TD PROBA M1

Omar Boukhadra

Dépt. Mathématiques
Faculté des Sciences Exactes
Université de Constantine 1
boukhadra@umc.edu.dz

11 avril 2026

Contenu

1 Probabilité et v.a.

Exercice 1.1 (a) Soit $(A_i)_{i=1}^n$ une collection d'évènements dans un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$. Montrer que $\cap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$.

(b) Si $\mathcal{G}$ est une autre tribu de Ω, montrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est aussi une tribu de Ω. Cependant, montrer que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ ne l'est pas nécessairement.

Exercice 1.2 Modéliser les expériences aléatoires suivantes par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$:

- (a) une pièce de monnaie équilibrée est lancée trois fois.
- (b) Une boule est tirée d'une urne qui contient un nombre donné de boules rouges et bleues.
- (c) deux boules sont tirées sans remise d'une urne qui contient un nombre donné de boules rouges et bleues.
- (d) Idem avec un tirage avec remise.
- (e) une pièce de monnaie équilibrée est lancée répétitivement jusqu'à ce que pile apparaisse.

Exercice 1.3 (Inégalité de Boole) Prouver que

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Exercice 1.4 Montrer que

$$P(\limsup A_n) \geq \limsup P(A_n)$$

Exercice 1.5 Soit $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = \{A \text{ est dénombrable ou } A^c\}$. Et considérer sur $\mathcal{F}$, l'application

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } A^c \text{ est dénombrable} \end{cases}$$

(a) Montrer que $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé.

(b) Montrer que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ est une variable aléatoire par rapport à $\mathcal{F}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ ssi il existe n tel que $(X^{-1}(\{n\}))^c$ est dénombrable (ssi il existe un n unique tel que $X^{-1}(\{n\})$ est non dénombrable).

Exercice 1.6 Soit deux v.a. X et Y. Montrer que $\min\{X, Y\}, X + Y$ et XY sont aussi des v.a.

Exercice 1.7 Soit X une v.a. à valeurs dans un ensemble E muni de la tribu de ses parties, telle que $P(X = x) > 0$ pour tout $x \in E$. Montrer que E est fini ou dénombrable.

Exercice 1.8 Soit F, G deux f.r. et $\lambda \in [0, 1]$. Montrer que $\lambda F + (1 - \lambda)G$ est une f.r. Est-ce que FG est une f.r. ? Particulièrement, si f et g sont les d.p. de ces dernières, montrer que $\lambda f + (1-\lambda)g$ est une d.p., celle de $\lambda F + (1-\lambda)G$. Est-ce que fg en est une ?

Exercice 1.9 Soit F une f.r. et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les fonction suivantes sont aussi des f.r. :

$$(a)\ F(x)^n \qquad (b)\ 1 - (1 - F(x))^n \qquad (c)\ F + (1 - F)\log(1 - F)$$

Exercice 1.10 Dire si les fonctions suivantes définissent des d.p. en déterminant la valeur de la constante c, et éventuellement la f.r. associée :

$$f(x) = c\,x^{-d}\,\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x), \quad g(x) = \frac{c\,e^x}{(1 + e^x)^2}$$

Exercice 1.11 Soit F le f.r. de la v.a. X. Exprimer en fonction de F les f.r. des v.a. $-X, X^+, aX + b$ et X^2.

Exercice 1.12 Soit X une v.a. uniformément distribuée sur $[0, 2]$. Calculer

$$(a)\ P(1 \le X \le 2) \qquad (b)\ P(X^2 \le X) \qquad (d)\ P(X + X^2 \le 3/4)$$

Exercice 1.13 Soit X une v.a. de distribution $B(n, p)$. Montrer que

$$E\Big(\frac{1}{1 + X}\Big) = \frac{1 - q^{n+1}}{(n + 1)p}$$

Exercice 1.14 Soit une X une v.a. de f.r. F et U une v.a. de distribution uniforme sur $[0, 1]$. Soit

$$F^{-1}(u) = \inf\{x :\ F(x) \ge u\}$$

Montrer que

$$X \overset{\mathrm{d}}{=} F^{-1}(U) \tag{1.1}$$

En déduire que

$$\mathcal{E} \overset{\mathrm{d}}{=} -\log U$$

Exercice 1.15 Soit X, Y deux v.a. de f.r. commune F. Montrer que

$$P(a < X \le b, c < Y \le d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

Exercice 1.16 Soit X une v.a. de Bernoulli de probabilité de succès p. Soit $Y = 1 - X$ et $Z = XY$. Trouver la distribution des couples (X, Y) et (X, Z).

Exercice 1.17 Considérer la fonction suivante sur $\mathbb{R}_+^2$, $F(x,y) = 1 - e^{-xy}$. Est-elle une f.r. ?

Exercice 1.18 Soit X une v.a. telle que $E(|X|^p) < \infty$ pour $p \geq 1$. Montrer que

$$\lim_{x \to \infty} x^p \, P(|X| > x) = 0$$

Que peut-on dire alors à propos de l'inégalité de Markov ?

Exercice 1.19 Soit X une v.a. telle que $\|X\|_2 = 1$ et pour un $\alpha > 0$, $\|X\| \geq \alpha$. Montrer que $E(|X|) < \infty$. Ensuite, prouver que pour tout $\beta \in [0,1]$, on a

$$P(|X| \geq \alpha\beta) \geq (1-\beta)^2 \alpha^2$$

2 Conditionnement & Indépendance

Exercice 2.1 Soit $P(B) \neq 0$ et poser $Q(A) = P(A \mid B)$. Soit $Q(C) \neq 0$. Montrer que $Q(A \mid C) = P(A \mid B \cap C)$.

Exercice 2.2 Supposer que $P(A)P(B) \neq 0$ et montrer la *formule de Bayes* :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)} \tag{2.1}$$

Ensuite, prouver que

$$P(A \mid B) > P(A) \Longrightarrow P(B \mid A) > P(B)$$

Exercice 2.3 Soit l'expérience aléatoire qui consiste à jeter deux dés équilibrés. Soit A, B et C les évènements respectifs suivants : le premier dé donne une face impair, le second montre une face impair, la somme des deux faces est impaire. Montrer qu'ils sont 2 à 2 indépendants. Sont-ils indépendants ?

Exercice 2.4 Un nombre aléatoire N de dés sont jetés. Appeler S la somme des faces apparues. Supposer que $P(N = n) = 2^{-n}$. Trouver les probabilités :

$$P(N = 2 \mid S = 4), \qquad P(S = 4 \mid N \text{ est pair}).$$

Exercice 2.5 (Paradoxe de Monty Hall) Imaginer trois portes et derrière une d'elles se trouve une voiture ; les deux autres cachent rien sinon au mieux une chèvre.

- (a) Quelle est la probabilité de gagner la voiture en choisissant la bonne porte au hasard ?
- (b) Si une des deux portes qui n'ont pas été choisies au départ dévoile une chèvre, quelle est la probabilité de remporter la voiture si l'on maintient le premier choix, autrement dit, a-t-on intérêt à changer d'avis ? !

Exercice 2.6 Soit X et Y deux v.a. i.i.d. dans $\mathbb{N}^*$ de distribution $\mathcal{G}(1/2)$. Trouver les probabilités suivantes :

$$(a)\; P(\min(X, Y) \leq n) \qquad (b)\; P(X = Y) \qquad (c)\; P(X > Y)$$

Exercice 2.7 ($\mathcal{E}(\lambda)$ est sans mémoire) Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

- (a) Établir que pour tous $s, t \geq 0$, on a

$$P(X > t + s \mid X > t) = P(X > s) \tag{2.2}$$

(*b*) Prouver que

$$\lim_{h\to 0} \frac{P(X \in (t, t+h] \mid X > t)}{h} = \lambda$$

c) Montrer que la propriété (2.2) caractérise la loi exponentielle parmi les lois à densité.

Exercice 2.8 Soit X et Y deux v.a. indépendantes de f.r. respectives F et G. Trouver les f.r. de $\min\{X, Y\}$ et $\max\{X, Y\}$. Ensuite, montrer que

$$P(a < m \leq M \leq b) = (F(b) - F(a))(G(b) - G(a))$$

Exercice 2.9 Soit X et Y deux v.a. indépendantes et de même distribution uniforme sur $[0, 1]$. Trouver la d.p. de $(\min\{X, Y\}, \max\{X, Y\})$ et les lois marginales.

Exercice 2.10 Soit X une v.a. de Bernoulli équiprobable indépendante de la v.a. Y qui est de distribution normale. Trouver la loi de XY.

Exercice 2.11 Soit X et Y deux v.a. de f.r. F et G. Supposer qu'elles soient positives et indépendantes. Trouver la f.r. de XY.

Exercice 2.12 Soit X et Y deux v.a. telles que $|\rho(X, Y)| = 1$. Montrer que X et Y sont p.s. en relation linéaire.

Exercice 2.13 Soit X et Y deux v.a. indépendantes de distributions exponentielles.

(*a*) Déterminer la distribution de $\min\{X, Y\}$.

(*b*) Calculer la probabilité de $\{X < Y\}$.

(*c*) Montrer que $\min\{X, Y\}$ est indépendante de l'évènement $\{X < Y\}$.

(*d*) Donner la f.r. de X/Y.

Exercice 2.14 Soit X, Y et Z des v.a. indépendantes de distributions exponentielles de paramètres respectifs α, β et γ. Calculer $P(X < Y < Z)$.

Exercice 2.15 Soit $U = X + Y$ une somme de deux v.a. i.i.d. suivant une loi exponentielle standard. Poser $V = X/U$. Trouver la distribution de (U, V) et en déduire celle de V.

Exercice 2.16 Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de f.r. F telle que $F < 1$. Soit

$$N = \inf\{n \geq 1 : X_n > X_0\}$$

Trouver la distribution de N et sa moyenne. Ensuite, montrer que

$$F_{X_N} = F + (1 - F)\log(1 - F)$$

Exercice 2.17 Soit maintenant (X_n) une suite de v.a. indépendante et de même distribution $\mathcal{E}$. Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Pour $t \geq 0$, soit

$$N(t) = \#\{n : S_n \leq t\}$$

Montrer que $N(t) \sim \mathcal{P}(t)$.

Exercice 2.18 Soit T la distance entre deux points choisis au hasard dans un segment de longueur a. Poser $F(t, a) = P(T \leq t)$ et montrer que pour $t \in (0, a)$,

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{2}{a} F = \frac{2t}{a^2}$$

En déduire F.

3 Fonction Caractéristique

Exercice 3.1 Trouver les f.c. des d.p. suivantes :

$$(a)\ \frac{1}{\cosh(\pi x)} \qquad (b)\ \frac{1}{2}|x|e^{-|x|}$$

Exercice 3.2 Soit φ une f.c. Montrer que $\overline{\varphi}$ et φ^2 le sont aussi. Par contre, donner un exemple qui montre que $|\varphi|$ ne l'est pas nécessairement.

Exercice 3.3 Soit φ la f.c. d'une v.a. X. Montrer que pour tout $t > 0$,

$$P(|X| > 1/t) \leq \frac{7}{t}\int_0^t (1 - \mathrm{Re}(\varphi(s))\,\mathrm{d}s$$

Exercice 3.4 Soit X et Y deux v.a. indépendantes de distribution normale standard. Utiliser les f.c. pour trouver les distributions de X^2 et XY.

Exercice 3.5 Soit φ la f.c. de la loi normale standard. Montrer que φ vérifie l'équation différentielle $\varphi'(t) = -t\varphi(t)$. En déduire la forme explicite de φ.

Exercice 3.6 Trouver des v.a. X et Y dépendantes telles que $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$.

Exercice 3.7 Trouver les distributions associées aux f.c. suivantes :

$$(a)\ \cos t \qquad (b)\ (1 - |t|)\,\mathbb{1}_{|t|\leq 1}(t)$$

Ensuite, dire si les fonctions suivantes sont des f.c. :

$$(c)\ (1 + t^4)^{-1} \qquad (d)\ e^{-t^4}$$

Exercice 3.8 Si $X \in \mathbb{Z}$, montrer que

$$P(X = x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itx}\varphi_\mu(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.1}$$

Exercice 3.9 Si une f.c. φ admet une densité n fois différentiable et telle que ses dérivées soient intégrables, montrer que

$$\varphi(t) = o(|t|^{-(n-1)})$$

Exercice 3.10 Soit $G(s) = E(s^X)$ où $X \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\int_0^1 G(s)\,\mathrm{d}s = E\left(\frac{1}{X+1}\right)$$

Trouver l'expression explicite pour $B(n,p)$. Ensuite, si $np \to \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, trouver la limite de cette espérance.

4 Modes de Convergence de v.a.

Exercice 4.1 Soit (X_n) une suite de v.a. Supposer qu'il existe une série numérique $\sum u_n$ convergente telle que $\sum P(X_n \neq u_n) < \infty$. Montrer que $\sum X_n$ est p.s. convergente.

Exercice 4.2 Utiliser l'intégration par parties à la fonction $x^{-1}\, xe^{-x^2/2}$ pour obtenir l'estimation :

$$\left(x^{-1} - x^{-3}\right) e^{-x^2/2} \leq \int_x^\infty e^{-u^2/2}\, \mathrm{d}u \leq x^{-1} e^{-x^2/2}$$

Maintenant, soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de distribution $\mathcal{N}$. Montrer que

$$\begin{array}{ll} (a) & \limsup \dfrac{X_n}{\sqrt{2\log n}} \overset{\text{p.s.}}{=} 1 \\ (b) & \dfrac{\max_{1\leq i\leq n} X_i}{\sqrt{2\log n}} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 1 \end{array}$$

Exercice 4.3 Soit X une v.a. de f.r. F. Montrer que

$$X_n := X \pm \frac{1}{n} \Longrightarrow X$$

Exercice 4.4 (Théorème de Slutsky) Supposer que

$$X_n \Longrightarrow X, \quad Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} c$$

où c est une constante. Montrer que

$$\begin{array}{lrcl} (i) & X_n + Y_n & \Longrightarrow & X + c \\ (ii) & X_n Y_n & \Longrightarrow & c\,X \end{array}$$

Exercice 4.5 Si $c \in \mathbb{R}$, montrer que

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} c \Longrightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} c$$

Exercice 4.6 Soit (X_n) telle que $X_n \Longrightarrow X$. Considérer une autre suite (Z_n) et montrer que

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X \wedge Z_n - X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} 0 \Longrightarrow Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$$

Exercice 4.7 Soit (X_n) et (Y_n) deux suites de v.a. convergeant en loi respectivement vers X et Y.

(*a*) Supposons que (X_n) et (Y_n) soient indépendantes et que X et Y le soient aussi. Montrer que $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + Y$. Donner un exemple qui montre que sans l'hypothèse d'indépendance, on peut perdre la convergence.

(b) Supposer que $Y = 0$. Montrer que $X_n + Y_n \Longrightarrow X$ et $X_n Y_n \Longrightarrow 0$

Exercice 4.8 Si $X_n \Longrightarrow X$, montrer qu'il est généralement faux d'avoir $X_n - X \Longrightarrow 0$.

Exercice 4.9 Soit (X_n) une suite de v.a. de f.r. respectives définies par

$$F_n(x) = x - \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}, \quad x \in [0,1]$$

Montrer que $X_n \Longrightarrow U$ mais que les d.p. ne convergent pas vers la d.p. de U.

Exercice 4.10 Soit (X_n) une suite de v.a. de distributions respectives $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$. Supposer que $X_n \Longrightarrow X$.

(a) Montrer que (σ_n^2) converge. En déduite que X est normale. Ensuite, étudier le cas de v.a. non centrées.

(b) Montrer qu'il est vrai que

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \Longrightarrow X \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X$$

Exercice 4.11 (Intégration de Monte Carlo) Soit $U_1, U_2, \ldots$, des v.a. i.i.d. de loi $U_{[0,1]}$. Supposer que l'on ait

$$\int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$$

Montrer que

$$I_n := \frac{f(U_1) + \cdots + f(U_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x =: I$$

Ensuite, supposer que $\int_0^1 f(x)^2 \, \mathrm{d}x < \infty$ et estimer $P(|I_n - I| > a/\sqrt{n})$.

5 LGN & TCL

6 Espérance Conditionnelle

Exercice 6.1 Soit X et Y deux v.a. qui donnent les résultats de deux lancers de dé indépendants et S leur somme. Quelle est la loi de X sachant que S est paire ?

Exercice 6.2 Le temps de vie d'une machine en jours est une v.a. T. Si la machine a fonctionné plus de t jours, quelle est son temps moyen de vie restant dans les cas suivants :

$$(a)\, X \in U_{[\![1,n]\!]} \qquad (b)\, X \in \mathcal{G}(1/2)$$

Exercice 6.3 Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^* : \quad P(X > n + m \mid X > m) = P(X > n)$$

On dit alors que X est **sans mémoire**.

(a) On pose $P(X = 1) = p$. Déterminer la loi de X.

(b) Soit Y une v.a. indépendante de X et de même loi. Quelle est la loi de $S = X + Y$?

(c) Trouver la loi de X conditionnée à S.

(d) Donner $E(X \mid S)$.

Exercice 6.4 Soit N le nombre (aléatoire) d'œufs pendus par une poule. Supposer que $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et que chaque œuf éclose indépendamment des autres avec une probabilité p. Appeler K le nombre de poussins. Montrer que K est une v.a. et donner la distribution de K. Ensuite, calculer $E(K), E(K \mid N)$ et $E(N \mid K)$.

Exercice 6.5 Une usine produit n appareils qui peuvent être défectueux avec une probabilité q. Un test de bon fonctionnement est appliqué à chaque appareil et la probabilité que le défaut (si présent) soit détecté est de δ. Quelle est le nombre moyen des appareils défectueux si l'on connaît le nombre d'appareils testés défectueux ?

Exercice 6.6 Soit X de distribution uniforme standard. Trouver la distribution de X sachant que $X \in [a, b]$. Ensuite, considérer une deuxième v.a. Y de même distribution et indépendante de X. Poser $T = \min\{X, Y\}$ et $Z = \max\{X, Y\}$. Déterminer la distribution de (X, Y) conditionnée à $\{a \le Z \le T \le b\}$.

Exercice 6.7 (Rendez-vous) A et B se sont donné rendez-vous entre 17h et 18h en s'entendant sur le fait qu'il n'attendraient pas l'autre plus de 10 minutes. Supposer qu'ils arrivent indépendamment à des instants uniformément distribués à l'heure fixée. Calculer la probabilité d'une rencontre. Quelle la probabilité que A rencontre B si A fixe précisément son heure d'arrivée ?

Exercice 6.8 Soit Y et Y deux v.a. i.i.d. de moyenne μ. Expliquer l'erreur dans l'équation suivante

$$E(X \mid X+Y=z) = E(X \mid X = z-Y) = E(z-Y) = z-\mu$$

Exercice 6.9 Soit X et Y deux v.a. réelles avec une d.p. commune définie sur $\{0 \leq x \leq y\}$ par $f(x,y) = x(y-x)e^{-y}$. Trouver les d.p.c. f_Y^x et f_X^y et en déduire que

$$E(Y \mid X) = X+2, \qquad E(X \mid Y) = Y/2$$

Exercice 6.10 (Variance conditionnelle) On définit la **variance conditionnelle** de Y par rapport à X par

$$V(Y \mid X) = E(D_X(Y)^2 \mid X)$$

Montrer que

$$V(Y \mid X) = E(Y^2 \mid X) - E(Y \mid X)^2$$

Ensuite, déduire que

$$V(Y) = E(V(Y \mid X)) + V(E(Y \mid X))$$

Exercice 6.11 Soit $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,\theta^2)$ dont le coefficient de corrélation est ρ. Montrer que

$$(a)\, E(Y \mid X) = \frac{\rho\theta}{\sigma} X \qquad\qquad (b)\, V(Y \mid X) = \theta^2(1-\rho^2)$$

Exercice 6.12 (IM conditionnelle) Montrer que

$$P(|Y| > a \mid X) \leq a^{-1} E(|Y| \mid X) \tag{IMC}$$

Exercice 6.13 (ICS conditionnelle) Montrer que

$$E(|YZ| \mid X)^2 \leq E(Y^2 \mid X) E(Z^2 \mid X) \tag{ICSC}$$

7 Marches Aléatoires

Exercice 7.1 Considérons une m.a.s. sur $\{0, 1, \ldots, N\}$ avec une probabilité $p \in (0, 1)$ de sauter à droite. On place des barrières absorbantes aux extrémités 0 et N en ce sens que la marche s'arrête si elle touche un de ces points. Soit H le nombre de pas nécessaires à la marche, partie de k, pour atteindre l'une des barrières. Montrer que $P_k(H < \infty) = 1$ et que $E_k(H^m) < \infty$ pour tout m.

Exercice 7.2 Reprendre l'Exercice 7.1. Soit H le nombre de pas nécessaires à la marche, partie de k pour d'atteindre les barrières. Dans le cas où $p \neq q$, montrer que

$$E_k(H) = \frac{1}{p-q}\left(N\,\frac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)^N} - k\right)$$

Exercice 7.3 Reprendre l'Exercice 7.2 et appeler H^+ le nombre des pas positifs de la marche jusqu'à l'absorption. Montrer que

$$E_k(H^+) = \frac{1}{2}\left(E_k(H) - k + N(1-p_k)\right)$$

Exercice 7.4 Quelle est la probabilité qu'un parieur impulsif possédant une somme de k unités de monnaie perde tout son argent dans un jeu répétitif où il peut gagner une unité à chaque essai indépendant avec une probabilité p ?

Exercice 7.5 Considérer une m.a.s. symétrique dans $\mathbb{Z}$. Soit $H_0 = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$, le temps du premier retour de la marche à l'origine. Montrer que

$$P(H_0 = 2n) = \frac{C_{2n}^n}{(2n-1)2^{2n}}$$

En déduire que $E(H_0^\alpha) < \infty$ ssi $\alpha < 1/2$.

Exercice 7.6 Pour une m.a.s. symétrique dans $\mathbb{Z}$, poser $M_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$ et montrer que pour $m \geq 0$,

$$P(M_n = m) = P(S_n = m) + P(S_n = m+1) \tag{7.1}$$

Exercice 7.7 Considérer une m.a.s. dans $\mathbb{Z}$ telle que $p = 1 - q < 1/2$. Montrer que le maximum $M_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$ satisfait $P(M_n > m) = (p/q)^m$ pour $m \geq 0$.

Exercice 7.8 Montrer qu'une m.a.s. est récurrente ssi

$$\sup_{r<1} \int_{(-\pi,\pi)^d} \frac{1}{1 - r\varphi(t)}\,\mathrm{d}t = \infty$$

Ensuite, appliquer ce critère pour $\mathbb{Z}^3$.

Exercice 7.9 Soit (S_n) une m.a.s. dans $\mathbb{Z}$. Soit R_n le nombre de sites distincts visités par la marche jusqu'à l'instant n en partant de 0. Montrer que

$$P(R_n = R_{n-1} + 1) = P(S_1 \cdots S_n \neq 0) \tag{7.2}$$

En déduire que

$$\frac{E(R_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} P(H_0 = \infty)$$

où H_0 est l'instant du premier retour à 0. Dans le cas d'une m.a.s., trouver que

$$P(H_0 = \infty) = |p - q| \tag{7.3}$$

8 Martingales

Exercice 8.1 Soit (S_n) une m.a.s. asymétrique sur $\{0, 1, \dots, N\}$ avec des barrières à 0 et à N. Soit $Y_n = \varrho^{S_n}$ avec $\varrho = q/p$. Montrer que (Y_n) forme une martingale adapté à sa filtration naturelle.

Exercice 8.2 Soit (X_n) est une martingale. Montrer que les $(X_n - a)^+$ forment une sous-martingale, et aussi $(|X_n|^p)$ si $(X_n) \subset L^p$.

(i) $(|X_n|^p)$ est une sous-martingale si $(X_n) \subset L^p$.
(ii) les v.a. $(X_n - a)^+$ constituent une sous-martingale.

Exercice 8.3 Soit (X_n) est une martingale dans L^2. Montrer que pour $m > n$,

$$V\big(X_m - X_n \mid \mathcal{F}_n\big) = E(X_m^2 \mid \mathcal{F}_n) - X_n^2$$

Exercice 8.4 (Inégalité de Doob) Soit (X_n) une sous-martingale. Montrer l'inégalité de Doob, i.e.

$$P(\max_{0\le m\le n} X_m^+ \ge \alpha) \le \alpha^{-1} E(X_n^+ ; \max_{0\le m\le n} X_m^+ \ge \alpha) \tag{ID}$$

Exercice 8.5 (Inégalité de Kolmogorov) Soit $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ où les ξ_i sont des v.a. indépendantes et centrées dans L^2, montrer l'inégalité de Kolmogorov, i.e.

$$P\left(\max_{1\le m\le n} |S_n| \ge a\right) \le a^{-2} \sum_{i=1}^{n} V(\xi_i) \tag{IK}$$

Exercice 8.6 (Inégalité maximum dans L^p) Utiliser (ID) pour prouver l'inégalité maximum dans L^p pour une sous-martingale (X_n), avec $p \in (1, \infty)$ et $q = 1 - 1/p$, i.e.

$$\|\max_{0\le m\le n} X_n^+\|_p \le q^{-1} \|X_n^+\|_p \tag{IML^p}$$

Exercice 8.7 Considérer une m.a.s. symétrique qui part de 1 et montrer que (8.6) est fausse pour $p = 1$.

Exercice 8.8 (LGN *forte*) Soit (ξ_n) une suite de v.a. indépendantes telles que $\sum V(\xi_n)/n^2 < \infty$. Montrer que pour une certaine v.a. Y, nous avons

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i - E(\xi_i)}{i} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s. \& } L^2} S$$

En déduire que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - E(\xi_i)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0$$

Exercice 8.9 Si $\mathcal{F}_n \uparrow \mathcal{F}_\infty$ et que $|X_n| \leq Y \in L^1$, montrer que $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$ et

$$E(X_n \mid \mathcal{F}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} E(X \mid \mathcal{F}_\infty) \tag{TCDC}$$

Exercice 8.10 Soit (S_n) une m.a.s. symétrique qui part de $S_0 = k > 0$. Montrer que $S_n^2 - n$ forme une martingale. Ensuite, considérer des barrières aux points 0 et $N\,(\geq k)$ et poser H le temps d'atteinte des dernières. Supposer que $E(H) = E(S_0)$ et $E(S_H^2 - H) = E(S_0^2)$, la condition de De Moivre, et trouver $E(H)$ et la probabilité de ruine.

Exercice 8.11 Soit (Z_n) un processus de branchement avec une moyenne des naissance telle que $\mu > 1$. Montrer qu'il existe $\theta < 1$ tel que

$$G(\theta_{n-1}) = \theta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta = G(\theta) \tag{8.1}$$

En déduire que

$$P(\cup_n \{Z_n = 0\}) = \theta$$