gD} + \lambda_C \frac{U_C^2 L_C}{2gD} + k_v \frac{U_C^2}{2g}$$

$$z_1 - z_2 = \lambda_A \frac{U_A^2 L_A}{2gD} + \left(\lambda_C \frac{L_C}{2gD} + \frac{k_v}{2g}\right) U_C^2$$

A.N :

$$15 = 0.02 \frac{U_A^2 x80}{2x9.81x0.1} + \left(\frac{0.02x75}{2x9.81x0.1} + \frac{0.5}{2x9.81}\right) U_C^2$$

$$15 = 0.8155U_A^2 + 0.7900U_C^2 \quad \text{(b)}$$

3. Calculer les vitesses moyennes d'écoulement dans les trois conduites :

On a l'équation de continuité :

$$Q_A = Q_B + Q_C$$

Puisque les trois conduites ont le même diamètre donc la même section, on obtient :

$$U_A = U_B + U_C \quad \text{(c)}$$

On a donc un système de trois équations (a), (b) et (c) et trois inconnus U_A, U_B, U_C, on résout le système :

$15 = 0.8155U_A^2 + 0.4077U_B^2 \quad$ (a)

$15 = 0.8155U_A^2 + 0.7900U_C^2 \quad$ (b)

$U_A = U_B + U_C \quad$ (c)

$(a) - (b) \Rightarrow 0 = 0.4077U_B^2 - 0.7900U_C^2 \Rightarrow U_B^2 = 1.9377U_C^2$

$$U_B = 1.3920 U_C \qquad \text{(d)}$$

En remplaçant l'équation (d) dans l'équation (c), on obtient :

$$U_A = 2.3920 U_C \qquad \text{(e)}$$

Ainsi, en remplaçant l'équation (e) dans l'équation (b), on trouve :

$$15 = 5.4560 U_C^2 \Rightarrow U_C = \sqrt{\frac{15}{5.4560}} = 1.6581 m/s$$

U_C = 1.6581 m/s.

U_A = 3.9662 m/s.

U_B = 2.3081 m/s.

4. Calculer les débits volumiques dans les trois conduites :

$$Q_{vA} = U_A . A_A = U_A \frac{\pi D^2}{4} = 3.9662 x \frac{\pi x 0.1^2}{4} = 0.0311 m^3/s$$

$$Q_{vB} = U_B . A_B = U_B \frac{\pi D^2}{4} = 2.3081 x \frac{\pi x 0.1^2}{4} = 0.0181 m^3/s$$

$$Q_{vC} = U_C . A_C = U_C \frac{\pi D^2}{4} = 1.6581 x \frac{\pi x 0.1^2}{4} = 0.0130 m^3/s$$