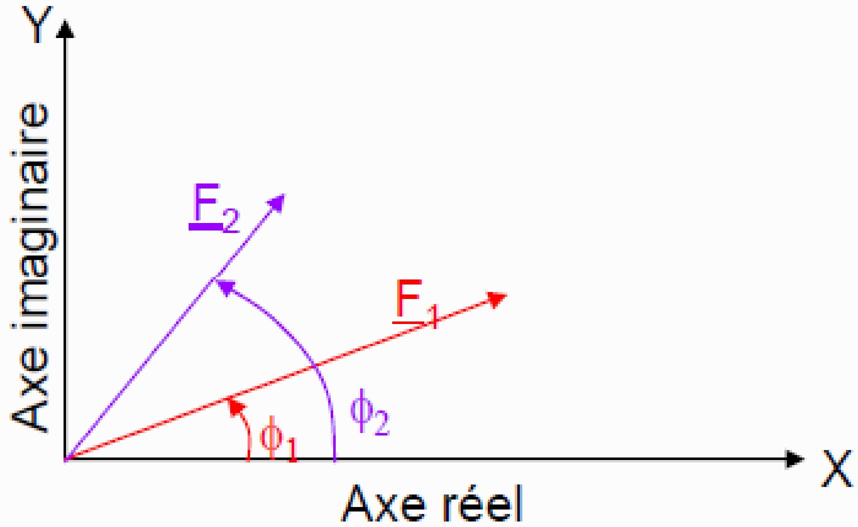
Modélisation de base des réseaux électriques

- Représentation des réseaux.
- Théorie des graphes appliquée aux réseaux électriques, formation des matrices admittance et impédance d'un RE
- Modification et inversion de la matrice admittance

- <u>Représentation des grandeurs sinusoïdales</u>

$$\begin{cases} f_1(t) = F_1\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_1) \\ f_2(t) = F_2\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_2) \end{cases}$$



- $\phi_2 = \phi_1$ ➔ $\phi_2(t)$ et $\phi_1(t)$ sont en phase
- $\phi_2 - \phi_1 = \pi/2$ ➔ $\phi_2(t)$ est dite en quadrature avance par rapport à $\phi_1(t)$
- $\phi_2 - \phi_1 = \pi$ ➔ $\phi_2(t)$ et $\phi_1(t)$ sont dites en opposition de phase
- Toute fonction sinusoïdale $f(t) = F\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi)$ peut donc être représentée par la grandeur complexe $\underline{F} = Fe^{j\phi}$ appelée phaseur où F est la valeur efficace et ϕ l'angle de phase.

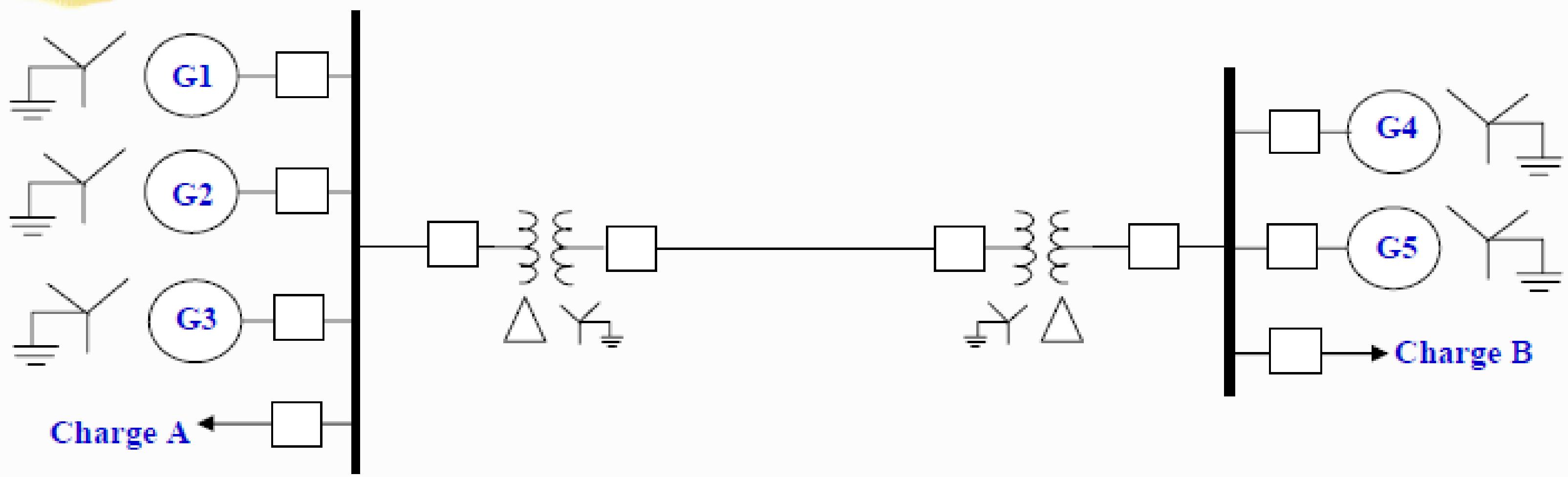
Représentation des Réseaux

- Les composantes de base du réseau de distribution sont :
  - générateurs,
  - transformateurs,
  - les lignes de transmission,
  - les protections (disjoncteur, sectionneur,…)
  - les charges

➔ L'interconnexion entre elles peut se faire par un diagramme unifilaire. Les circuits équivalents des composantes sont représentés dans un diagramme appelés ***diagrammes des impédances***.

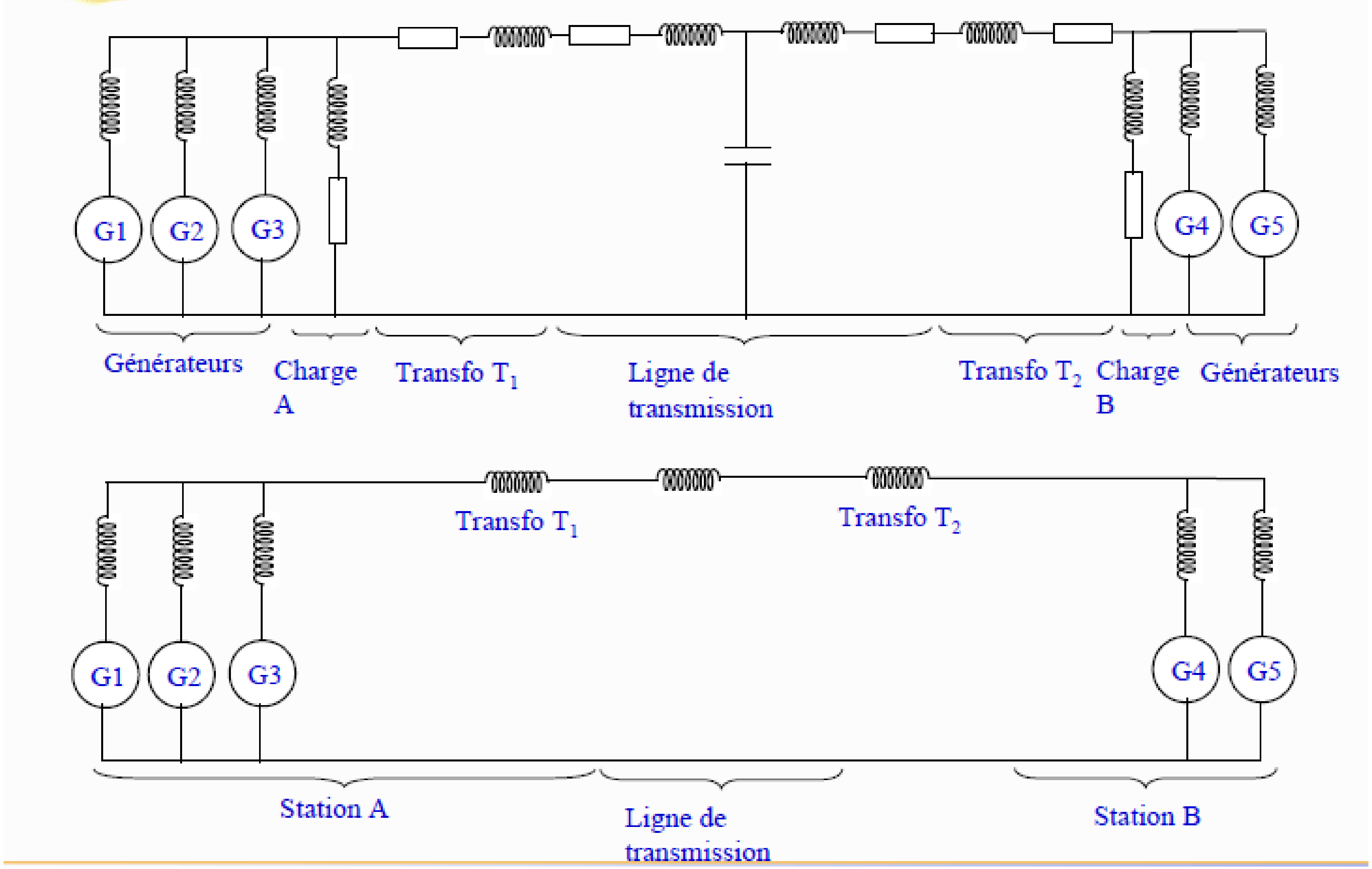
➔ Utilisation de symboles: Uniformiser la réalisation des schémas et l'identification de l'appareillage dans les installations

Exemple de diagramme unifilaire



- **Générateur** peut être représenté par une **source de tension en série avec inductance et résistance**. Mais la **résistance interne** peut être **négligée** comparée à la réactance.
- Les **charges =** résistances en série avec inductance,
- Les **enroulements des transformateurs** = résistances en série avec inductance,
- La **ligne de transmission** = schéma équivalent (T, π,…).
- La **connexion Δ-Y** = schéma équivalent Y-Y (par transformation Δ-Y) afin que le diagramme d'impédance puissent s'établir de façon unifilaire.

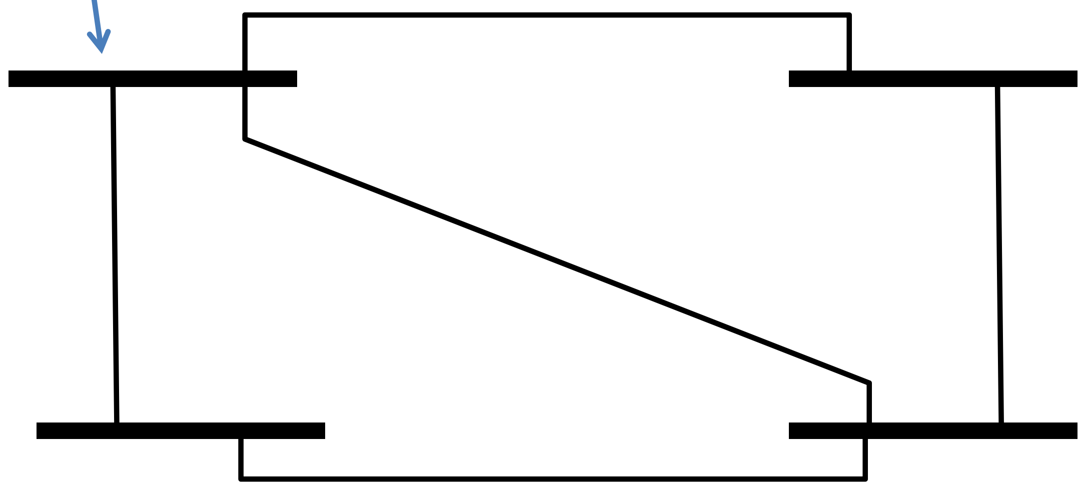
Diagramme des impédances



Représentation des Réseaux Electriques

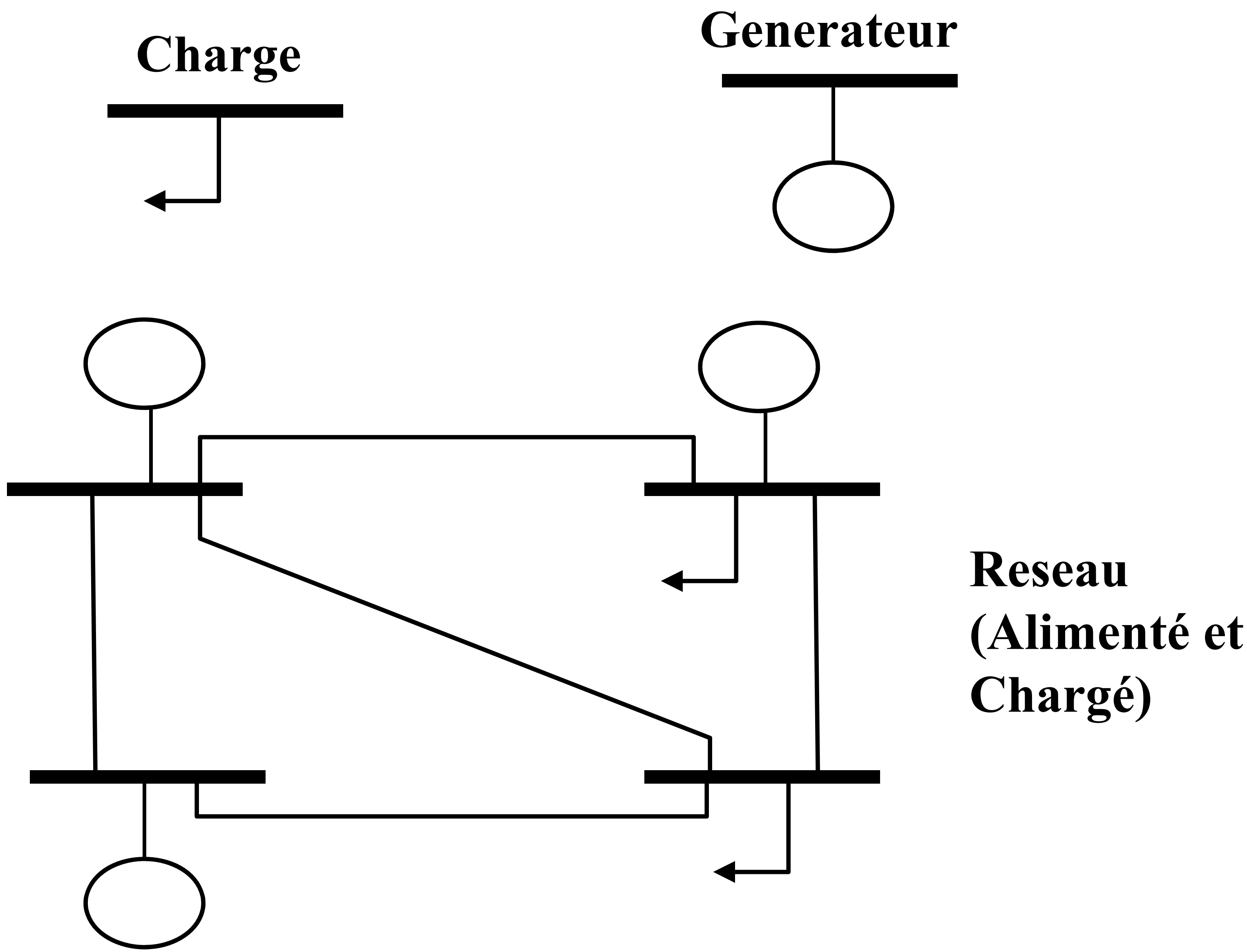
NOEUD ou Jeu de barre (BUS)

BRANCHES (Lignes ou Transformateurs)

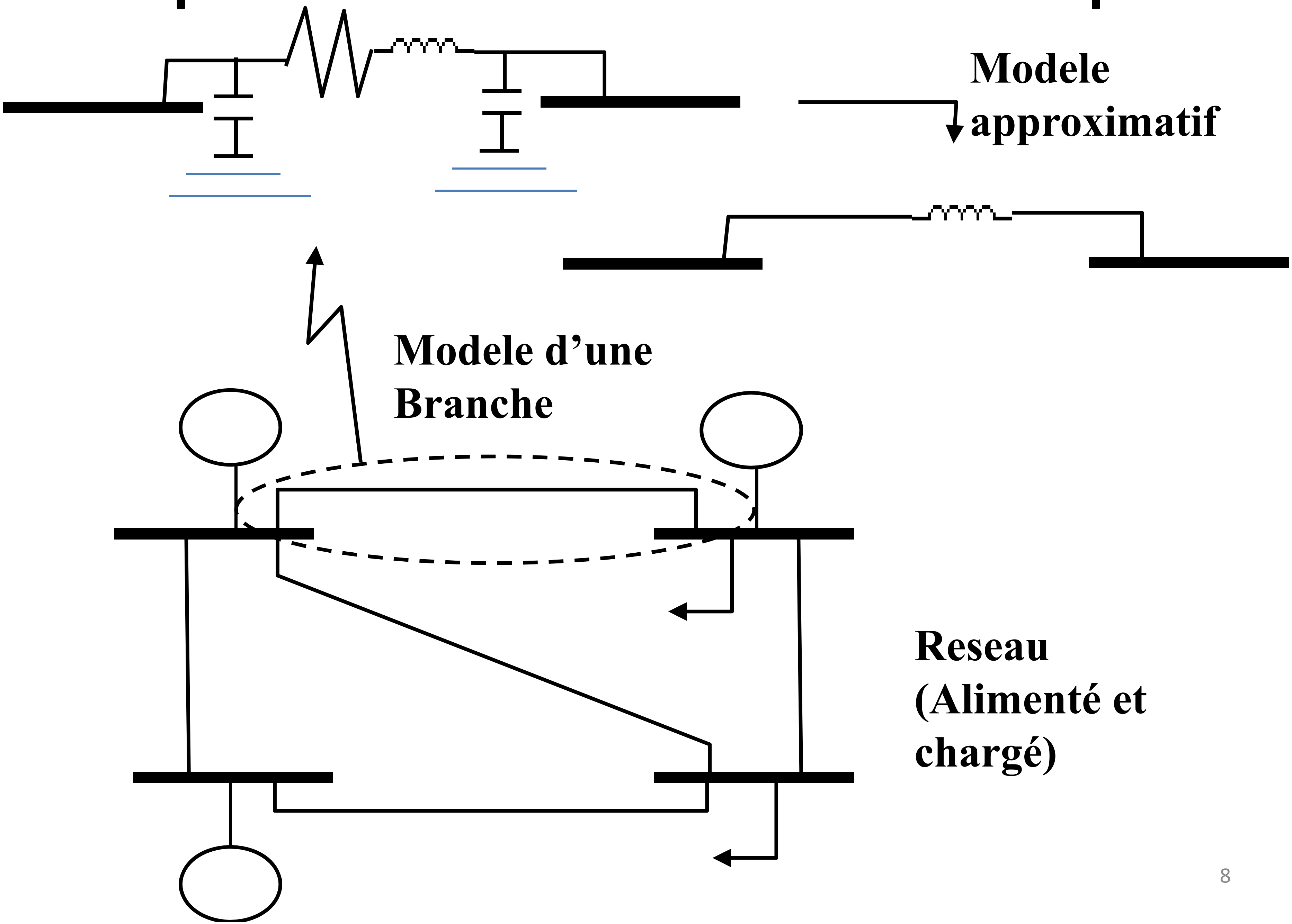


RESEAUX (à vide non alimenté)

Représentation des Réseaux Electriques



Représentation des Réseaux Electriques

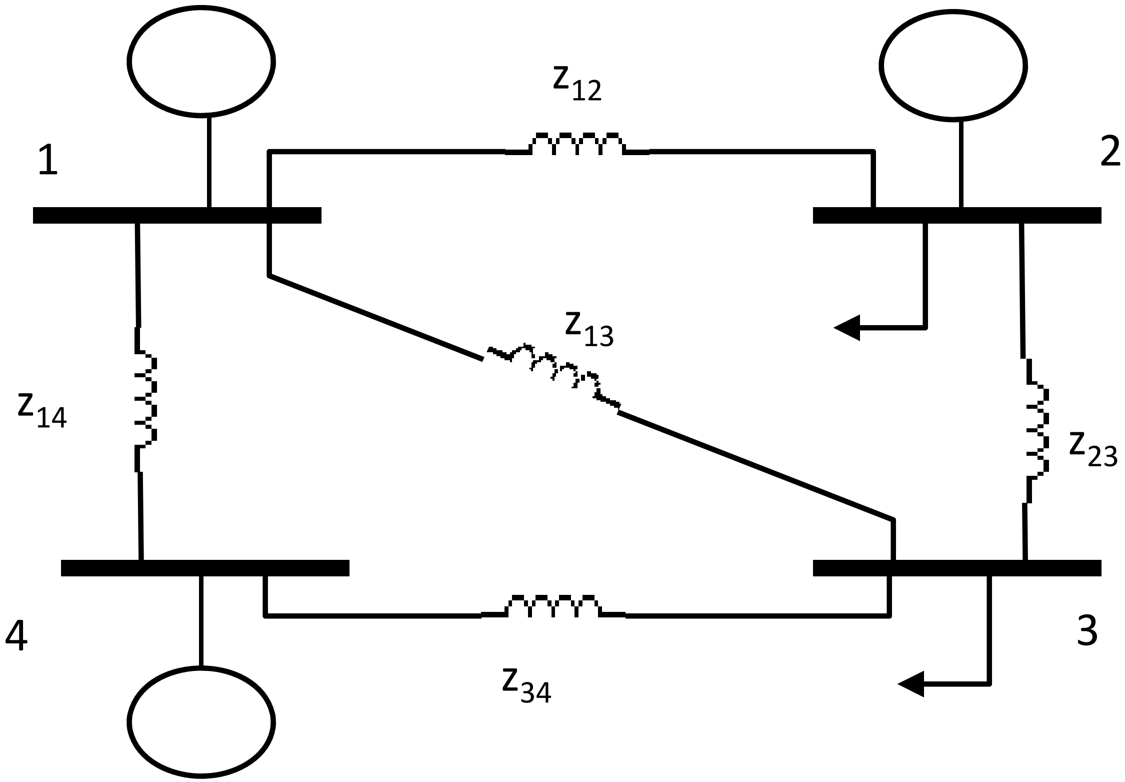


Représentation des Réseaux Electriques

On représente le réseau par des impedances (admittance)

L'impedance est un nombre complexe $z_{ij}=r_{ij}+jx_{ij}$.

On peut negliger la resistance : $z_{ij}=jx_{ij}$

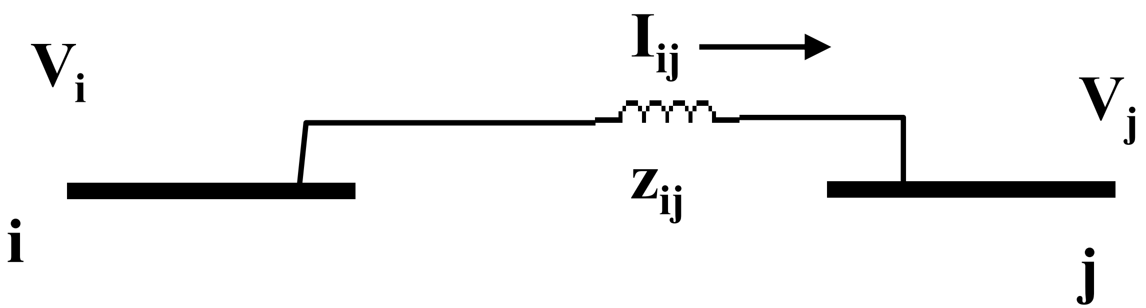


Représentation des Réseaux Electriques

Selon la loi d' Ohm:

$$I_{ij} = \frac{1}{z_{ij}}\underbrace{(V_i - V_j)}_{\text{Tension (volts)}}$$

Courant (amps)

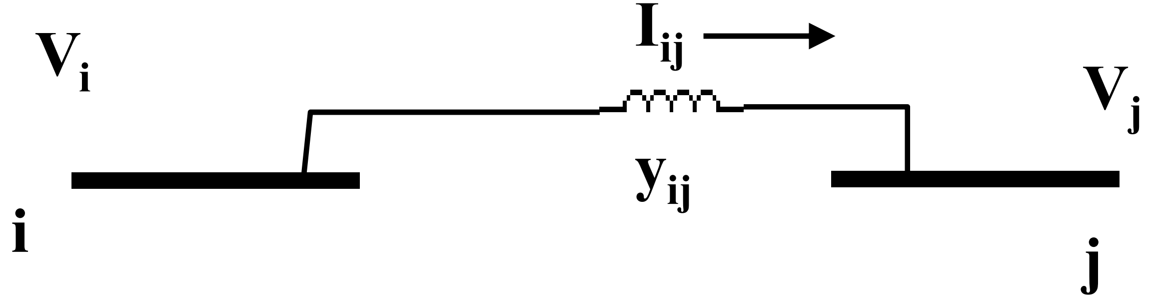


Représentation des Réseaux Electriques

$$I_{ij} = \frac{1}{z_{ij}} \underbrace{(V_i - V_j)}$$

L'admittance, y_{ij}, est l'inverse de l'impedance, z_{ij}:

$$I_{ij} = y_{ij}(V_i - V_j)$$

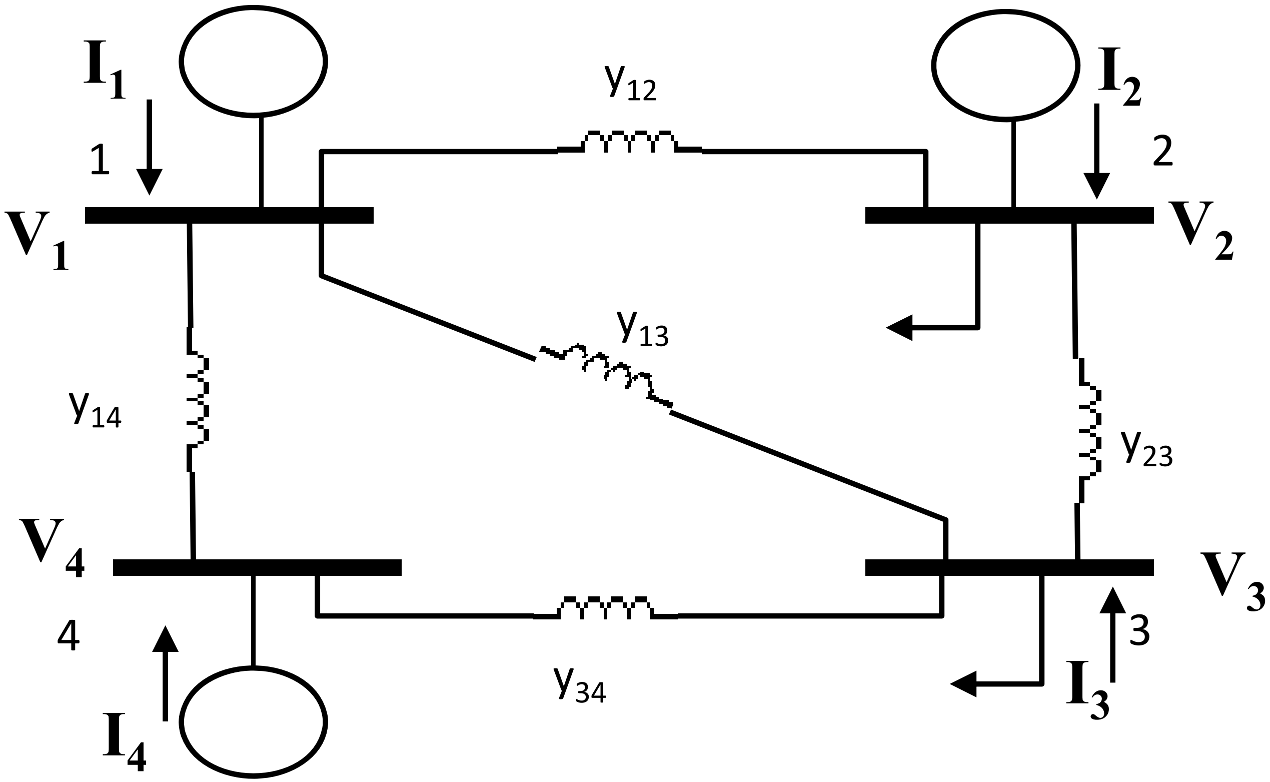


Représentation des Réseaux Electriques

On peut représenter le réseau par les admittances y_{ij}

V_i : la tension au nœud i.

I_i : le courant injecté dans le nœud i



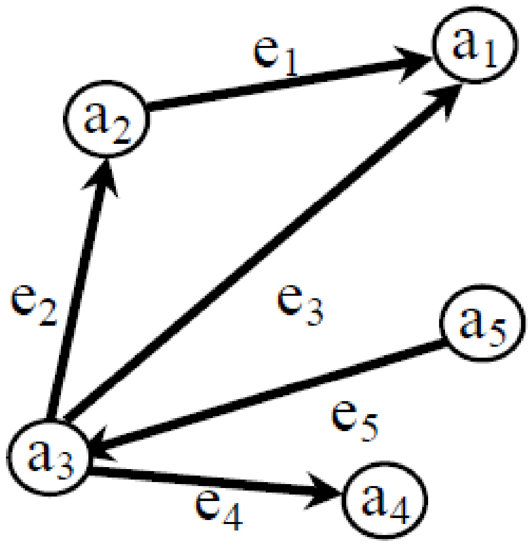
Théorie des graphes

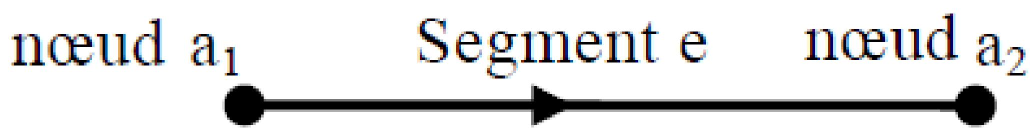
Graphe: un dessin avec des points définis appelés noeuds (aussi sommets) reliés par des éléments appelés segments.

Un graphe fini G = (A, E) est défini par l'ensemble fini A = {a1, a2,..., an} dont les éléments sont les sommets (noeuds), et par l'ensemble fini E = {e1, e2,...,em} dont les éléments sont les segments.

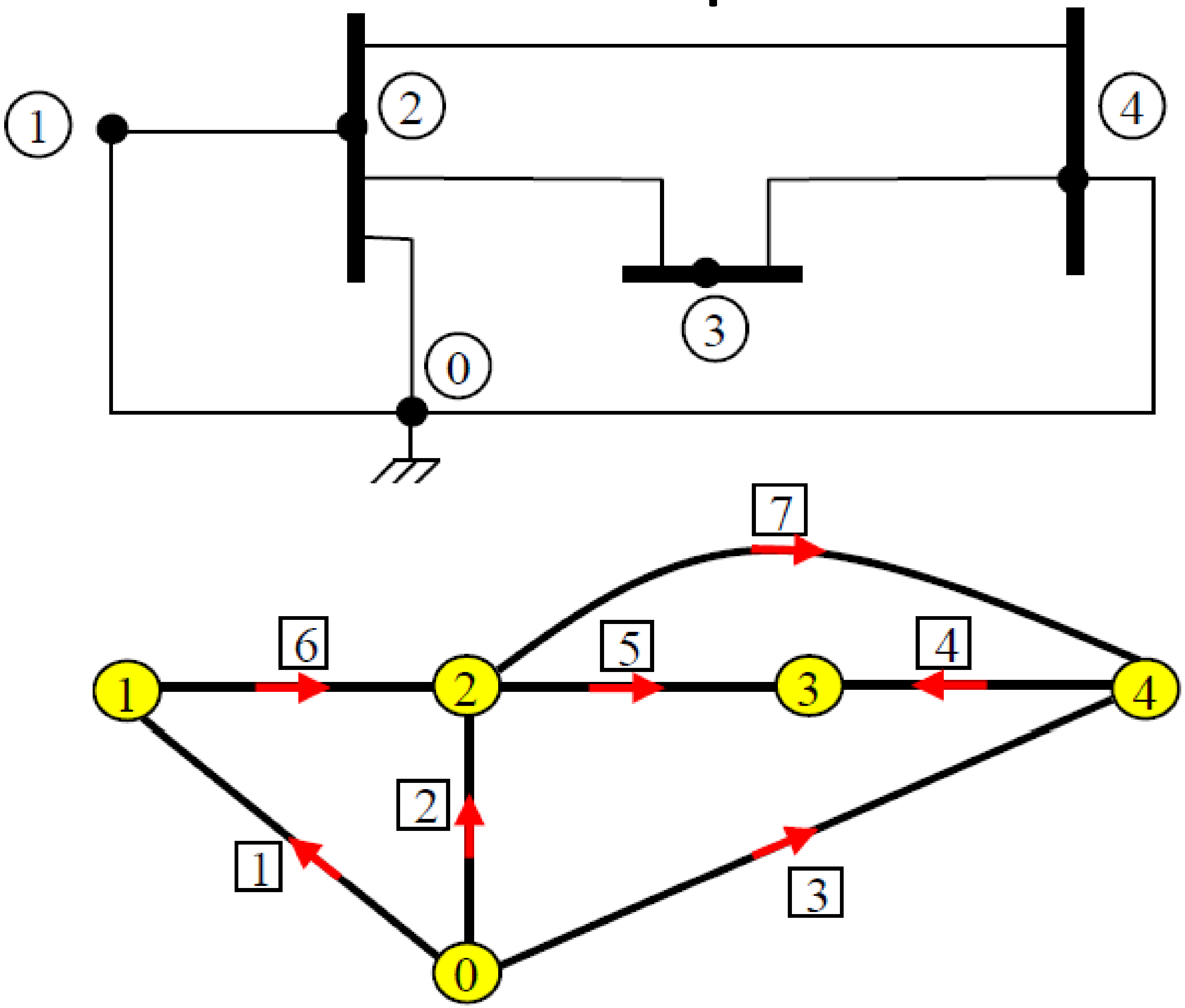
Un noeud de référence doit être choisi et il est pratique courante d'assigner à ce noeud le numéro zéro (0)

Graphe orienté: un graph dans lequel on assigne une direction (sens) dans chaque segment.





Exemple



Théorie des graphes

Incidence: Un segment (branche) est incident à un sommet (nœud) si il « touche » ce sommet.

Arbre: graphique contenant tous les noeuds, mais pas de maille, il est équivalent à un graphe à n noeud et n-1 branches. Les segments restants sont appelés les **liens**. L'ensemble des liens forme **le co-arbre**.

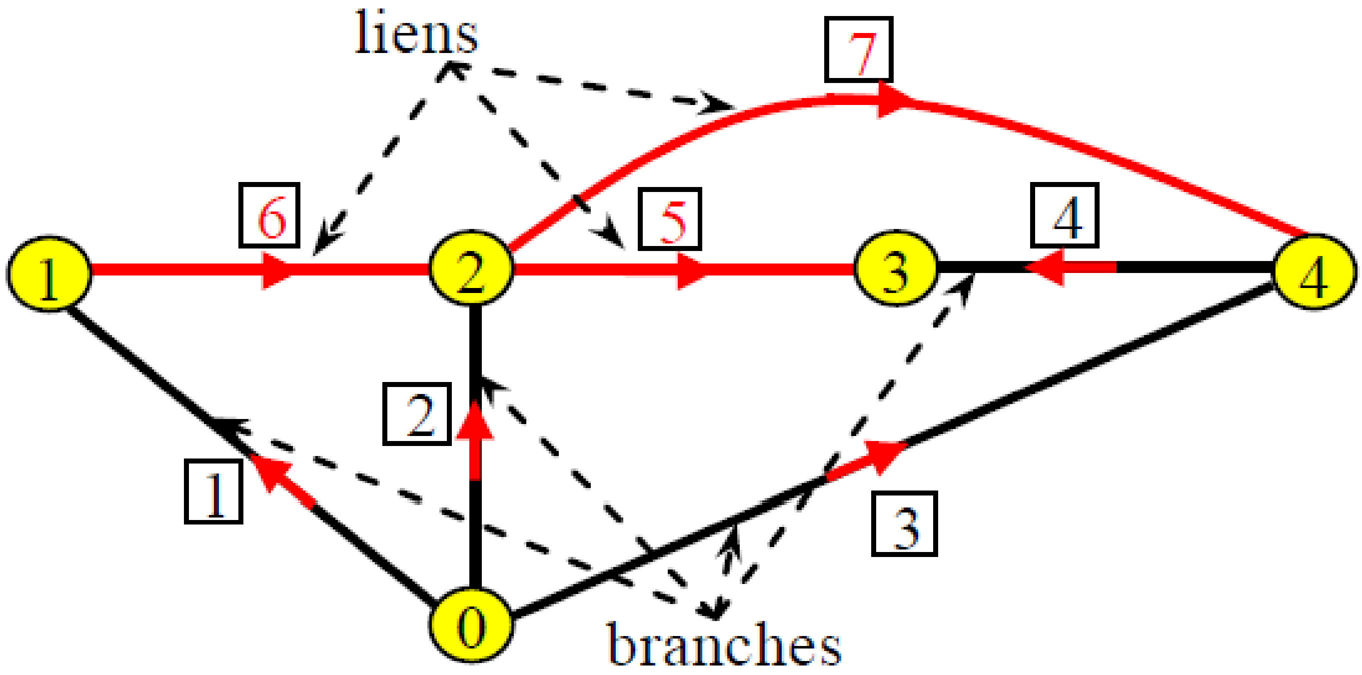


Fig. II.4.b Arbre avec les branches (1-4) et liens (5-7).

Représentation matricielle des réseaux

Le réseau peut être décrit par les trois types de matrices suivantes:

1- Matrices d'incidence: Elles représentent le lien entre les branches et les nœuds du réseau avec leur orientation. Les valeurs de ces matrices sont binaires 1, 0, - 1.

2- **Matrices élémentaires (ou primitives):** ces matrices décrivent les composants individuels en tenant compte, le cas échéant, de leur couplage électromagnétique (capacitif et inductif). Elles sont de structure diagonale, le couplage des composants est représenté par des éléments non diagonaux.

3- Matrices de transferts: elles décrivent de façon mathématique le comportement électrique du réseau maillé. Elles sont essentiellement les matrices impédance ou admittance qui correspondent aux nœuds du réseau (matrices nodales).

1- Matrice Incidence nodale

La matrice incidence nodale A décrit la topologie du système en faisant abstraction de la nature des éléments qui le composent.

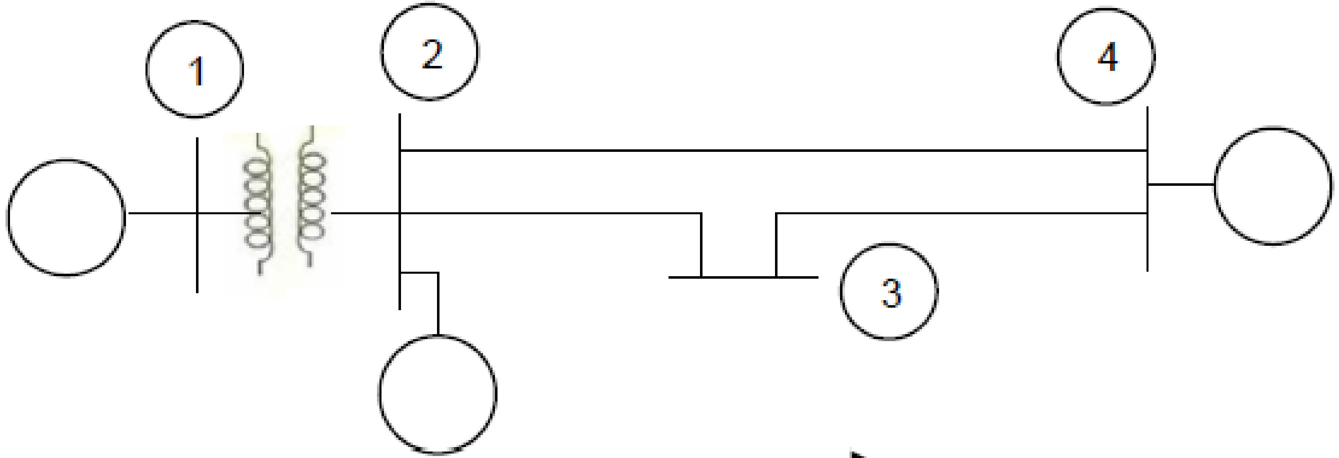
Pour un graphe comportant **n noeuds et e segments** (branches), la matrice A est formé de **n rangées et e colonnes**. Ses éléments aij peuvent prendre les valeurs 0, - 1 ou 1 comme suit :

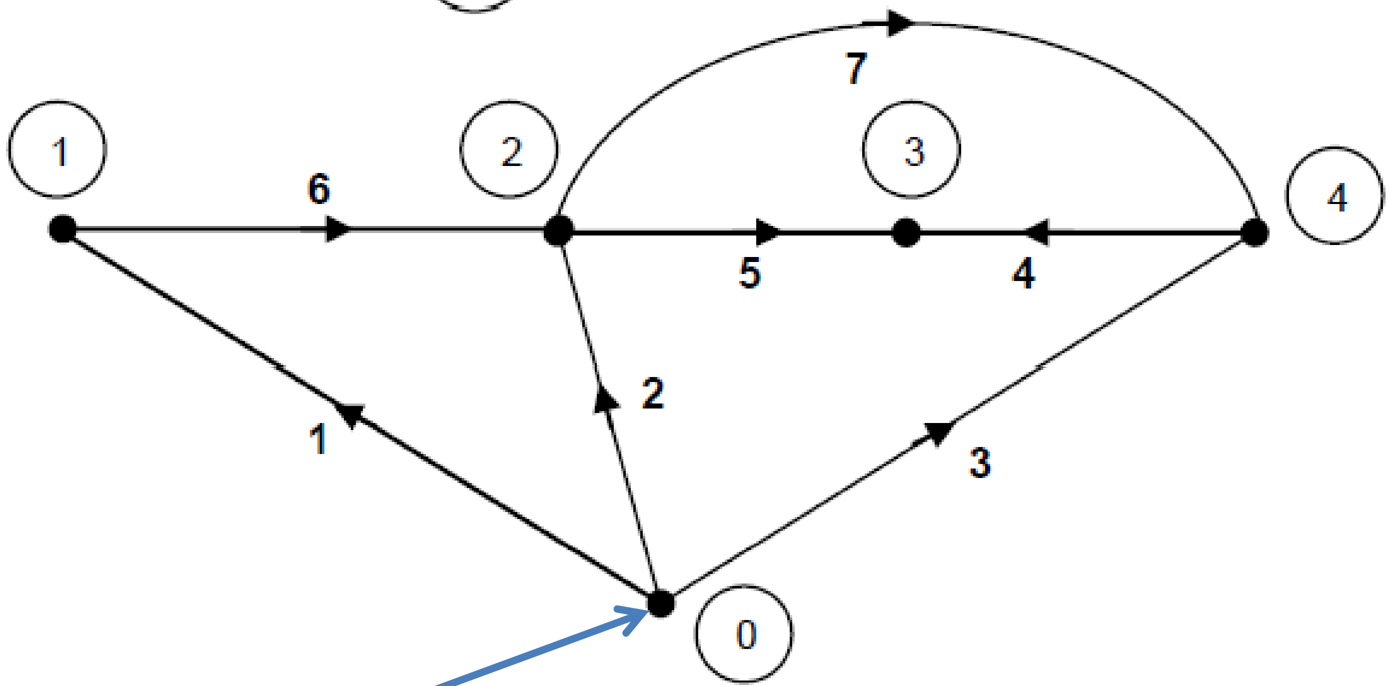
- aij = 1 si la branche sort du noeud;
- aij = -1 si la branche rentre dans le noeud
- aij = 0 si la branche n'est pas connectée au noeud.

Remarques importante:

La matrice d'incidence nodale n'est pas vraiment utile dans le développement qui suit. On utilise plutôt la **matrice incidence nodale réduite, qui correspond à la matrice 'incidence nodale, dans laquelle le choix d'un nœud de référence des tensions conduit à la suppression d'une colonne de la matrice (*A*)**

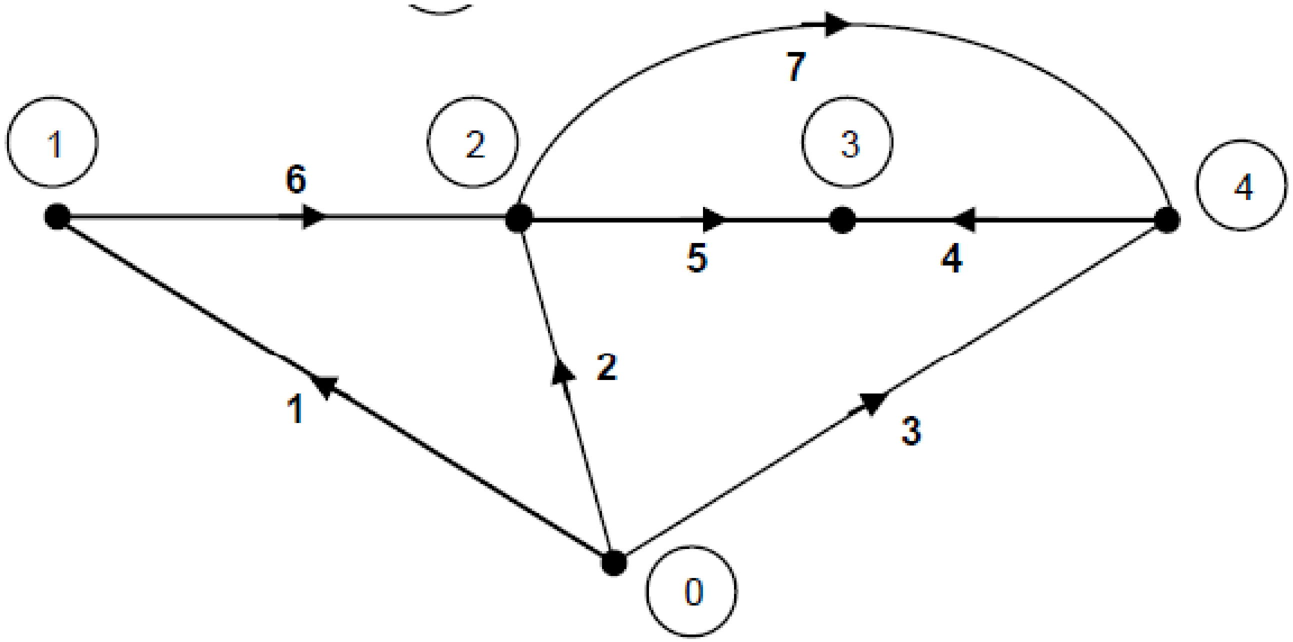
Exemple:





Nœud de référence

Exemple:



Nombre de Branches = 07

A =

	1	2	3	4	5	6	7
1	-1					1	
2		-1			1	-1	1
3				-1	-1		
4			-1	1			-1

Nombre de neouds = 04

2- Matrices élémentaires (ou primitives):

Soit v1,v2,v3,v4,v5,v6 et v7 les tensions aux bornes des éléments du réseau (tensions des branches) et i1, i2, i3, i4, i5,i6,i7 les courant qui traversent ces éléments.

$$v = z\ i \iff \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} & z_{16} & z_{17} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} & z_{25} & z_{26} & z_{27} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} & z_{35} & z_{36} & z_{37} \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} & z_{45} & z_{46} & z_{47} \\ z_{51} & z_{52} & z_{53} & z_{54} & z_{55} & z_{56} & z_{57} \\ z_{61} & z_{62} & z_{63} & z_{64} & z_{65} & z_{66} & z_{67} \\ z_{71} & z_{72} & z_{73} & z_{74} & z_{75} & z_{76} & z_{77} \end{bmatrix}}^{z} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix}$$

2- Matrices élémentaires (ou primitives):

Z est appelé la matrice impédance du réseau primitif , c'est une matrice à dominance diagonale dont les éléments correspondent aux impédances de chaque élément du réseau. Ces impédances sont les impédances propres **Zii** et les impédances de couplage entre les éléments (mutuelle) qui représentent les éléments hors diagonale **Zij**

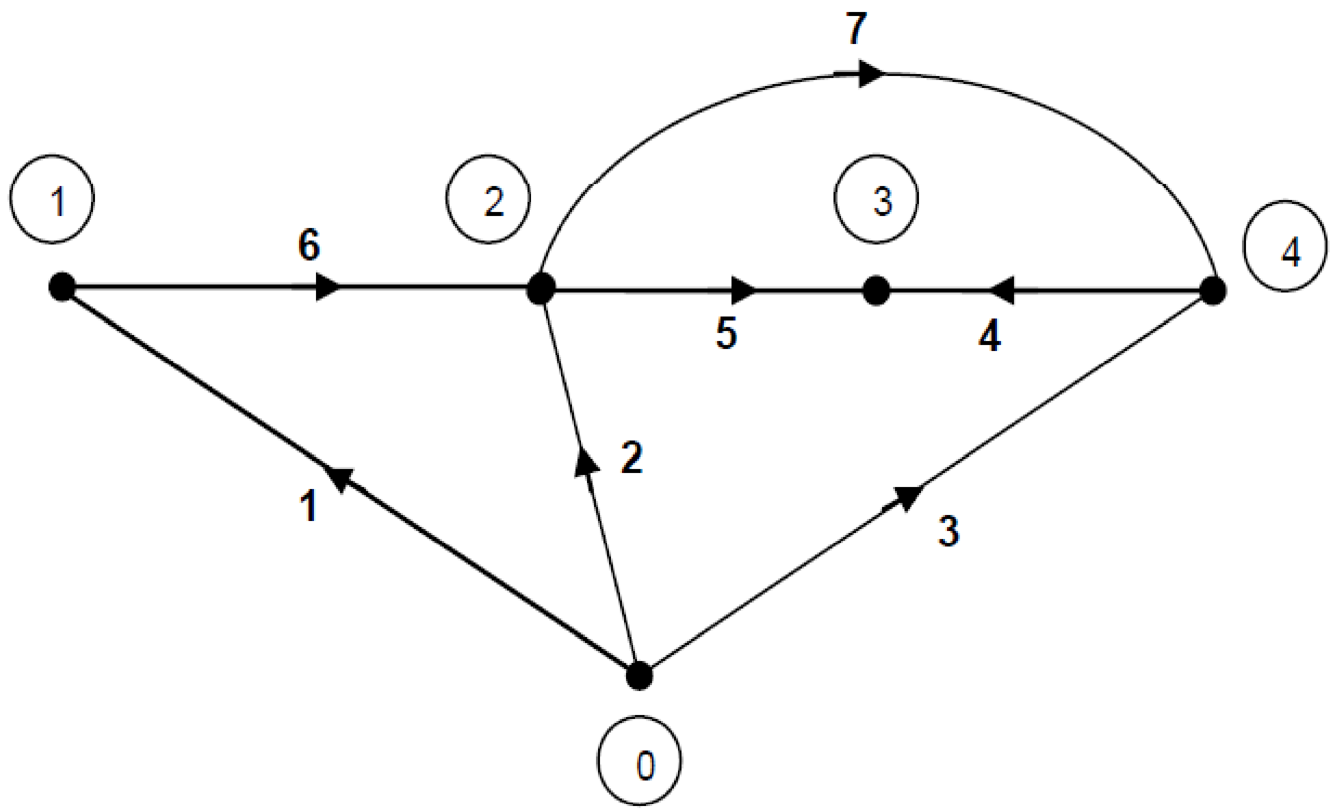
De même sachant que: $y = z^{-1}$

On peut définir la **matrice admittance du réseau primitif** tel que

$$\mathbf{i} = \mathbf{y}\ \mathbf{v}$$

3 -Les Matrices Zbus et Y bus

Soit V1, V2, V3 et V4 les tensions aux nœuds (mesurés par rapport à un nœud de référence nœud 0) et I1,I2,I3,I4 les courants injectés aux nœuds. Les tensions des branches sont liées aux tension des nœuds par la relation suivante:



$$v_1 = -V_1$$

$$v_2 = -V_2$$

$$v_3 = -V_4$$

$$v_4 = V_4 - V_3$$

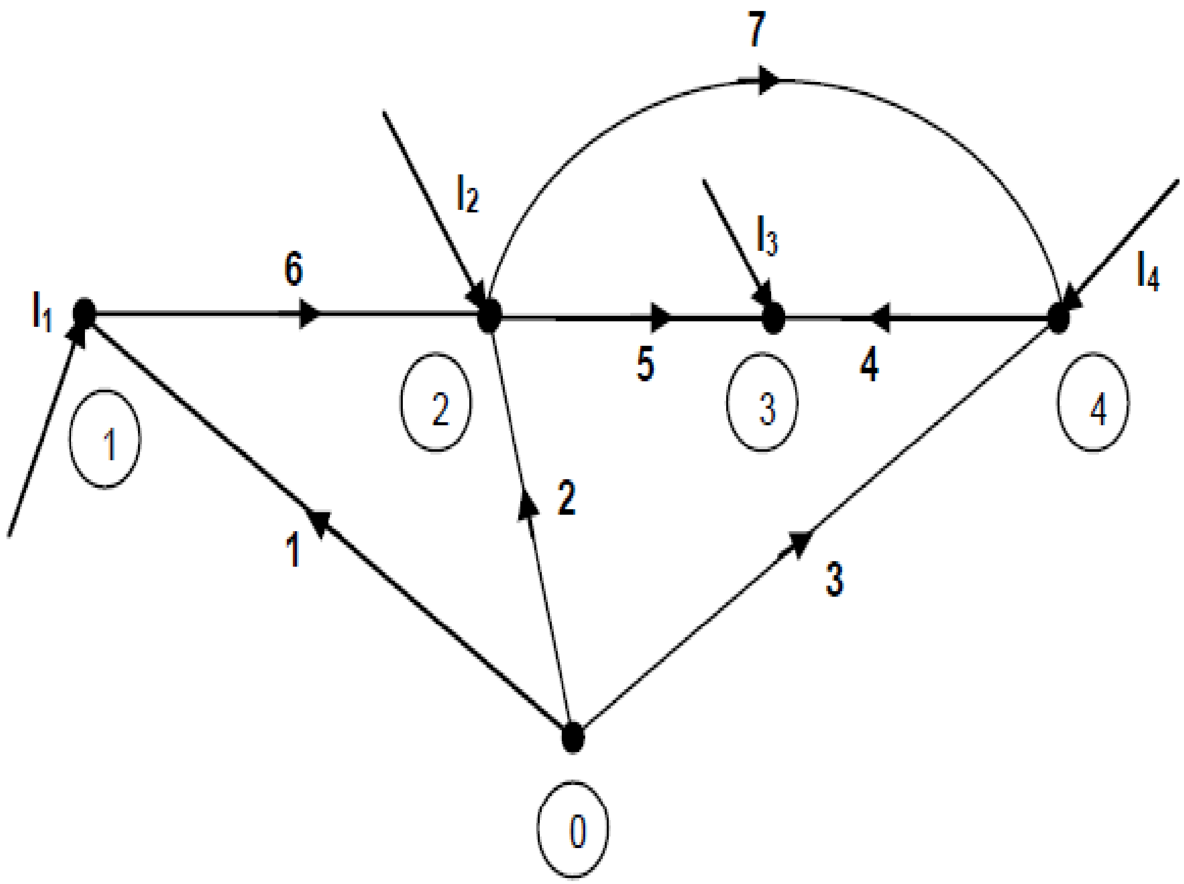
$$v_5 = V_2 - V_3$$

$$v_6 = V_1 - V_2$$

$$v_7 = V_2 - V_4$$

3- Les Matrices Zbus et Y bus

Les courants des branches sont liées aux courants injectés aux nœuds par les relations suivantes:



$$I_1 = -i_1 + i_6$$

$$I_2 = -i_2 + i_5 - i_6 + i_7$$

$$I_3 = -i_4 - i_5$$

$$I_4 = -i_3 + i_4 - i_7$$

Les Matrices Zbus et Y bus

Sous forme matricielle

$$I_1 = -\,i_1 + i_6$$

$$I_2 = -\,i_2 + i_5 - i_6 + i_7$$

$$I_3 = -\,i_4 - i_5$$

$$I_4 = -\,i_3 + i_4 - i_7$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & & & & & 1 & \\ & -1 & & & 1 & -1 & 1 \\ & & & -1 & -1 & & \\ & & -1 & 1 & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix}$$

$$I_{bus} = A\ i$$

Les Matrices Zbus et Y bus

Sous forme matricielle

$$v_1 = - V_1$$

$$v_2 = - V_2$$

$$v_3 = - V_4$$

$$v_4 = V_4 - V_3$$

$$v_5 = V_2 - V_3$$

$$v_6 = V_1 - V_2$$

$$v_7 = V_2 - V_4$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & & -1 \\ & & -1 & 1 \\ & 1 & -1 & \\ 1 & -1 & & \\ & 1 & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

$$v = A^T \, V_{bus}$$

Les Matrices Zbus et Y bus

De la même façon , pour un **réseau général** de N noeuds, on pourra écrire

Equations nodale du réseau

$$\Rightarrow \quad I_{bus} = Y_{bus} \, V_{bus}$$

$$\Rightarrow \quad V_{bus} = Z_{bus} \, I_{bus}$$

Zbus désigne la matrice d'impedance des barres (nœuds)
Ybus désigne la matrice d'admittance des barres (nœuds)
Tandis que Vbus et Ibus sont respectivement les matrices tensions et courants aux N noeuds (jeux de barres) du réseau.

Formation de la matrice admittance nodale [Ybus]:

On a trois méthodes pour la détermination de la matrice [Ybus] qui sont :

- a) Par inversion de la matrice impédance nodale [Zbus] .
- b) à partir des admittances des éléments du réseau (matrice primitive) et la matrice d'incidence (topologique)
- c) Méthode d'inspection

Formation de [Ybus] à partir des admittances des éléments du réseau et la matrice d'incidence

on a montré que

$$v = A^T V_{bus} \qquad (1)$$

$$I_{bus} = A\ i \qquad (2)$$

$$i = y\ v \qquad (3)$$

$$I_{bus} = Y_{bus}\ V_{bus} \qquad (4)$$

Remplaçant eq. (3) dans (2)

$$I_{bus} = A\ y\ v \qquad (5)$$

Remplaçant eq. (1) dans (5)

$$I_{bus} = A\ y\ A^T\ V_{bus} \qquad (6)$$

Comparant eqs. (4) et (6)

$$\boxed{Y_{bus} = A\ y\ A^T} \qquad (7)$$

Formation de [Ybus] à partir des admittances des éléments du réseau et la matrice d'incidence

Dans le cas où le réseau ne présente pas de couplage mutuel entre ses éléments , la matrice admittance du réseau primitif Y sera diagonale

$$[y] = \begin{bmatrix} y_{11} & & & & & & \\ & y_{22} & & & & & \\ & & y_{33} & & & & \\ & & & y_{44} & & & \\ & & & & y_{55} & & \\ & & & & & y_{66} & \\ & & & & & & y_{77} \end{bmatrix}$$

Formation de [Ybus] à partir des admittances des éléments du réseau et la matrice d'incidence

Par conséquent , la matrice Ybus aura la forme suivante

$$Y_{bus} = A \; y \; A^T$$

$$= A \begin{bmatrix} y_{11} & & & & & & \\ & y_{22} & & & & & \\ & & y_{33} & & & & \\ & & & y_{44} & & & \\ & & & & y_{55} & & \\ & & & & & y_{66} & \\ & & & & & & y_{77} \end{bmatrix}$$

-1			
	-1		
			-1
		-1	1
	1	-1	
1	-1		
	1		-1

Formation de [Ybus] à partir des admittances des éléments du réseau et la matrice d'incidence

=

-1					1	
	-1			1	-1	1
			-1	-1		
		-1	1			-1

$-y_{11}$			
	$-y_{22}$		
			$-y_{33}$
		$-y_{44}$	y_{44}
	y_{55}	$-y_{55}$	
y_{66}	$-y_{66}$		
	y_{77}		$-y_{77}$

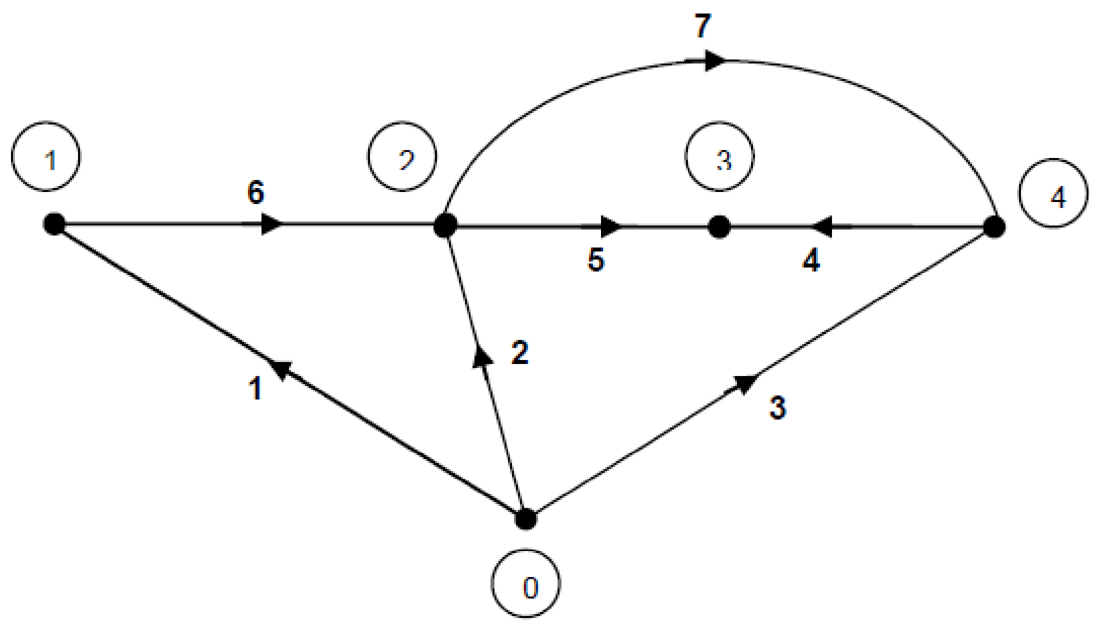
Y_{bus} =

	1	2	3	4
1	$y_{11} + y_{66}$	$- y_{66}$	0	0
2	$- y_{66}$	$y_{22} + y_{55} + y_{66} + y_{77}$	$- y_{55}$	$- y_{77}$
3	0	$- y_{55}$	$y_{44} + y_{55}$	$- y_{44}$
4	0	$- y_{77}$	$- y_{44}$	$y_{33} + y_{44} + y_{77}$

Formation de [Ybus] à partir des admittances des éléments du réseau et la matrice d'incidence

Y_{bus} =

	1	2	3	4
1	$y_{11} + y_{66}$	$- y_{66}$	0	0
2	$- y_{66}$	$y_{22} + y_{55} + y_{66} + y_{77}$	$- y_{55}$	$- y_{77}$
3	0	$- y_{55}$	$y_{44} + y_{55}$	$- y_{44}$
4	0	$- y_{77}$	$- y_{44}$	$y_{33} + y_{44} + y_{77}$



Formation de [Ybus] par la Methode d’inspection

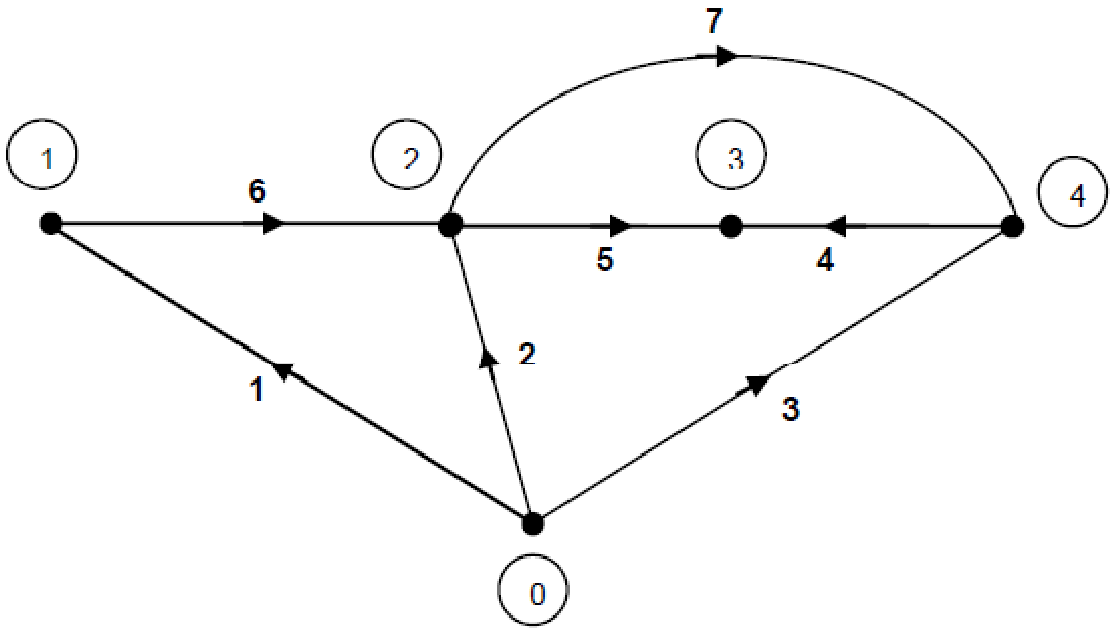
En Résumé : pour un RE donné la matrice d’admittance **[Ybus]** peut être construite comme suit :

1- Les éléments diagonaux pour chaque noeud sont la somme des admittances connectées en ce noeud.

2- Les éléments non diagonaux sont donnés par l'admittance de la ligne joignant le point i à j affectée du signe négatif

3- La matrice est symétrique Yij=Yji

Exemple



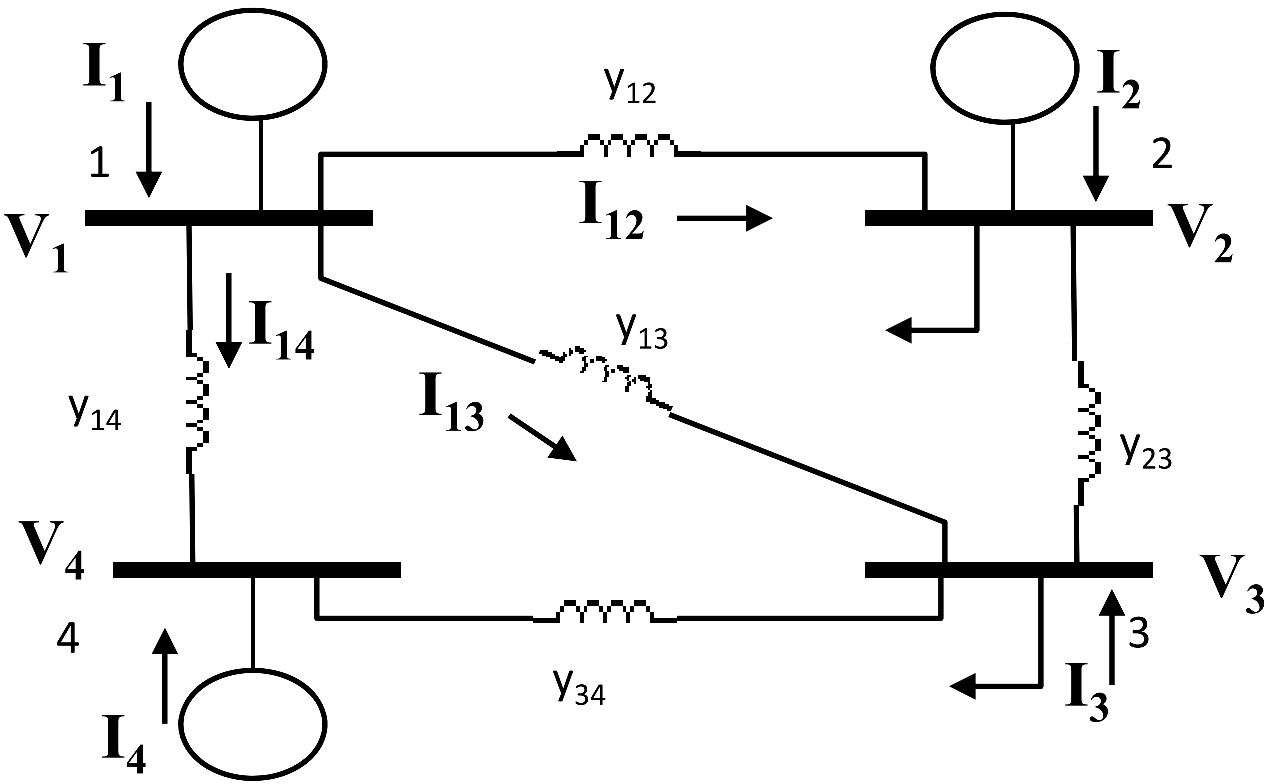
Y_{bus} =

	1	2	3	4
1	$y_{11} + y_{66}$	$- y_{66}$	0	0
2	$- y_{66}$	$y_{22} + y_{55} + y_{66} + y_{77}$	$- y_{55}$	$- y_{77}$
3	0	$- y_{55}$	$y_{44} + y_{55}$	$- y_{44}$
4	0	$- y_{77}$	$- y_{44}$	$y_{33} + y_{44} + y_{77}$

Formation de [Ybus] par la Methode d'inspection Demonstation

Soit le reseau suivant , selon Kirchoff

$$I_1 = I_{12} + I_{13} + I_{14}$$



Formation de [Ybus] par la Methode d'inspection

$$I_1 = I_{12} + I_{13} + I_{14}$$

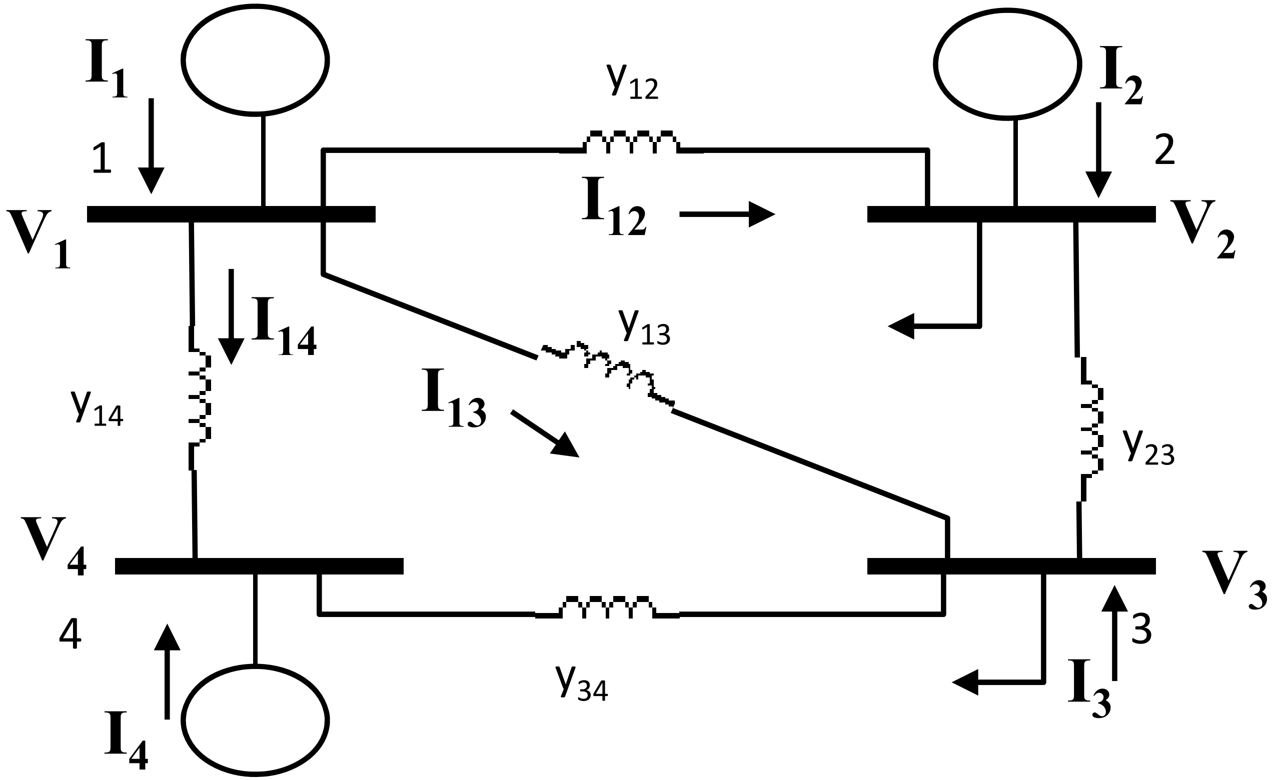
En utilisant la loi d'Ohm's :

$$I_{ij} = y_{ij}(V_i - V_j)$$

$$I_1 = y_{12}(V_1 - V_2) + y_{13}(V_1 - V_3) + y_{14}(V_1 - V_4)$$

$$I_1 = V_1(y_{12} + y_{13} + y_{14}) + V_2(-y_{12}) + V_3(-y_{13}) + V_4(-y_{14})$$

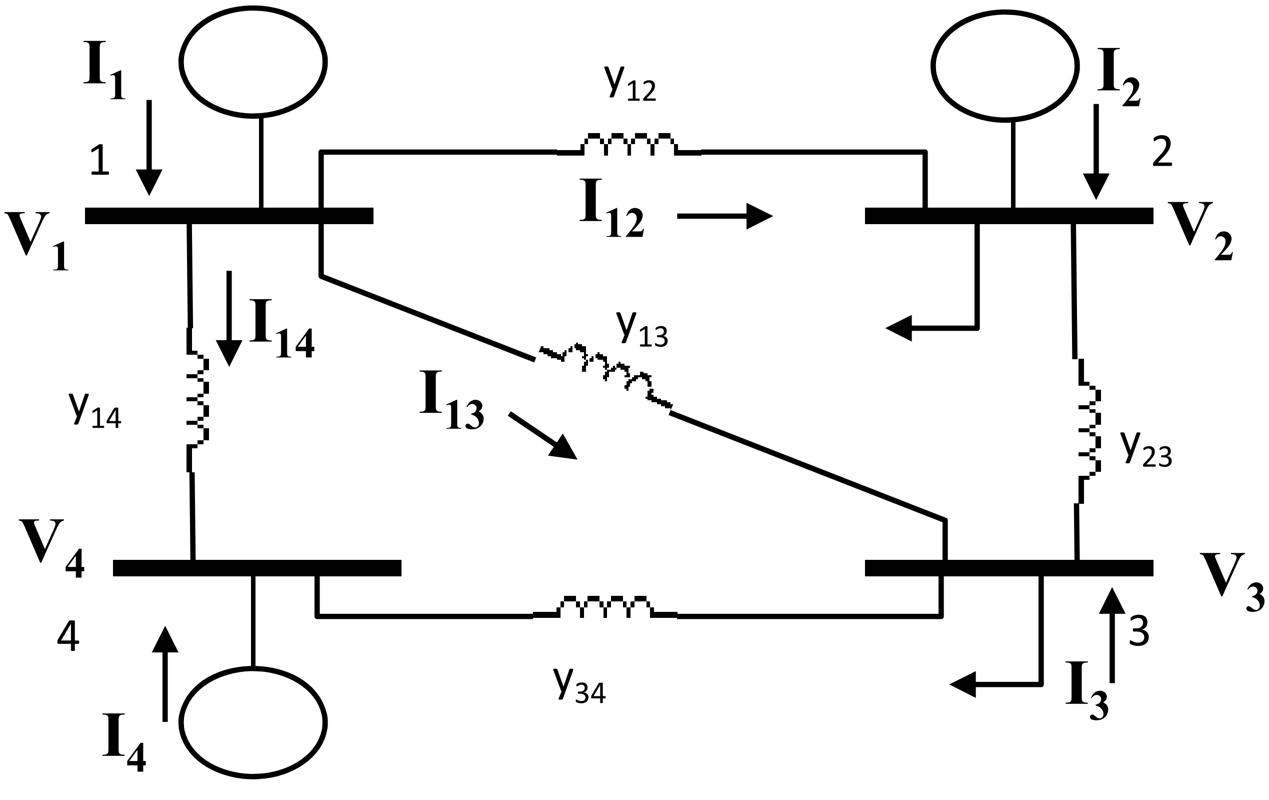
Pour les autres courants:



$$I_2 = V_1(-y_{21}) + V_2(y_{21} + y_{23} + y_{24}) + V_3(-y_{23}) + V_4(-y_{24})$$
$$I_3 = V_1(-y_{31}) + V_2(-y_{32}) + V_3(y_{31} + y_{32} + y_{34}) + V_4(-y_{34})$$
$$I_4 = V_1(-y_{41}) + V_2(-y_{42}) + V_3(y_{41} + y_{42} + y_{43}) + V_4(-y_{43})$$

pour les autres noeuds:

$$I_1 = V_1(y_{12} + y_{13} + y_{14}) + V_2(-y_{12}) + V_3(-y_{13}) + V_4(-y_{14})$$
$$I_2 = V_1(-y_{21}) + V_2(y_{21} + y_{23} + \cancel{y_{24}}) + V_3(-y_{23}) + V_4(-\cancel{y_{24}})$$
$$I_3 = V_1(-y_{31}) + V_2(-y_{32}) + V_3(y_{31} + y_{32} + y_{34}) + V_4(-y_{34})$$
$$I_4 = V_1(-y_{41}) + V_2(-\cancel{y_{42}}) + V_3(y_{41} + \cancel{y_{42}} + y_{43}) + V_4(-y_{43})$$



<u>Notes</u>:

1. $y_{ij}=y_{ji}$

2. Si la branche ij n'existe pas, alors $y_{ij}=0$.

Sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{12}+y_{13}+y_{14} & -y_{12} & -y_{13} & -y_{14} \\ -y_{21} & y_{21}+y_{23}+y_{24} & -y_{23} & -y_{24} \\ -y_{31} & -y_{32} & y_{31}+y_{32}+y_{34} & -y_{34} \\ -y_{41} & -y_{42} & -y_{43} & y_{41}+y_{42}+y_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

Algorithme de Construction de [Ybus]

Pour un RE donné la matrice d'admittance peut être construite par en utilisant l'équation suivante

$$Y_{i\,j} = -\frac{1}{z_{i\,j}}$$

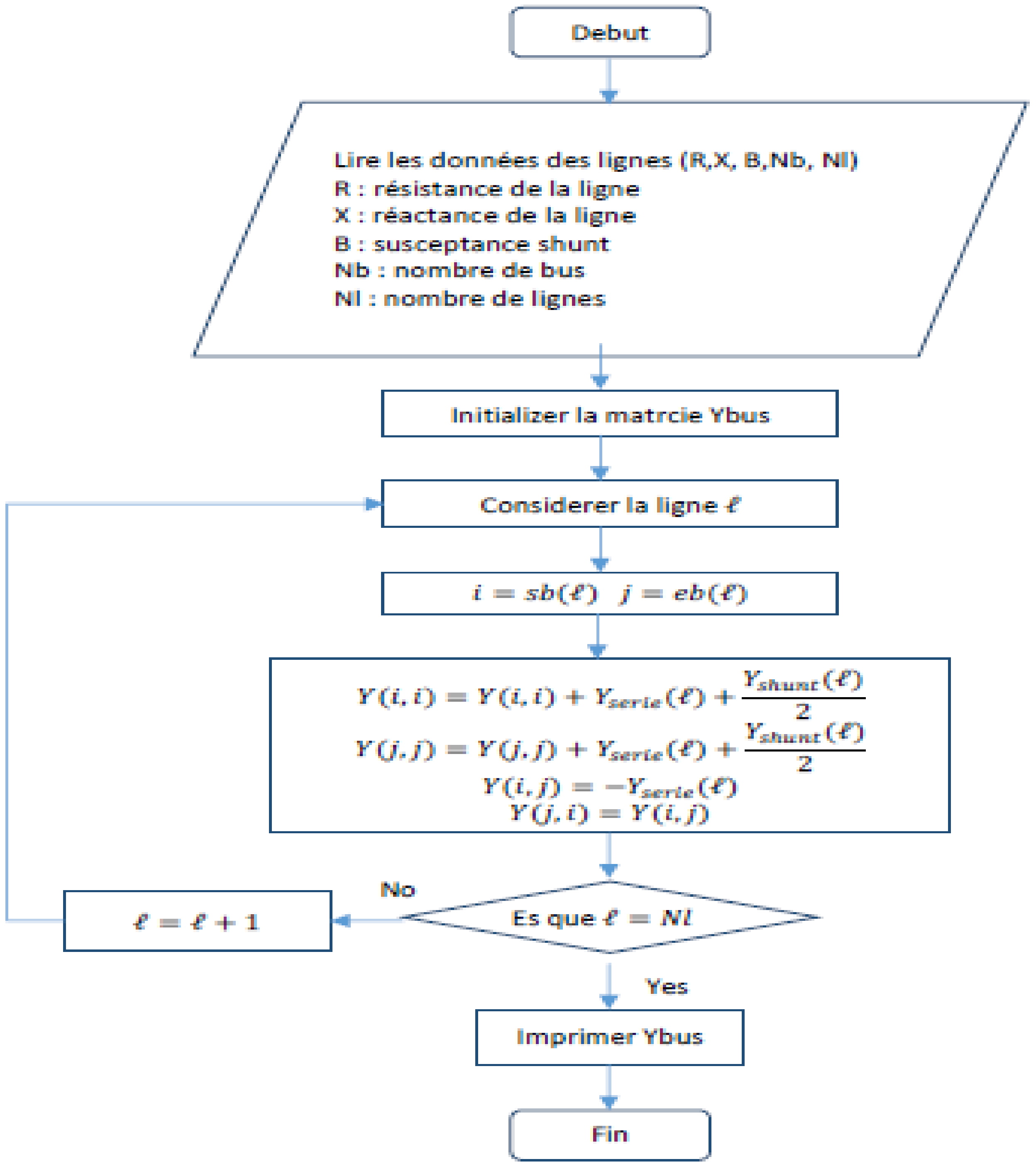
$$Y_{i\,i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z_{i\,j}} + y_b$$

$$Y_{j\,i} = Y_{i\,j}.$$

Avec: Yb = jB est l'admittance shunt

B: est la susceptance shunt.

n: nombre de bus


Debut
Lire les données des lignes (R,X, B,Nb, Nl)
R : résistance de la ligne
X : réactance de la ligne
B : susceptance shunt
Nb : nombre de bus
Nl : nombre de lignes
Initializer la matrcie Ybus
Considerer la ligne ℓ
$i = sb(\ell) \quad j = eb(\ell)$
$Y(i,i) = Y(i,i) + Y_{serie}(\ell) + \frac{Y_{shunt}(\ell)}{2}$
$Y(j,j) = Y(j,j) + Y_{serie}(\ell) + \frac{Y_{shunt}(\ell)}{2}$
$Y(i,j) = -Y_{serie}(\ell)$
$Y(j,i) = Y(i,j)$
No
Es que $\ell = Nl$
$\ell = \ell + 1$
Yes
Imprimer Ybus
Fin

Exemple

Former la matrice d'admittance Y_{bus} du réseau qui a les données suivantes :

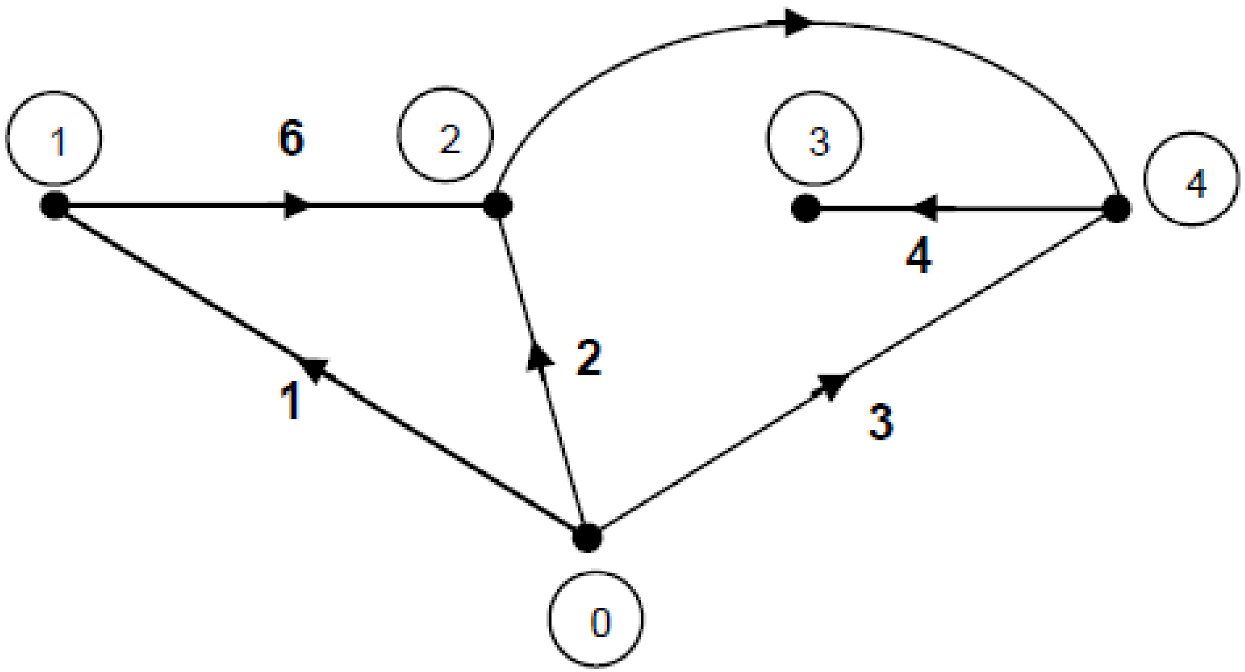
Ligne	SB	EB	R	X	B
1	1	2	0.1	0.4	0.015
2	2	3	0.15	0.6	0.02
3	3	4	0.18	0.55	0.018
4	4	1	0.1	0.35	0.012
5	4	2	0.25	0.2	0.03

Y =

1.3430 - 4.9810i	-0.5882 + 2.3529i	0.0000 + 0.0000i	-0.7547 + 2.6415i
-0.5882 + 2.3529i	3.4194 - 5.8403i	-0.3922 + 1.5686i	-2.4390 + 1.9512i
0.0000 + 0.0000i	-0.3922 + 1.5686i	0.9296 - 3.1919i	-0.5375 + 1.6423i
-0.7547 + 2.6415i	-2.4390 + 1.9512i	-0.5375 + 1.6423i	3.7312 - 6.2050i

Algorithme de Construction de [Ybus]

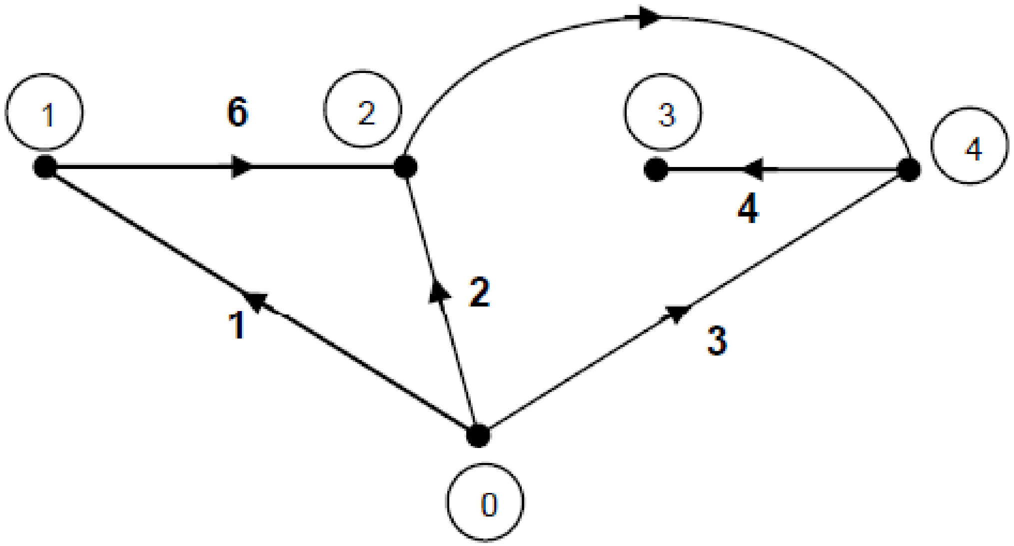
Pour un RE donné la matrice d'admittance peut être construite par l'addition des éléments un par un.
En séparant le lien correspondant à l'élement 5 qui relie les nœuds 2 et 3, la matrice Ybus peut être réécrite sous la forme suivante :



Algorithme de Construction de [Ybus]

$$
Y_{bus} = \begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline
1 & y_{11} + y_{66} & -y_{66} & 0 & 0 \\
2 & -y_{66} & y_{22} + y_{66} + y_{77} & 0 & -y_{77} \\
3 & 0 & 0 & y_{44} & -y_{44} \\
4 & 0 & -y_{77} & -y_{44} & y_{33} + y_{44} + y_{77}
\end{array}
$$

$$
+ \begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & y_{55} & -y_{55} & 0 \\
3 & 0 & -y_{55} & y_{55} & 0 \\
4 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$



Algorithme de Construction de [Ybus]

On peut montrer que l'effet d'ajouter un élément 5 entre les nœuds 2 et 3 est:
l'ajout d'une admittance Y55 aux éléments :
Ybus(2,2) et Ybus(3,3)
L'ajout d'une admittance – Y55 aux éléments:
Ybus(2,3) et Ybus (3,2).

	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	y_{55}	$-y_{55}$	0
3	0	$-y_{55}$	y_{55}	0
4	0	0	0	0

Pour construire la matrice Ybus, on initialise tous les éléments à la valeur zero, ensuite on ajoute les éléments du réseau un par un, pour chaque pas 04 éléments de Ybus sont modifiés (à démontrer)

Modélisation de base des réseaux électriques

Construction de la matrice Z bus.

Algorithme de construction de la matrcie Z_{bus}

La modification de la matrice Z_{bus} implique l'un des 4 cas suivants

Cas 1 : Ajout d'une nouvelle branche d’impedance Zb entre un nouveau bus (k) et le bus de référence (r)

Cas 2 : Ajout d’une nouvelle branche d'impédance Z_b entre un nouveau bus (k) et un bus existant (j)

Cas 3 : Ajout d'une nouvelle branche d’impedance Zb entre un bus existant (j) et le bus de référence (r)

Cas 4 : Ajout d'une nouvelle branche d’impedance Zb entre deux bus existants (i) et (j)

Algorithme de construction de la matrcie Z_{bus}

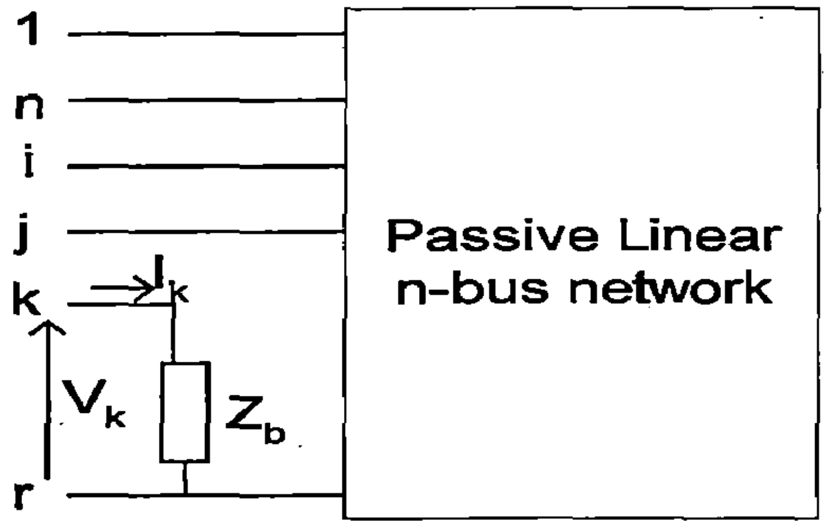
Cas 1 : Ajout d'une nouvelle branche d'impedance Zb entre un nouveau bus (k) et le bus de référence (r)

$$V_k = Z_b I_k$$

$$Z_{ki} = Z_{ik} = 0;\ i = 1, 2, \ldots, n$$

$$Z_{kk} = Z_b$$

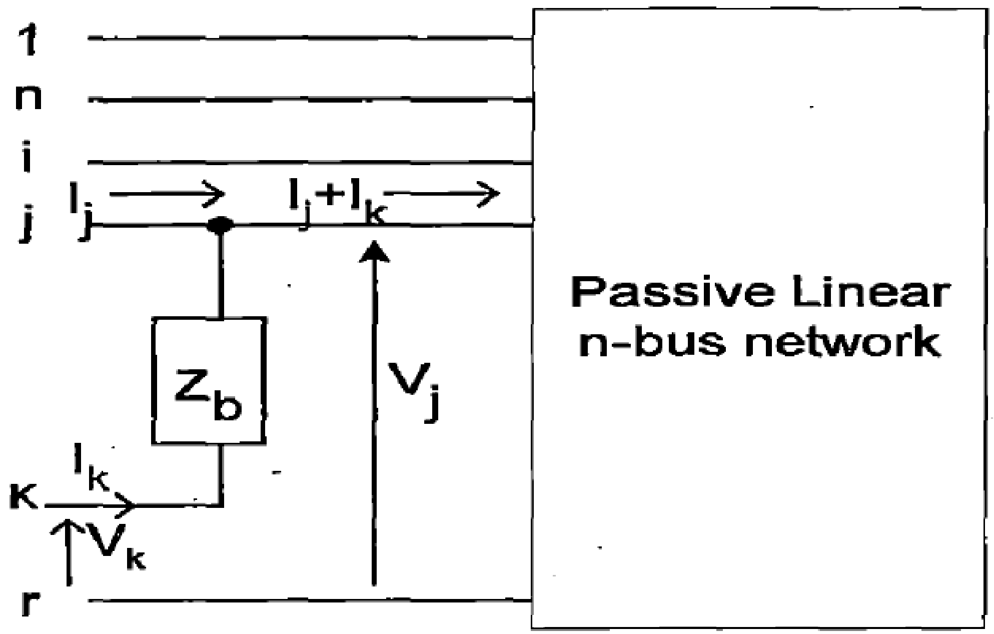
$$Z_{bus\_new} = \left[\begin{array}{c|c} Z_{bus\_old} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 \cdots\cdots 0 & Z_b \end{array}\right]$$



L'ajout d'un nouveau bus augmentera l'ordre de la matrice Zbus de 1

Algorithme de construction de la matrcie Z_{bus}

Cas 2 : Ajout d’une nouvelle branche d'impédance Z_b entre un nouveau bus (k) et un bus existant (j)



$$V_k = Z_b I_k + V_j$$

n

$$= Z_b I_k + Z_{j1} I_1 + Z_{j2} I_2 + \dots + Z_{jj} (I_j + I_k) + \dots + Z_{jn} I_n$$

Algorithme de construction de la matrcie Z_{bus}

Cas 2 : Ajout d'une nouvelle branche d'impédance Z_b entre un nouveau bus (k) et un bus existant (j)

$$V_k = Z_{j1}I_1 + Z_{j2}I_2 + \dots + Z_{jj}I_j + \dots + Z_{jn}I_n + (Z_{jj} + Z_b)I_k$$

$$Z_{BUS}\,(\text{new}) = \left[\begin{array}{c|c} & Z_{1j} \\ & Z_{2j} \\ Z_{BUS}(\text{old}) & \vdots \\ & Z_{nj} \\ \hline Z_{ji}Z_{j2}\dots Z_{jn} & Z_{jj} + Z_b \end{array}\right]$$

Algorithme de construction de la matrcie Z_{bus}

Cas 3 : Ajout d'une nouvelle branche d'impedance Zb entre un bus existant (j) et le bus de référence (r)

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} & Z_{1j} \\ & Z_2 j \\ Z_{BUS}(\text{old}) & \vdots \\ & Z_{nj} \\ \hline Z_{j1} Z_{j2} \dots Z_{jn} & Z_{jj} + Z_b \end{array}\right] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \\ I_k \end{bmatrix}$$

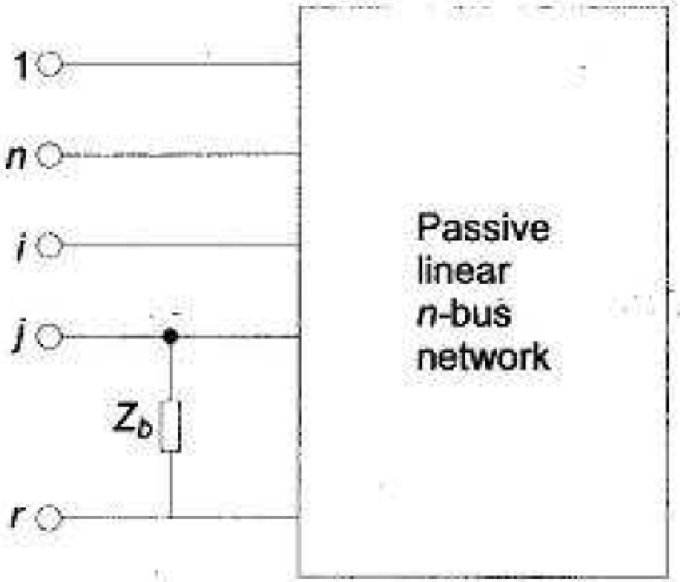


Fig. 9.26 Type-3 modification

Eliminate I_k in the set of equations contained in the matrix operation

$$0 = Z_{j1} I_1 + Z_{j2} I_2 + \dots + Z_{jn} I_n + (Z_{jj} + Z_b) I_k$$

$$I_k = -\frac{1}{Z_{jj} - Z_b} (Z_{j1} I_1 + Z_{j2} I_2 + \dots + Z_{jn} I_n)$$

Algorithme de construction de la matrcie Z_{bus}

Cas 3 : Ajout d'une nouvelle branche d'impedance Zb entre un bus existant (j) et le bus de référence (r)

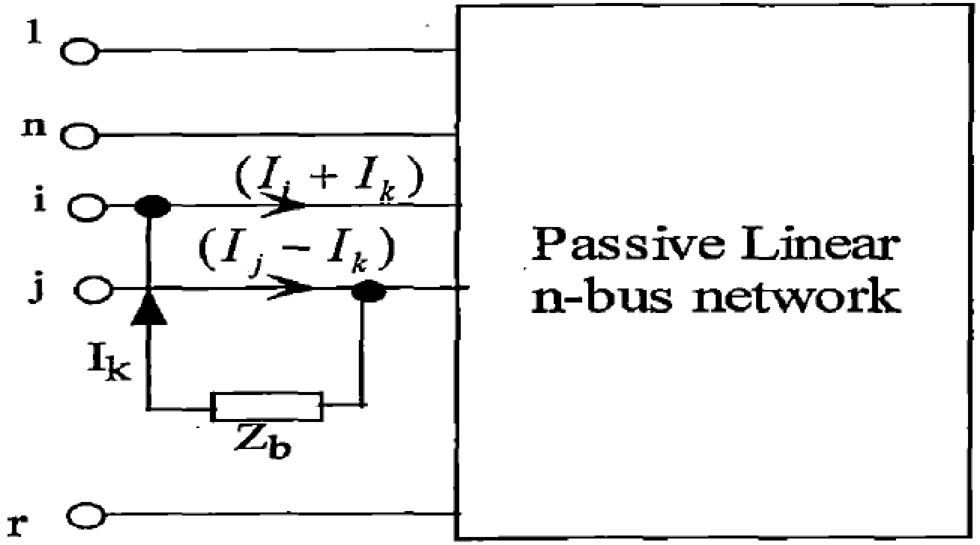
$$V_i = Z_{i1}I_1 + Z_{i2}I_2 + \ldots + Z_{in}I_n + Z_{ij}I_k$$

$$V_i = \left[Z_{i1} - \frac{1}{Z_{jj}+Z_b}(Z_{ij}Z_{j1})\right]I_1 + \left[Z_{i2} - \frac{1}{Z_{jj}+Z_b}(Z_{ij}Z_{j2})\right]I_2 + \ldots + \left[Z_{in} - \frac{1}{Z_{jj}+Z_b}(Z_{ij}\,Z_{jn})\right]I_n$$

$$Z_{bus}^{new} = Zbus_{bus}^{old} - \frac{1}{Z_{jj}+Z_b}\begin{bmatrix} Z_{1j} \\ \vdots \\ Z_{nj} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_{j1} & \cdots & Z_{jn} \end{bmatrix}$$

Algorithme de construction de la matrcie Z_{bus}

Cas 4 : Ajout d'une nouvelle branche d'impedance Zb entre deux bus existants (i) et (j)



$$V_j = Z_b I_k + V_i$$

$$V_i = Z_{i1} I_1 + Z_{i2} I_2 + \ \ldots + Z_{ii}\ (I_i + I_k) + Z_{ij}\ (I_j - I_k) + \ldots + Z_{in} I_n$$

$$Z_{j1} I_1 + Z_{j2} I_2 + \ \ldots + Z_{ji}\ (I_i + I_k) + Z_{jj}\ (I_j - I_k) + \ \ldots + Z_{jn} I_n$$
$$= Z_b I_k + Z_{i1} I_1 + Z_{i2} I_2 + \ldots + Z_{ii}\ (I_i + I_k) + Z_{ij}(I_j - I_k) + \ldots + Z_{in} I_n$$

Algorithme de construction de la matrcie Z_{bus}

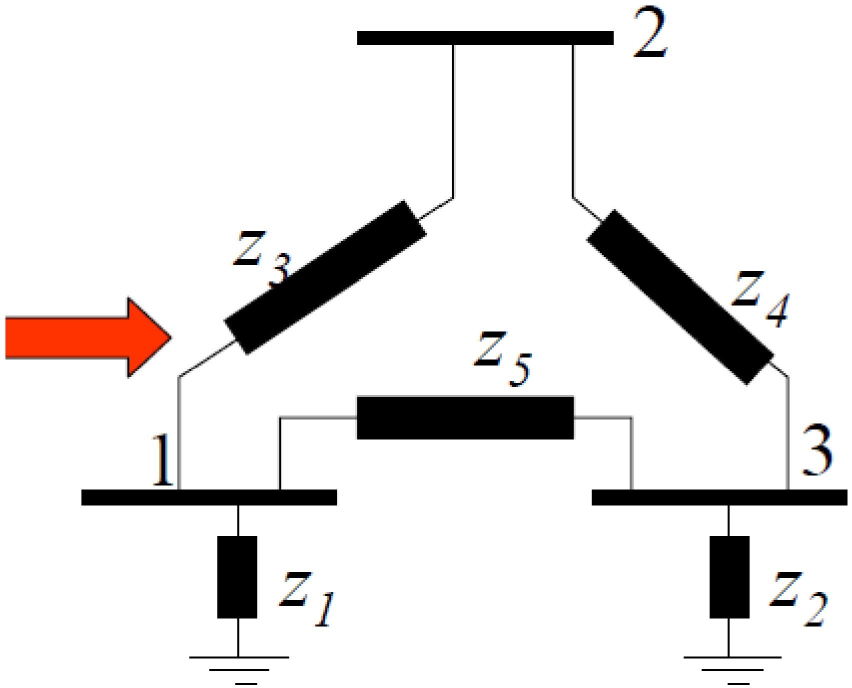
Cas 4 : Ajout d'une nouvelle branche d'impedance Zb entre deux bus existants (i) et (j)

$$
\begin{aligned}
0 = (Z_{i1} - Z_{j1})\, I_1 + \ \ldots + (Z_{ii} - Z_{ji})\, I_i + (Z_{ij} - Z_{jj})\, I_j \\
+\ldots+ (Z_{in} - Z_{jn})\, I_n + (Z_b + Z_{ii} + Z_{jj} - Z_{ij} - Z_{ji})\, I_k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \\ \hline 0 \end{bmatrix}
=
\left[\begin{array}{c|c}
 & (Z_{1i} - Z_{1j}) \\
Z_{\mathrm{BUS}} & | \\
 & (Z_{ni} - Z_{nj}) \\
\hline
(Z_{i1} - Z_{j1})\ldots(Z_{in} - Z_{jn}) & Z_b + Z_{ii} + Z_{jj} - 2Z_{ij}
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \\ \hline I_j \end{bmatrix}
$$

$$
Z_{bus}^{new} = Zbus_{bus}^{old} - \frac{1}{Z_{ii} + Z_{jj} + Z_b - 2Z_{ij}}
\begin{bmatrix} Z_{1i} - Z_{1j} \\ \vdots \\ Z_{ni} - Z_{nj} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} Z_{i1} - Z_{j1} & \ldots & Z_{in} - Z_{jn} \end{bmatrix}
$$

Exemple : Formation de Zbus

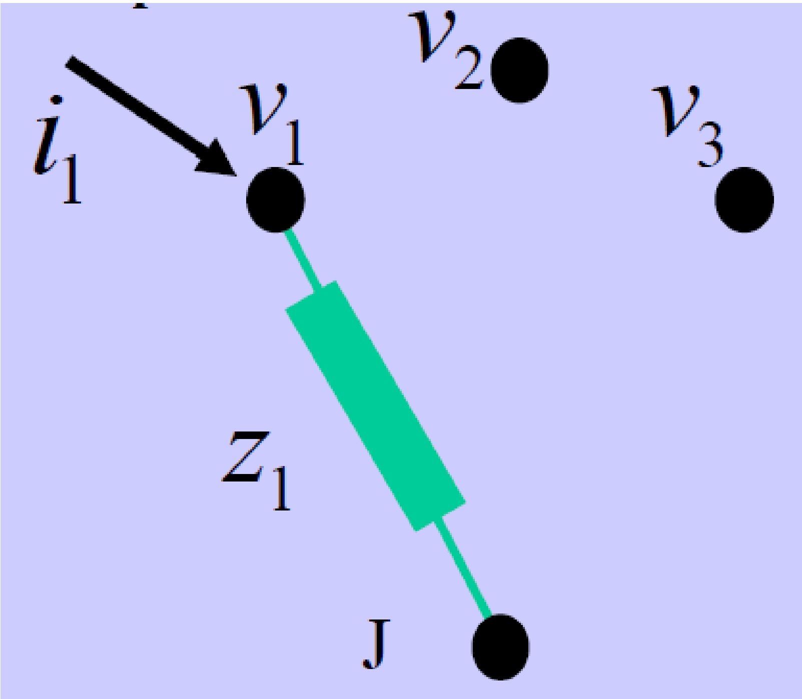


$$z_1 = j0.15 \ z_2 = j0.075 \ z_3 = j0.1 \ z_4 = j0.1 \ z_5 = j0.1$$

Etape 1 : Ajout d'une nouvelle branche d'impedance Z1 entre un nouveau bus (1) et le bus de référence (j)

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{bus}} = [z_1]$$

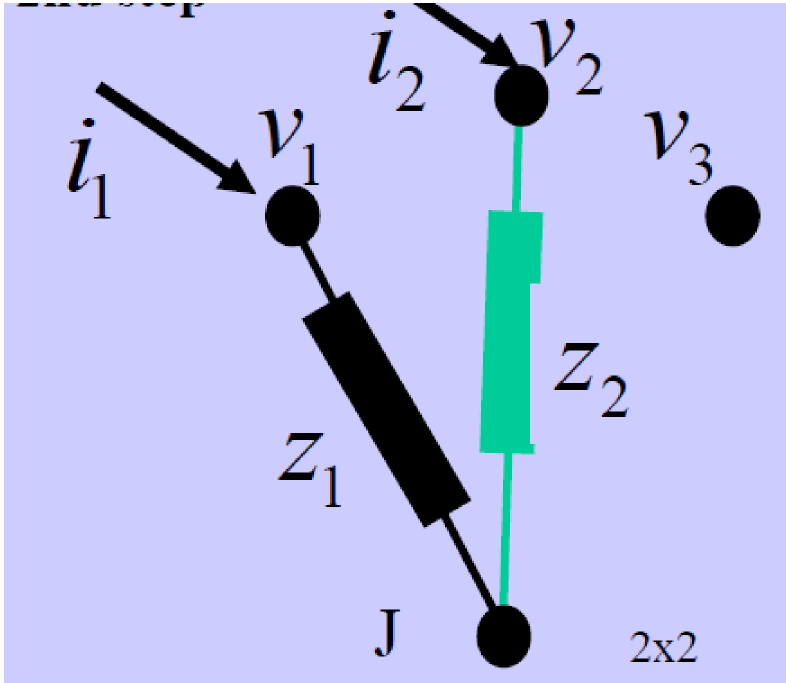
$$\mathbf{Z}_{\mathbf{bus}} = [z_1] = [j0.15]$$



Etape 2 : Ajout d'une nouvelle branche d'impedance Z2 entre un nouveau bus (2) et le bus de référence (j)

$$\mathbf{Z}_{\text{bus(new)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{\text{bus(old)}} & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j0.15 & 0 \\ 0 & j0.075 \end{bmatrix}$$

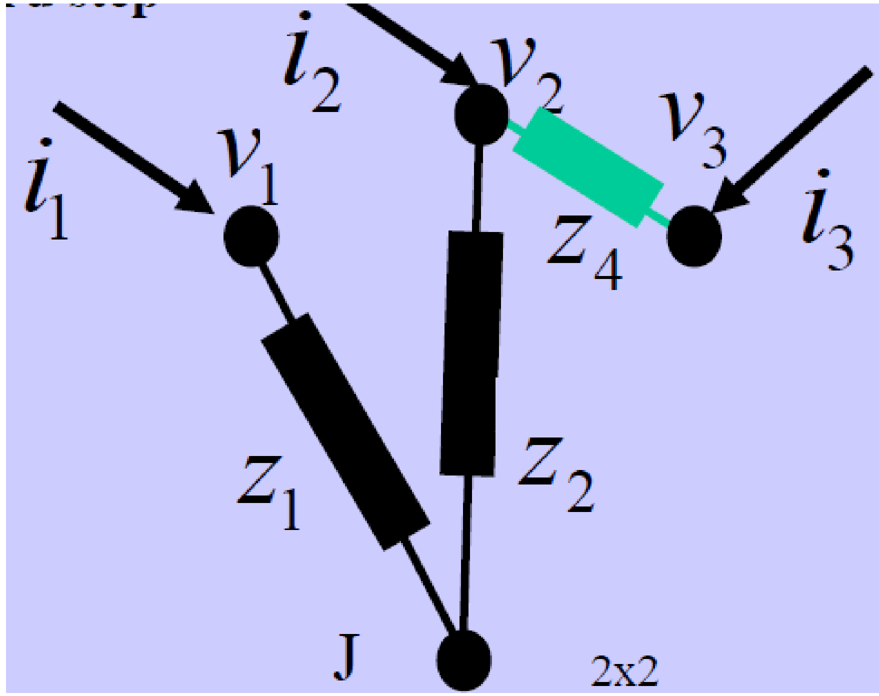
$$\mathbf{V}_{\text{bus}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$



Etape 3 : Ajout d'une nouvelle branche d’impedance Z4 entre un nouveau bus (3) et un bus existant (2)

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 + i_3 \end{bmatrix}$$

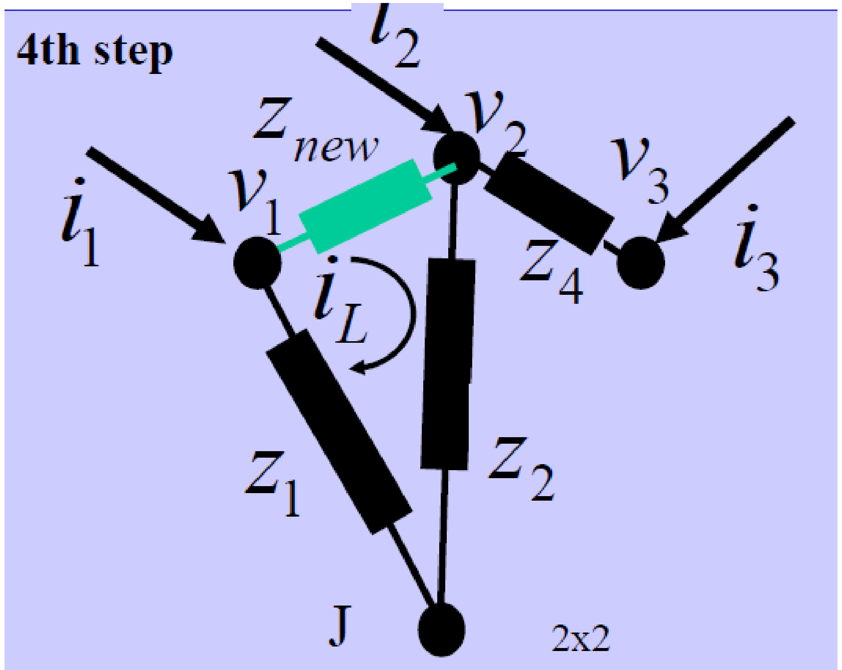
$$v_3 = v_2 + z_4 i_3$$



$$\mathbf{Z}_{\text{bus,new}} = \left[\begin{array}{cc:c} \multicolumn{2}{c:}{\mathbf{Z}_{\text{bus,old}}} & z_{12} \\ & & z_{22} \\ \hdashline z_{12} & z_{22} & z_2 + z_4 \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} j0.15 & 0 & 0 \\ 0 & j0.075 & j0.075 \\ 0 & j0.075 & j0.175 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

Etape 4 : Ajout d'une nouvelle branche d'impedance Z3 entre deux bus existants (1) et (2)



$$\mathbf{Z}_{\text{bus,new}} = j\begin{bmatrix} 0.0808 & 0.0346 & 0.0346 \\ 0.0346 & 0.0577 & 0.0577 \\ 0.0346 & 0.0577 & 0.1577 \end{bmatrix}$$

Etape 5 : Ajout d'une nouvelle branche d'impedance Z5 entre deux bus existants (1) et (3)

Devoir maison !!!

Modification de la matrice admittance (méthode de réduction de Kron)

Soit le réseau à quatre nœuds définit par l'équation suivante

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

Si le courant I4 =0, le nœud 4 peut être supprimé et l'équation du réseau devient: (Determiner les nouvelles admittances)

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}' & Y_{12}' & Y_{13}' \\ Y_{21}' & Y_{22}' & Y_{23}' \\ Y_{31}' & Y_{32}' & Y_{33}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Modification de la matrice admittance (méthode de réduction de Kron)

L'équation du nœud 4 est de la forme

$$Y_{41} V_1 + Y_{42} V_2 + Y_{43} V_3 + Y_{44} V_4 = 0$$

$$V_4 = - \frac{Y_{41}}{Y_{44}} V_1 - \frac{Y_{42}}{Y_{44}} V_2 - \frac{Y_{43}}{Y_{44}} V_3$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

Remplaçant V4 dans l'équation du nœud 1 :

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 + Y_{13} V_3 + Y_{14} \left(- \frac{Y_{41}}{Y_{44}} V_1 - \frac{Y_{42}}{Y_{44}} V_2 - \frac{Y_{43}}{Y_{44}} V_3\right)$$

$$= \left(Y_{11} - \frac{Y_{14} Y_{41}}{Y_{44}} \right) V_1 + \left(Y_{12} - \frac{Y_{14} Y_{42}}{Y_{44}} \right) V_2 + \left(Y_{13} - \frac{Y_{14} Y_{43}}{Y_{44}} V_3\right)$$

Modification de la matrice admittance (méthode de réduction de Kron)

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 + Y_{13} V_3 + Y_{14} \left(- \frac{Y_{41}}{Y_{44}} V_1 - \frac{Y_{42}}{Y_{44}} V_2 - \frac{Y_{43}}{Y_{44}} V_3\right)$$

$$= \left(Y_{11} - \frac{Y_{14} Y_{41}}{Y_{44}} \right) V_1 + \left(Y_{12} - \frac{Y_{14} Y_{42}}{Y_{44}} \right) V_2 + \left(Y_{13} - \frac{Y_{14} Y_{43}}{Y_{44}} V_3\right)$$

En comparant avec $I_1 = Y_{11}' V_1 + Y_{12}' V_2 + Y_{13}' V_3$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}' & Y_{12}' & Y_{13}' \\ Y_{21}' & Y_{22}' & Y_{23}' \\ Y_{31}' & Y_{32}' & Y_{33}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Modification de la matrice admittance (méthode de réduction de Kron)

$$Y_{11}' = Y_{11} - \frac{Y_{14}\,Y_{41}}{Y_{44}}$$

$$Y_{12}' = Y_{12} - \frac{Y_{14}\,Y_{42}}{Y_{44}}$$

$$Y_{13}' = Y_{13} - \frac{Y_{14}\,Y_{43}}{Y_{44}}$$

Conclusion , quand le nœud k est supprimé, les éléments modifiés de Ybus peuvent être calculer comme suit:

$$Y_{ij}' = Y_{ij} - \frac{Y_{ik}\,Y_{kj}}{Y_{kk}}$$

Avec $i = 1, 2, \ldots, N \quad i \neq k$ et $j = 1, 2, \ldots, N \quad j \neq k$

Modification de la matrice admittance (méthode de réduction de Kron)

Exemple:
Calculer les tension V1, V2, V3 et V4 en utilisant la technique de réduction du réseau

$$\begin{bmatrix} 0.625 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1.0833 & -0.25 & -0.3333 \\ 0 & -0.25 & 0.75 & -0.5 \\ 0 & -0.3333 & -0.5 & 0.8333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

solution:

Eliminant le noeud 1

$$\begin{bmatrix} 0.6833 & -0.25 & -0.3333 \\ -0.25 & 0.75 & -0.5 \\ -0.3333 & -0.5 & 0.8333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Eliminant le noeud 3

$$\begin{bmatrix} 0.6 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$V_2 = 60$ and $V_4 = 68$

$$0.625\, V_1 - 0.5\, V_2 = 0 \qquad V_1 = \frac{0.5 \text{ x } 60}{0.625} = 48$$

$$-0.25\, V_2 + 0.75\, V_3 - 0.5\, V_4 = 0$$

$$V_3 = \frac{0.25 \text{ x } 60 + 0.5 \text{ x } 68}{0.75} = 65.3333$$