FLEXION SIMPLE

Chapitre 4

1. Définition

Un élément est soumis à la flexion simple lorsque les forces agissant sur lui (y compris les réactions d'appuis), et situées à gauche d'une section droites **(S)**, peuvent être réduites, par rapport au centre de gravité de **(S)**, à un moment de flexion **(M)** d'axe perpendiculaire au plan de symétrie de la section **(fig.1)**, et à un effort tranchant **(V)** exercé dans le plan de la section.

On suppose aussi dans ce qui suit que les sections droites de ces éléments possèdent un axe de symétrie et que les forces qui leur sont appliquées sont symétriques par rapport à ce plan.

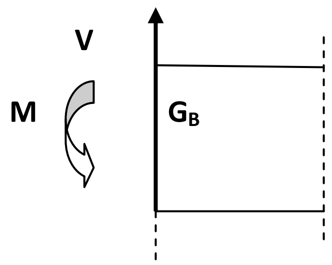


Fig.1

Dan ce présent chapitre nous étudions en premier les effets du moment de flexion M (ELUR) et (ELS) ensuite ceux de l'effort tranchant et ce en trois parties.

2. Etats limites

Les règles du BAEL prévoient que les calculs de béton armé seront conduits en application de la théorie des états limites.

Un état limite est l'état d'une structure (ou d'une partie de cette structure) dans lequel une condition requise pour remplir son objet est strictement satisfaite et cesse de l'être en cas d'augmentation de la sollicitation.

On distingue les états limites ultimes (de résistance, stabilité de forme) et les états limites de service (de compression de béton, d'ouverture de fissure, de déformation) :

3. Etats limites ultimes (ELU)

Ils mettent en jeu la sécurité des biens et des personnes

Ils correspondent au maximum de la capacité portante de l'ouvrage ou d'un de ses éléments par :

- **Perte d'équilibre statique,**
- **Rupture d'une ou plusieurs sections,**
- **Instabilité de forme (flambement)**

Critères de calcul sont :

Déformations relatives limites (ou courbure limites)
Calculs de type « rupture » les lois réelles (idéalisées) σ - ε

4. Etats limites de service (ELS)

Ils sont liés aux conditions normales d'exploitation et de durabilité

- Ouverture excessive des fissures,
- Compression excessive du béton,
- Déformation excessive des éléments porteurs

Critères de calcul sont :
Contraintes admissibles
Calcul de type « élastique » : loi de Hooke, coefficient d'équivalence.

5. Calcul de section relatif à l'Etat Limite de Résistance

4.1 Hypothèses de calcul :

_ Les sections droites restent planes après déformation

_ Il n'y a pas de glissement relatif entre les armatures et le béton

_ Le diagramme des déformations de la section est linéaire ; les déformations normales (allongements et raccourcissement relatifs) sont donc, en chaque point, proportionnelles à la distance de cs point à l'axe neutre.

_ La résistance à la traction du béton est négligée.

_ Les positions du diagramme des déformations de ls section correspondant à un état limite sont définies au paragraphe.

Les diagrammes contraintes-déformations de calcul du béton et de l'acier sont ceux définis aux chapitres :
Le raccourcissement unitaire du béton est limité à :

ε_{bc} = 3.5 ‰ en flexion simple

ε_{bc} = 2 ‰ en compression

L'allongement maximal de l'acier tendu est limité conventionnellement à ε_s = 10 ‰
_ Un groupe de barres disposées en plusieurs lits est équivalent à une barre unique, située au centre de gravité du groupe, si l'erreur commise par les déformations au niveau des différents lits, ne dépasse pas 15%.

4.2 Diagramme des déformations à l'ELU (règle des trois pivots) :

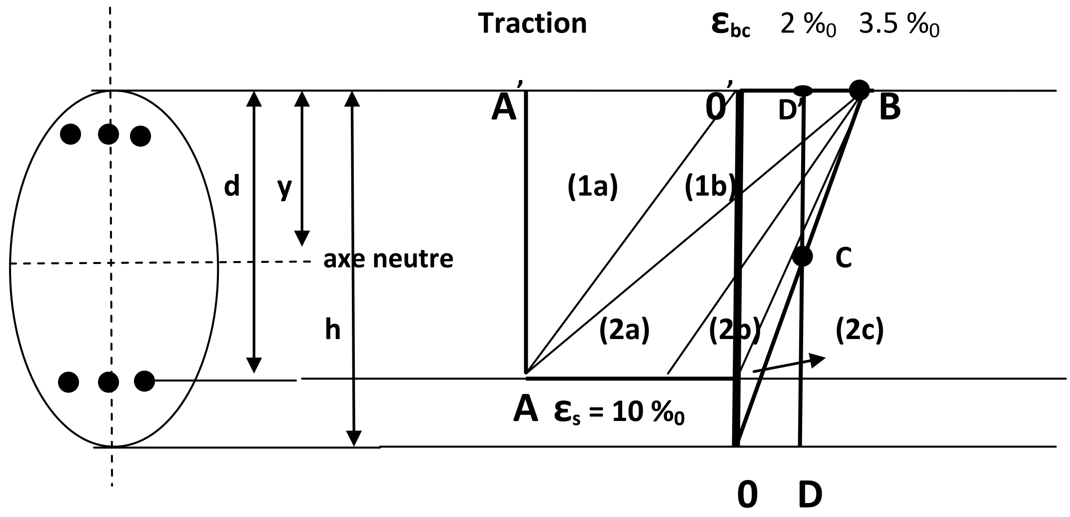


Fig.2 Diagramme des déformations

On note **Y** la distance de l'axe neutre à la fibre supérieure de la section, la valeur de **Y** détermine celui des domaines dans lequel est situé le diagramme limite. Ces domaines représentés sur la figure 2, sont définis de la façon suivante.

Domaine 1, pivot A

Etat limite ultime atteint pour l'acier

- **Limite A A' traction pure ou simple, allongement des aciers ε_s = 10 $\%_0$**
- **Limite A A' O' traction composée (1a), ε_s < 10 $\%_0$, l'axe neutre se trouve à l'extérieur de la section**
- **Limite A O'B flexion simple (1b), la valeur Y de l'axe neutre est donnée par les formules suivantes. Y = α . d**

Si ε_{bc}= 2 % → y = (2/2+10).d = 0.167.d

Si ε_{bc}= 3.5 % → y = (3.5/3.5+10).d = 0.259.d

Domaine 2, pivot B

Etat limite ultime atteint pour le béton

- **Flexion simple ou composée zone (2a) $\varepsilon_y \leq \varepsilon_s \leq 10\ \%_0$; $\sigma_S = f_e/\varphi_S$**
- **zone (2b) $0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_y$; $\sigma_S = \varepsilon_s \cdot E_S$**
- **zone (2c) $\varepsilon_s > 0$ acier faiblement comprimé**
- **La position de l'axe neutre est égale à : 0.259.d < y < h**

Domaine 3, pivot C

Etat limite ultime atteint pour le béton

- **Limite D C D' compression simple, correspond à un raccourcissement ultime du béton ε_{bc} = 2$\%_0$**
- **Flexion composée, 2$\%_0$ < ε_b < 3.5$\%_0$; la position de l'axe neutre est en dehors de la section : Y ≥ h**

4.3 Diagramme contraintes – déformations :

4.3.1 Aciers :

Le diagramme contraintes – déformations à considérer dans le calcul à l'état ultime est conventionnellement défini par la **fig.3**, pour le calcul et les vérifications à l'état limite de service, l'acier est supposé élastique et linéaire.

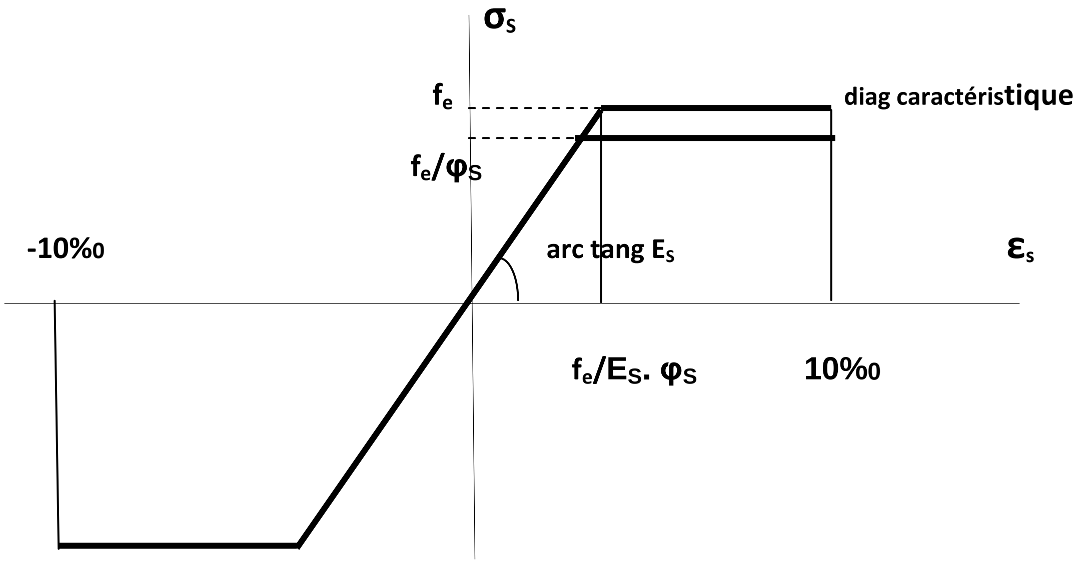


Fig.3 Diagramme contraintes-déformations de l'acier

Le module $\mathbf{E_S}$ n'est que peu affecté par la dispersion, le diagramme de calcul se déduit du diagramme conventionnel (diagramme caractéristique) par une affinité parallèle à la Loi de Hooke et de rapport $\mathbf{1/\varphi_S}$ avec φ_S = 1.15 dans le cas général et φ_S = 1 dans le cas des combinaisons accidentelles.

Le diagramme de calcul permet de connaître la contrainte σ_S de l'acier, lorsque l'on connait sa déformation relative, il est régit par les expressions suivantes.

Si $\varepsilon_s \leq f_e/\varphi_S E_S \rightarrow \sigma_S = E_S.\varepsilon_s$

Si $\varepsilon_s \geq f_e/\varphi_S E_S \rightarrow \sigma_S = f_e/\varphi_S$

4.3.2 Bétons :

Pour le calcul à l'état limite, on utilise pour le béton un diagramme non linéaire dit **« Parabole rectangle » Fig.4** ou dans un but de simplification le **« diagramme rectangulaire équivalent ».** Pour les vérifications à l'état limite de service, le béton considéré comme élastique et linéaire, est défini par son module d'élasticité.

Le diagramme parabole-rectangle est constitué d'un arc de parabole depuis l'origine des coordonnées jusqu'à son sommet de coordonnées $\varepsilon_s = 2‰$, prolongé par un palier d'ordonnée $\sigma_{bc} = 0.85.f_{c28}/\theta\,\varphi_S$

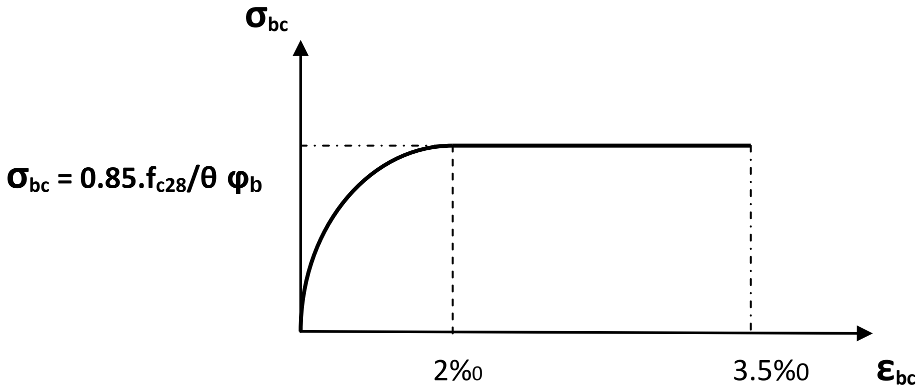


Fig.4 Diagramme parabole rectangle

Le diagramme de calcul permet de connaitre la contrainte σ_{bc} du béton, lorsque l'on connait sa déformation relative, il donne l'expression graphique des relations suivantes.

Si $0 \leq \varepsilon_{bc} \leq 2‰ \rightarrow \sigma_{bc} = 0.25.10^3.\ \varepsilon_{bc}(4-10^3\ \varepsilon_{bc})$

Si $2‰ \leq \varepsilon_{bc} \leq 3.5‰ \rightarrow \sigma_{bc} = 0.85.f_{c28}/\theta\ \varphi_b$

Le coefficient de sécurité φ_b tient compte de :

- L'incertitude due à la dispersion des mesures de résistance effectuées sur les éprouvettes.
- La réduction possible de la résistance du matériau mis en œuvre par rapport à sa résistance caractéristique définie à priori.

φ_b = 1.5 dans le cas de combinaisons fondamentales

φ_b = 1.15 dans le cas de combinaisons accidentelles

Le coefficient **0.85** au numérateur et **θ** au dénominateur ont pour objet de tenir compte de ce que la résistance du béton est fonction décroissante de la durée d'application de la charge.

Durée d'application	≥ 24 h	24 h ≥ …… ≥ 1 h	≤ 1 h
θ	1	0.9	0.85

Tableau 1 : Coefficients θ en fonction de la durée d'application des charges

5. Equivalence du diagramme parabole rectangle et ou diagramme rectangulaire

De façon à permettre un calcul manuel simple, les règles BAEL admettent, lorsque la section n'est pas entièrement comprimée, que l'on substitue au diagramme parabole rectangle, le diagramme rectangulaire simplifié définie de la façon suivante fig.5

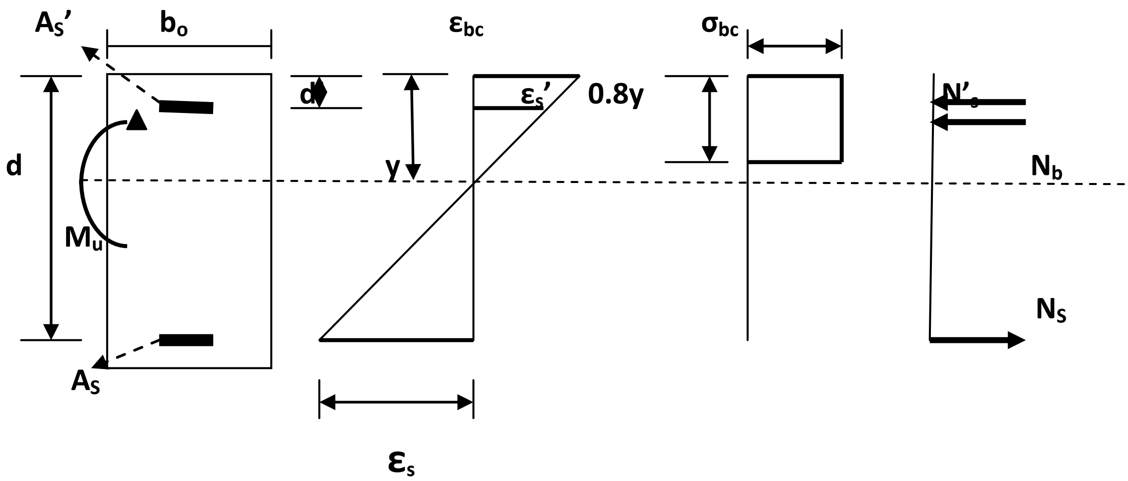


fig.5 Diagramme rectangulaire

Sur une distance de **0.8y** à compter de la fibre la plus comprimée, l'intensité de la contrainte est uniforme et égale à σ_{bc} ; $\sigma_{bc} = 0.85.f_{c28}/\theta\ \varphi_b$

6. Calcul des sections en flexion

Soit M_u le moment équilibré par le béton, calculé au niveau de l'armature tendue, à partir du diagramme rectangulaire simplifié : on obtient alors

On pose l'équation d'équilibre par rapport à la section d'armature A_S :

Soit une section sollicitée par un moment de flexion M_U :

$N_b = \int \sigma_b(y) . b(y)d_y$ **compression du béton**

$N_S' = A_S' \sigma_s'$ **avec** $\sigma_s' = f(\varepsilon_s')$

$N_S = A_S \sigma_s$ **avec** $\sigma_s' = f(\varepsilon_s)$

$N_b + N_S' - N_S = 0$

$M_U = N_b.Z + A_S' \sigma_s'(d-d')$; $N_u = 0.8.y. \sigma_{bc} = 0.8.b. \alpha.d. \sigma_{bc}$

<u>Sans armature comprimées :</u>

$M_u = 0.8.y.b_0.\sigma_b.(d-0.4y)$; $\sigma_{bc} = 0.85.f_{c28}/\theta\ \varphi_b$

En remplaçant **$y = \alpha.d$** dans l'équation on obtient :

$M_u = 0.8y.b_0.\sigma_b.(d-0.4y) = 0.8.\alpha.d.b_0.\sigma_{bc}.(d-0.4.\ \alpha.d)$

$M_u = 0.8.\alpha.d^2.b_0.\sigma_{bc}.(1-0.4.\ \alpha)$

Posons : $\mu = M_r/b_0.d^2.\ \sigma_{bc} = 0.8.\alpha\ (1-0.4\ \alpha)$

$M_u = \mu\ .\ b_0.d^2.\ \sigma_{bc}$

On constate que le moment réduit de la section est sans dimensions;

$\alpha = 0.259 \rightarrow \mu = 0.187$ donc l'état limite ultime est atteint *Pivot B*

- **Si $\mu < 0.187$ le domaine de déformation est situé dans le domaine 1 *Pivot A***
  Et l'allongement relatif de l'armature est de $10\%_0$.
- **Si $\mu > 0.187$ le domaine de déformation est situé dans le domaine 2 *Pivot B***
- **Si $0.187 < \mu < \mu_{limite}$ on calcule la position de l'axe neutre**

<u>$\mu < \mu_{limite}$ section simplement armée</u> :

$\mu = 0.8.\alpha\ (1-0.4\ \alpha)$ en d'autres termes $0.32\alpha + 0.8\alpha + \mu$

Soit : $\alpha = 1.25\ (1-\sqrt{1-2\ \mu})$

le bras de levier est égale à $Z = d.(1 - 0.4\ \alpha)$

$Z/d = (1-0.4\ \alpha) \rightarrow \beta = (1-0.4\ \alpha)$

$0.8.b.\ \alpha.d.\ \sigma_{bc} = A_S\ \sigma_s$ ALORS $A_S = 0.8.b.\ \alpha.d.\ \sigma_{bc} / \sigma_s$

Donc: • **$A_S = M_u / Z.\ \sigma_s$ $Z = \beta.d$**

Alors : **$\varepsilon_s = (1 - \alpha / \alpha)\ .\ \varepsilon_{bc}$**

Si $\varepsilon_s \leq \varepsilon_{el} \rightarrow \sigma_s = E_S\ .\ \varepsilon_s$ cas $\mu > \mu_{limite}$

Si $\varepsilon_s > \varepsilon_{el}$ → $\sigma_s = f_e/\varphi_S$ cas $\mu < \mu_{limite}$

$\mu_{limite} = 0.8.\ \alpha_l(1-0.4\alpha_l)$ ou $\alpha_{limite} = \varepsilon_{bc}/\ \varepsilon_{bc}+\ \varepsilon_e$ et $\varepsilon_e=f_e/E_S.\ \varphi_S$

$\mu < \mu_{limite}$ section avec armatures comprimées :

$\varepsilon_s = (1-\alpha/\alpha)\ .\ \varepsilon_{bc}$; $\varepsilon_s' = (1-d'/\alpha d)\ .\ \varepsilon_{bc}$

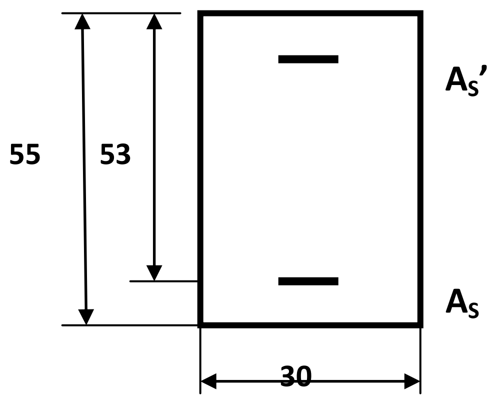
$0.8.b_0.\alpha.d+A_S'\sigma_S'-A_S\ \sigma_s = 0$

$M_u = 0.8.\alpha.d^2.b_0.\sigma_{bc}.(1-0.4.\ d)+\ \sigma_S'\ A_S'.(d-d')$

- **$A_S'= M_u - 0.4.b_0.d^2.\ \sigma_{bc}/\ \sigma_S'.(d-d')$; $\sigma_S' = f_e/\varphi_S$**
- **$A_S = A_S'.\ \sigma_S'+ 0.8.b.d.\sigma_{bc}/\sigma_S$**

Exercice 1:

Soit à déterminer les armatures de la poutre à section rectangulaire (55x30), soumise à un moment de flexion : **M_U = 450 KN.m** et **M_S = 320 KN.m**, sachant que les armatures sont en acier FeE400. Le béton : f_{c28} = 25 MPa, **σ_{bc} = 14.2 MPa**, situation normale **φ_S=1.15** , fissuration très préjudiciable.



Solution :

Etat limite ultime

$\mu = M_r/b_0.d^2.\ \sigma_{bc} = 450.10^6/14.2.300.(530)^2 =$ <u>0.380</u>

calcul de **μ_{limite} : $\mu_{limite} = 0.8.\ \alpha_l(1-0.4\alpha_l)$**

$\alpha_{limite} = \varepsilon_{bc}/\ \varepsilon_{bc}+\ \varepsilon_e$ et $\varepsilon_e= f_e/E_S.\ \varphi_S = 400/2.10^5.1.15 = 1.739‰$; $\varepsilon_{bc}= 3.5‰$

α_{limite} = 3.5/3.5+1.739 = 0.668 → μ_{limite} = 0.668.0.8 (1-0.4.0.668) = <u>0.392</u>

Alors : $\mu < \mu_{limite}$ → $\varepsilon_s > \varepsilon_e$

Les aciers travaillent dans le domaine plastique pivot B, la section est simplement armée.

$A_S = M_u / Z.\ \sigma_S$; $Z = \beta.d$; $\beta = (1-0.4\ \alpha)$; $\varepsilon_s > \varepsilon_{el}$ → $\sigma_s = f_e/\varphi_S$

$\sigma_s = f_e/\varphi_S$ = 400/1.15 = <u>348</u> MPa

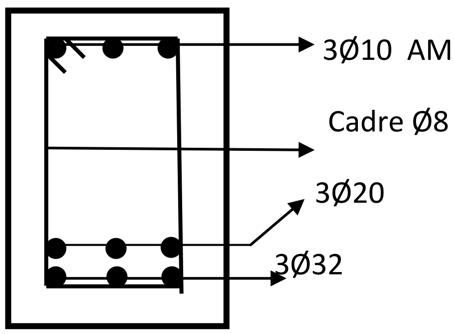
$\beta = (1-0.4\ \alpha)$; $\alpha = 1.25\ (1-\sqrt{1-2\mu}) = 1.25(1- -\sqrt{1-2.0.38}) =$ <u>0.64</u>

β = (1-0.4.0.64) = <u>0.74</u>

Donc : $A_S = M_u / Z.\ \sigma_S = 450.10^6/348.0.74.530 =$ <u>32.97 cm²</u>

Voir dans le tableau des sections et choisir le nombre de barres et leurs diamètres.

3Ø32 = 24.13 + 3Ø20 = 9.42 = 33.55 > 32.97 **<u>Vérifier</u>**



<u>Exercice 2:</u>

Déterminer les armatures de la poutre à section rectangulaire **(65x30)**, soumise à un moment de flexion : **M_U = 700 KN.m** et **M_S = 530 KN.m**, sachant que les armatures.

Aciers FeE400, situation normale **φ_S=1.15**, fissuration préjudiciable

Le béton : **f_{c28} = 20MPa**,

Solution :

Etat limite ultime

$\mu = M_u/b_0.d^2.\ \sigma_{bc}$; $\sigma_{bc} = 0.85.f_{c28}/\theta\ \varphi_b = 0.85.20/1.5 = 11.33$ MPa

$\mu = 700.10^6/300.610^2.11.33 = \underline{0.395}$

Calcul de μ_{limite} : **$\mu_{limite} = 0.8.\ \alpha_l(1-0.4\alpha_l)$**

$\alpha_{limite} = \varepsilon_{bc}/\ \varepsilon_{bc}+\ \varepsilon_e$ et $\varepsilon_e = f_e/E_S.\ \varphi_S = 400/2.10^5.1.15 = 1.739‰_0$; $\varepsilon_{bc} = 3.5‰_0$

$\alpha_{limite} = 3.5/3.5+1.739 = 0.668$ → $\mu_{limite} = 0.668.0.8\ (1-0.4.0.668) = \underline{0.392}$

Alors : $\mu > \mu_{limite}$ → $\varepsilon_s < \varepsilon_e$

Les aciers travaillent dans le domaine plastique pivot B, la section est doublement armée.

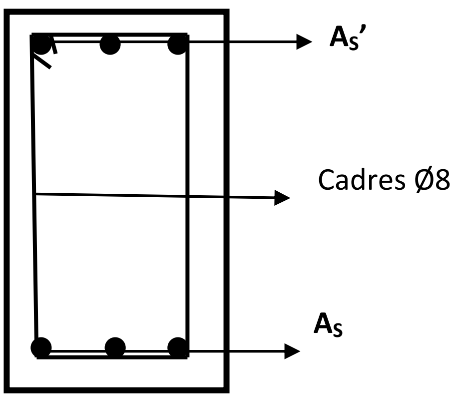
$A_S' = M_u - 0.4.b_0.d^2.\ \sigma_{bc}/\ \sigma_S'.(d-d')$; $\sigma_S' = f_e/\varphi_S = 400/1.15 = 348$MPa

$A_S' = 530.10^6 - 0.4.300.610^2.10.66/348 = 0.24\ cm^2$

$A_S = A_S'.\ \sigma_S' + 0.8.b.d.\sigma_{bc}/\sigma_S = 24.348+0.8.300.610.11.33/348 = 13.10\ cm^2$

D'aprés le tableau:

A_S = 3Ø25 = 14.73 et **A_S' =** 3Ø10 = 3.14



Exercice 3:

Déterminer les armatures de la poutre à section rectangulaire **(60x30**), soumise à un moment de flexion : **M_U = 250 KN.m** et **M_S = 200 KN.m**, sachant que les armatures.

Aciers FeE 500, situation normale **φ_s=1.15**, fissuration préjudiciable

Le béton : **f_{c28} = 25MPa**, **d = 56 cm**

Exercice 4:

Déterminer les armatures de la poutre à section rectangulaire **(55x30**), soumise à un moment de flexion : **M_U = 550 KN.m** et **M_S = 300 KN.m**, sachant que les armatures.

Aciers FeE400, situation normale **φ_s=1.15**, fissuration préjudiciable

Le béton : **f_{c28} = 20 MPa**, **d = 51cm**