7. Vérification des états limites de service en flexion simple

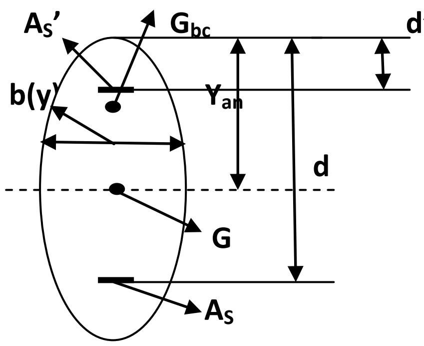
La vérification des ELS en flexion simple se résume à :

- Etat limite de la compression du béton.
- Etat limite de la fissuration du béton qui se traduit par la limitation des contraintes dans l'acier.

7.1 Calcul des contraintes à l'ELS :

La section étant soumise à un moment de service **M_{SER}**, la contrainte à une distance **« y »** de l'axe neutre sera :

$\sigma(y) = (M_{SER} / I).y$ on pose $K = M_{SER} / I$



- **y : Ordonnée du point de calcul de la contrainte**
- **I : Moment d'Inertie par rapport à l'axe neutre**
- **G : Centre de gravité de la section**
- **G_{bc} : Centre de gravité de la partie comprimée**

<u>Remarque :</u>

Pour répondre à l'une des hypothèses de la RDM, on considère que la poutre est constituée d'une section homogène ; pour cela on considère qu'elle est constituée de la section du béton comprimée et des sections de béton équivalentes aux sections d'aciers comptés n fois (**n = 15**) en gardant le même CDG.

Section du béton équivalente aux aciers comprimés = $n.A_S'$

Section du béton équivalente aux aciers tendus = $n.A_S$

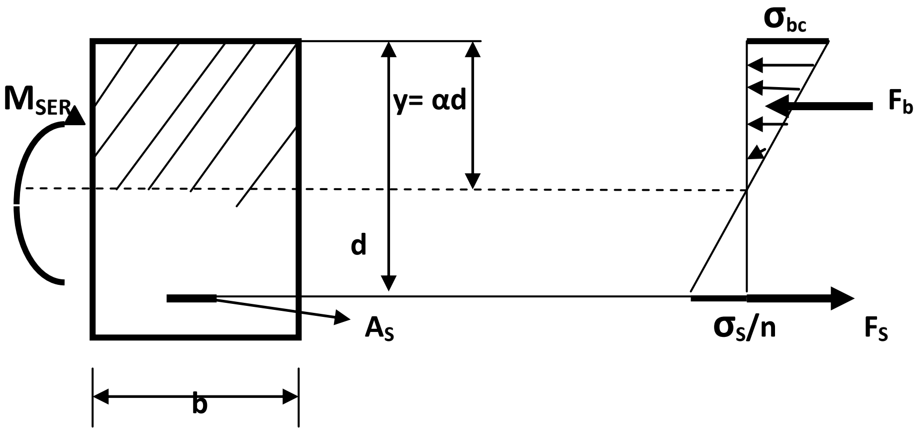
Contrainte max dans le béton comprimé : $\sigma_b = K \cdot y_{an}$ avec $K = M_{SER} / I$

Contrainte max dans les aciers tendus : $\sigma_S = n \cdot K \cdot (d - y_{an})$

7.2 Calcul des sections lorsque l'ELS est le plus défavorable.

Lorsque, après avoir dimensionné la section à l'ELU, la vérification à l'ELS n'est pas assurée, il faut redimensionner la section à l'ELS.

7.2.1 La limitation de la compression vérifiée, la condition de non fissuration non assurée.



Si la condition $\sigma_S \leq \overline{\sigma_S}$ n'est pas vérifier, il faut recalculer A_S en supposant que $\sigma_S = \overline{\sigma_S}$

$\sum F_X = 0 \quad F_b = F_s \quad \rightarrow \quad ½\, \sigma_{bc} \,.\, b.\, y - A_S \,.\, \overline{\sigma}_s$ **(1)**

$\sum M/A_S = 0 \quad \rightarrow \quad M_{SER} - ½\, \sigma_{bc} \,.\, b.\, y.\, (d-y/3) = 0$ **(2)**

En (1) et (2) on a 3 équations **(A_S , σ_{bc} , y)**

Le diagramme des contraintes nous permet d'écrire :

$\sigma_{bc}/y = (\overline{\sigma}_s/n)/d-y \quad \rightarrow \quad \sigma_{bc} = (\overline{\sigma}_s/n).[\,\alpha/1-\alpha\,]$ **(3)**

avec $y = \alpha d \quad \rightarrow \quad M_{SER} - ½\,.\,(\overline{\sigma}_s/n).[\,\alpha/1-\alpha\,].\, b.\, \alpha d.\, (d- \alpha d /3)$

En combinant les équations (**1) et (2),** on aura une équation du 3éme degrés en fonction de **α** :

$\overline{\sigma}_s \,.\, \alpha^3 - 3\,\overline{\sigma}_s \,.\, \alpha^2 - (6n.\, M_{SER}/bd^2).\alpha + (6\, n.\, M_{SER}/bd^2) = 0$ **(4)**

$M_{SER} = \overline{\sigma}_s/90.b.y^{2.}(3d-y)/(d-y) \quad \rightarrow \quad by^2 + 30.(A_S+A_S').y - 30(A_S.d + A_S'.d') = 0$

$I = 1/3.b.y^3+15[A_S(d-y)^2 + A_S'(y-d')^2]$ **Moment d'inertie**

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{M_{SER} - \frac{1}{2}\,\sigma_{bc}\,.\,b.\,y.\,(d-y/3) = 0 \quad (2)} \\ \mathbf{\sigma_{bc} = (\overline{\sigma}_s/n).[\,\alpha/1-\alpha\,] \quad (3)} \end{array}\right\} \quad \mathbf{M_{Ser} - (\overline{\sigma}_s/n).[\,\alpha/1-\alpha\,].by/2(d-y/3) = 0}$$

On développant ces équations on arrive à :

$$\mathbf{\overline{\sigma}_s\,\alpha^3 - 3\overline{\sigma}_s\,\alpha^2 - 6n(M_{SER}/bd^2)\,\alpha + 6n(M_{SER}/bd^2) = 0}$$

$$\mathbf{\alpha = 1+2\sqrt{\lambda}\,.\,\cos(240°+\zeta/3)} \quad \textbf{avec} \quad \mathbf{\lambda = 1 + (30\,.\,M_{SER}/bd^2\,\sigma_s)}$$

$$\mathbf{\cos\zeta = 1/\,\lambda\sqrt{\lambda}} \quad \textbf{avec } \zeta \textbf{ en degré}$$

α étant connue, donc :

$\sigma_{bc} = (\overline{\sigma}_s/n).[\,\alpha/1-\alpha\,] \leq 0.6f_{c28}$ doit être vérifier

$A_S\,\overline{\sigma}_s = \frac{1}{2}.\,\sigma_{bc}.b.y \rightarrow A_S = (\sigma_{bc}/\,\overline{\sigma}_s).b.y/2$

Alors : $A_S = (\alpha.b.d)/2\,.\,(\sigma_{bc}/\,\overline{\sigma}_s)$

0n sait que : $\sigma_{bc} = (\sigma_s/n).[\,\alpha/1-\alpha\,] \rightarrow \sigma_{bc}/\,\overline{\sigma}_s = (1/15).(\,\alpha/1-\alpha)$

Ce qui donne :

$$\mathbf{A_S = (bd/30).\,(\alpha^2/1-\,\alpha)}$$

7.2.2 La condition de compression n'est pas vérifiée.

Dans ce cas on propose de redimensionner la section du béton en faisant travailler le béton à son maximum.

c.a.d : $\overline{\sigma}_{bc} = 0.6.f_{c28}$ et les aciers à leur maximum $\sigma_S = \overline{\sigma}_S$

L'équation d'équilibre donne :

$M_{SER} - F_b.\,(d-y/3) = 0$

$M_{SER} - \sigma_{bc}\,.\,b.\,y/2.\,(d-y/3) = 0$

$M_{SER}/bd^Z - (\overline{\sigma}_{bc}/2).\alpha(1-\,\alpha/3) = 0$

$M_{SER}/bd^Z - (0.6.f_{c28}\,/6).\alpha(3-\,\alpha) = 0$

$$\mathbf{bd^2 = 10M_{SER} / f_{c28}.\ \alpha(3-\ \alpha)}$$

$\overline{\sigma}_{bc} / (\overline{\sigma}_s/n) = y/d\text{-}y = \alpha /1\text{-}\ \alpha \quad \rightarrow \quad \overline{\sigma}_{bc}(1\text{-}\ \alpha) = (\overline{\sigma}_s/n)\ \alpha$

$0.6.f_{c28}\ .\ (1\text{-}\ \alpha)\ =\ (\overline{\sigma}_s/n)\ \alpha \quad \rightarrow \quad \alpha\ [(\overline{\sigma}_s/15+ 0.6.f_{c28}]$

$$\mathbf{\alpha = 9.f_{c28} / 9.f_{c28} + \overline{\sigma}_s}$$

La section d'armatures sera:

$A_S\ .\ \overline{\sigma}_s = \overline{\sigma}_{bc}.b.y/2 \quad \rightarrow \quad A_S = (0.6.f_{c28}/2)\ .(b.y)/\ \overline{\sigma}_s$

$$\mathbf{A_S = (0.3f_{c28}.b.d.\ \alpha)/\ \overline{\sigma}_s}$$

Résumé:

Si : $\sigma_{bc} \le \overline{\sigma}_{bc}$ et $\sigma_s \le \overline{\sigma}_s$ → On ne fait pas de vérification à l'ELS, A_S à l'ELU est acceptée

Si : $\sigma_{bc} > \overline{\sigma}_{bc}$ et $\sigma_s \le \overline{\sigma}_s$ → On redimensionne la section du béton

Si : $\sigma_{bc} \le \overline{\sigma}_{bc}$ et $\sigma_s > \overline{\sigma}_s$ → On recalcule la section des armatures A_S

Si : $\sigma_{bc} > \overline{\sigma}_{bc}$ et $\sigma_s > \overline{\sigma}_s$ → On redimensionne la section du béton

<u>Exercice 1:</u>

Soit à déterminer les armatures de la poutre à section rectangulaire **(71x30)**, soumise à un moment de flexion : **M_U = 450 KN.m** et **M_S = 500 KN.m**, sachant que les armatures sont en acier **FeE400**, situation normale **φ_S=1.15** , fissuration préjudiciable. Le béton : **f_{c28} = 25 MPa**, **σ_{bc} = 14.2 MPa**.

Solution :

1) **Calcul à l'ELU :**
   Le calcul donne une section simplement armée , pivot A donc : $A_S = 19.10\ cm^2$; $A_S' = 0$
2) **Calcul à l'ELS :**
   Vérification des contraintes,

$$\sigma_b = K \cdot y_{an} \quad \text{avec} \quad K = M_{SER} / I \quad ; \quad \sigma_S = n \cdot K \cdot (d - y_{an})$$

c.a.d : le béton : $\overline{\sigma}_{bc} = 0.6.f_{c28}$

les aciers : $\sigma_S = \overline{\sigma}_S =$ min {2/3.f_e . max (240 mpa ; $\sqrt{110\eta \cdot f_{t28}}$)} fissuration préjudiciable

Alors : y est donné par la formule :

Y_{an}= racine de **$by^2 + 30.(A_S+A_S').y - 30(A_S.d + A_S'.d') = 0$**

Vu que $A_S' = 0$ l'équation devient : **$30y^2 + 30.A_S.y - 30.A_S.d = 0$**

$30y^2 + 573y - 40683 = 0 \rightarrow$ $\underline{Y = 28.49\ cm}$

Le moment d'inertie de la section :

$$I = 1/3.b.y^3+15[A_S(d-y)^2 + A_S'(y-d')^2] \quad \text{avec } A_S' = 0$$

$$I = 1/3.b.y^3+15[A_S(d-y)^2] \quad \text{on remplace : } I = 748981.84\ cm^4$$

$$K = M_{SER} / I = 500.10^6/748981.84 = 0.0668\ N/mm^3$$

$$\sigma_S = n.K.(d - y_{an}) = 15.0.0668(710 - 284.9) = \underline{425.95\ MPa}$$

$$\sigma_b = K \cdot y_{an} = 0.00668.284.9 = \underline{19.03\ MPa}$$

<u>Vérification :</u>

$\overline{\sigma}_{bc}$ = 0.6.f_{c28} = 0.6.25 = **15 MPa**

$\overline{\sigma}_S$ = min {2/3.f_e . max (240 mpa ; $\sqrt{110\eta \cdot f_{t28}}$)} = min(2/3.400.(240 ;110$\sqrt{1.6.2.1}$) = **240 MPa**

<u>Conclusion :</u>

σ_{bc}= 19.03 MPa > $\overline{\sigma}_{bc}$ = 15MPa non vérifier

σ_S = 425.95 MPa > $\overline{\sigma}_S$ = 240 MPa non vérifier

Il faut donc redimensionner la section du béton

Pour : $\boldsymbol{\sigma_{bc} = 0.6.\ f_{c28}}$ **et** $\boldsymbol{\sigma_S = \overline{\sigma}_S}$

On a : $\boldsymbol{bd^2 = 10M_{SER}\ /f_{c28}.\ \alpha(3-\ \alpha)}$ avec $\boldsymbol{\alpha = 9.f_{c28}\ /9.f_{c28} + \overline{\sigma}_s = 9.25/9.25+240 =}$ $\underline{\boldsymbol{0.484}}$

$\boldsymbol{bd^2 = 10M_{SER}\ /f_{c28}.\ \alpha(3-\ \alpha) = 10.500.10^6/25.0.484.(3-0.484) =}$ $\underline{\boldsymbol{16423.132\ cm^3}}$

0n garde b = 30 cm → <u>d = 74 cm</u>

La section d'armature devient :

$\boldsymbol{A_S = (0.3f_{c28}.b.d.\ \alpha)/\ \overline{\sigma}_s = O.3.25.300.740.0.484/240 =}$ $\underline{\boldsymbol{33.55\ cm^2}}$

On peut choisir: **3Ø32 + 3Ø20 = 33.58 cm²**

<u>Exercices:</u>

Reprendre les exercices 2, 3, 4 de la partie flexion simple ELU et faire le calcul à l'ELS.