

**École des Ponts**  
ParisTech

**DYNAMIQUE DES STRUCTURES  
ET DES OUVRAGES**

**Alain PECKER**

Edition 2017

## CHAPITRE 1

### NOTIONS GENERALES

#### 1.1 INTRODUCTION

Un phénomène d'origine dynamique se caractérise par une sollicitation variant à la fois dans le temps et dans l'espace, dans lequel les forces d'inertie, produit de la masse par l'accélération, jouent un rôle significatif dans la réponse. Par abus de langage, le terme "chargement dynamique" est souvent et improprement attribué à des phénomènes dont la seule caractéristique est d'être variable dans le temps; si la vitesse de chargement est lentement variable, l'accélération est faible et les forces d'inertie ne représentent plus une part significative de la réponse. De tels phénomènes sont qualifiés de cycliques, si la charge est alternée, ou de quasi-statique monotone. A titre d'exemple, on citera :

- phénomène quasi-statique monotone: mise en charge lente d'une structure par une force  $P(t)$  croissante (figure 1.1a) dans lequel  $P(t)$  varie "lentement"; les seules forces appliquées à la poutre sont, outre la force  $P(t)$ , les réactions  $R(t)$  aux points d'appuis, elles aussi variables dans le temps;
- phénomène dynamique : impact de la structure résultant par exemple d'une chute de missile, produisant une force  $P(t)$ ; les forces appliquées sont alors la force  $P(t)$ , les réactions  $R'(t)$  aux points d'appuis et les forces d'inertie  $f_i(t)$  dépendant de la répartition des masses et des accélérations dans la structure (figure 1.1b);
- chargement cyclique : sollicitation de la structure de la figure 1.1a par une force lentement croissante, puis décroissante; c'est le cas de l'action de la houle sur une plate-forme offshore;
- chargement dynamique alterné : la force  $P(t)$  varie rapidement de façon croissante, puis décroissante comme dans le cas d'une machine vibrante posée sur la structure de la figure 1.1a. Ce type de chargement est également celui induit par une sollicitation sismique imposée à la structure.

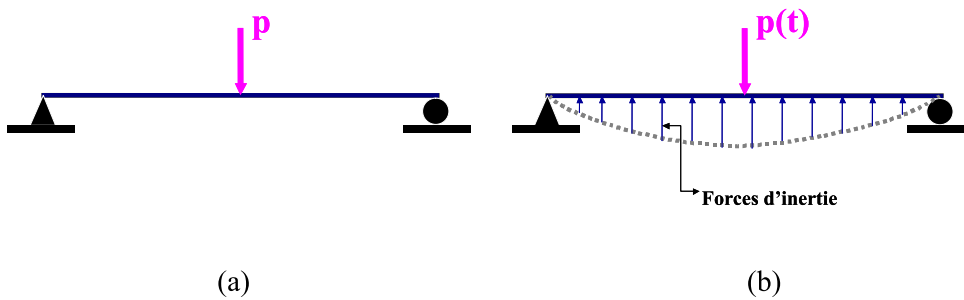


Figure 1.1 : Chargement d'une poutre

## 1.2 CARACTERISATION DES ACTIONS

Les actions agissant sur les structures peuvent être classées en sollicitations déterministes et aléatoires, suivant le degré de connaissance de celles-ci, et pour les sollicitations déterministes en actions périodiques, impulsives ou entretenues suivant leur forme de variation dans le temps.

A chaque type d'action correspond un mode de caractérisation et une méthode de résolution la mieux appropriée.

### 1.2.1 CHARGEMENT DETERMINISTE

Si le chargement appliqué est parfaitement défini par sa variation temporelle et spatiale, le chargement est qualifié de déterministe. Un tel chargement peut être :

- i) Périodique si le diagramme de chargement se reproduit à l'identique au bout d'une durée  $T$ , appelée période de la sollicitation.  
 Parmi les chargements périodiques, on distinguera les chargements harmoniques et les chargements anharmoniques.  
 Un chargement harmonique est typiquement celui engendré par une machine tournante (figure 1.2). La sollicitation est définie par son amplitude  $A$ , et sa pulsation  $\omega$ . Elle est décrite par une fonction sinusoïdale :

$$(1.1) \quad y(t) = A \sin(\omega t)$$

On verra dans la suite du cours qu'il est souvent pratique de définir les sollicitations harmoniques sous la forme d'une fonction complexe

$$(1.2) \quad y(t) = \rho e^{i\omega t}$$

où bien évidemment seule la partie réelle de l'équation (1.2) a une signification. Dans l'équation (1.2)  $\rho$  est un nombre complexe.

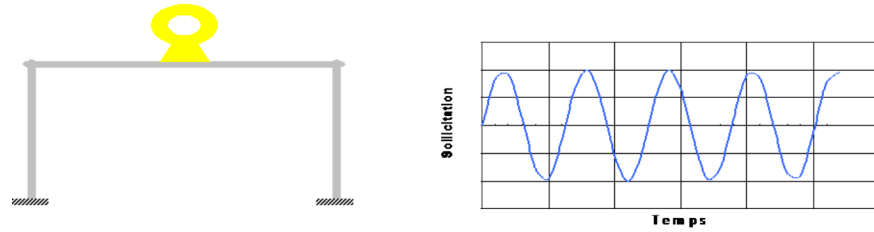


Figure 1.2 : Chargement harmonique

Le chargement peut être également périodique, sans être harmonique; on le qualifie d'anharmonique. Ce type de chargement est celui engendré, par exemple, par un propulseur de navire (figure 1.3). L'analyse de Fourier nous indique que le chargement peut être exprimé comme une somme de chargements harmoniques caractérisés chacun par une amplitude  $A_j$  et une pulsation  $\omega_j$ . Reprenant la formulation de l'équation (1.2) un tel chargement s'écrit sous la forme d'une somme d'harmoniques :

$$(1.3) \quad y(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_j e^{i(j\omega_0 t)}$$

où  $\omega_0$  est la pulsation de l'harmonique fondamentale.

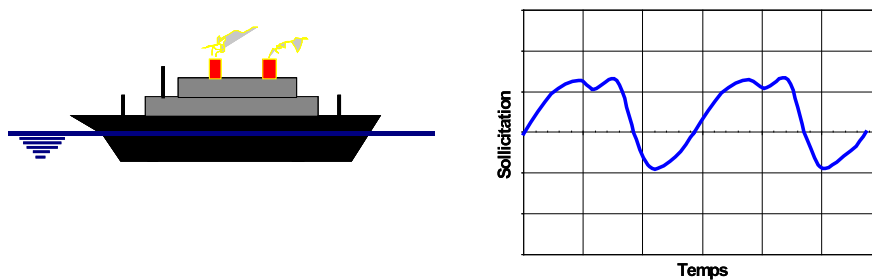


Figure 1.3 : Chargement périodique anharmonique

- ii) non périodique, de type impulsif ou entretenu; le chargement ne se reproduit pas à l'identique après un intervalle de temps  $T$ .  
Le chargement impulsif est caractérisé par une sollicitation de faible durée totale, telle celle induite par le front d'une onde de choc heurtant la structure (figure 1.4). Par

faible durée, il faut entendre une sollicitation dont la durée est petite en regard de la période de vibration de la structure.

Un tel chargement est défini par sa variation temporelle

$$(1.4) \quad y(t) = f(t)$$

Si l'on ne s'intéresse qu'à la réponse maximale de la structure sous l'effet de cette impulsion, on verra qu'il est possible de caractériser ce chargement à l'aide d'une quantité simplifiée, appelée spectre de choc. Le spectre de choc définit le déplacement maximal d'une structure simplifiée (oscillateur à 1 degré de liberté; cf. chapitre 2) soumis au chargement (1.4).

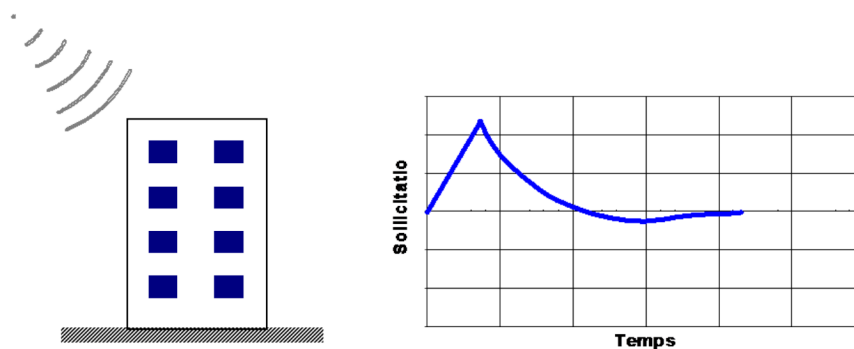


Figure 1.4: Chargement impulsif

Le chargement entretenu peut être défini comme le chargement résultant d'une succession d'impulsions. C'est typiquement le cas d'une sollicitation sismique si l'accélération du sol est connue de façon déterministe (figure 1.5).

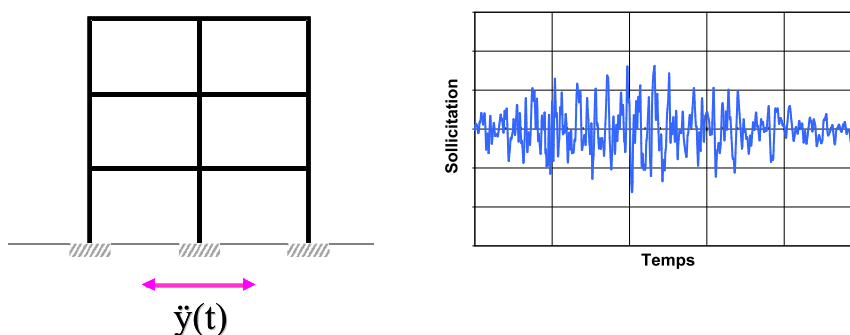


Figure 1.5 : Sollicitation entretenu

Par opposition au chargement impulsif, la durée totale de la sollicitation est grande vis-à-vis de la période propre de la structure. Typiquement une sollicitation non périodique entretenue peut être définie à l'aide d'une équation du type (1.4). On verra cependant que des méthodes de résolution avantageuses des équations du mouvement font appel à l'analyse fréquentielle pour laquelle la sollicitation est définie par son spectre de Fourier, qui n'est autre que l'analogie de l'équation (1.3) pour une fonction non périodique.

$$(1.5) \quad y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

De façon similaire à la sollicitation impulsive, si l'on ne s'intéresse qu'à la réponse maximale de la structure, la sollicitation pourra être définie par son spectre de réponse qui caractérise le déplacement maximal d'une structure à 1 degré de liberté soumise à la sollicitation (1.4) représentée sur la figure 1.5.

## 1.2.2 CHARGEMENT ALEATOIRE

Beaucoup des chargements sollicitant les structures de Génie Civil ne peuvent être définis de façon déterministe par une équation du type (1.4). Ils ne sont généralement connus que par leur valeur moyenne. Il s'agit typiquement des mouvements vibratoires engendrés par le trafic ferroviaire ou routier (figure 1.6), le vent.... La sollicitation est dite aléatoire et est représentée par sa densité spectrale de puissance.

$$(1.6) \quad \text{DSP}(\omega) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\left| \int_{-s/2}^{+s/2} y(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2}{2\pi s}$$

La réponse de la structure à des chargements aléatoires, fait l'objet de la dynamique stochastique qui ne sera pas abordée dans ce cours.

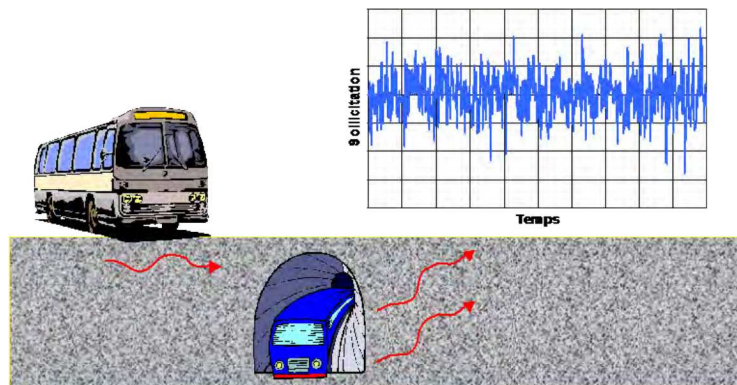


Figure 1.6 : Chargement aléatoire

### 1.3 MISE EN EQUATION D'UN PHENOMENE DYNAMIQUE

La mise en équation d'un problème dynamique est l'une des étapes les plus délicates de l'analyse de la réponse d'une structure. Plusieurs techniques, qui seront utilisées indifféremment dans la suite du cours, sont résumées ci-après. Elles font appel soit à des quantités vectorielles, soit à des grandeurs scalaires.

#### 1.3.1 FORMULATION DIRECTE

Cette formulation consiste à identifier le torseur des efforts qui s'exerce sur la structure à étudier et à écrire qu'il est égal à la variation de la quantité de mouvement du système; cette formulation est connue sous le nom de seconde loi de Newton, ou *loi fondamentale de la dynamique*. Généralement ce torseur comporte six composantes : les forces suivant les trois directions des axes du référentiel et les moments autour des trois axes.

Désignant par  $\underline{p}(t)$  le torseur des efforts appliqués à une masse  $M$  animée d'une vitesse

$\underline{v} = \frac{d\underline{u}}{dt}$ , la quantité de mouvement est égale à  $M\underline{v}$  et le théorème de la quantité de mouvement fournit l'équation :

$$(1.7) \quad \underline{p}(t) = \frac{d}{dt} \left( M \frac{d\underline{u}}{dt} \right) = M \frac{d^2 \underline{u}}{dt^2} \equiv M \underline{\ddot{u}}(t)$$

soit

$$(1.8) \quad \boxed{\underline{p}(t) - M \underline{\ddot{u}}(t) = 0}$$

La quantité  $M \underline{\ddot{u}}$  représente la force d'inertie agissant sur le système. Elle est égale au produit de la masse par l'accélération.

L'écriture (1.8) de l'équation d'équilibre dynamique du système est connue sous le nom de *principe d'Alembert* qui s'énonce :

L'équilibre dynamique satisfait l'équation dans laquelle le torseur des efforts appliqués, diminué des forces d'inertie, est égal à 0.

L'introduction d'un torseur d'effort complémentaire, égal à l'opposé du produit de la masse par l'accélération, permet d'écrire les équations générales d'équilibre de façon analogue à celle d'un problème statique.

L'équation (1.8) est en fait un système de N équations associées chacune à un degré de liberté de la masse M. En général N=6, trois translations et trois rotations. Suivant le degré de liberté considéré, M désigne la masse ou l'inertie massique en rotation, parfois désignée J.

La méthode directe est bien adaptée à la formulation des équations d'équilibre de systèmes discrets dans lesquels les masses sont concentrées en des points de la structure; la difficulté réside dans l'évaluation correcte du torseur  $\underline{p}(t)$  qui résulte des liaisons et interactions entre masses.

### 1.3.2 METHODE DES PUISSANCES VIRTUELLES

Cette méthode est particulièrement bien adaptée à la mise en équation des milieux continus pour lesquels masse et raideur sont distribuées dans tout le système. On trouvera dans Salençon (2001) un traitement complet du Principe des Puissances Virtuelles dont seules les grandes lignes sont rappelées ci-dessous. Cette méthode se révèlera particulièrement utile dans la deuxième partie du cours lorsqu'on abordera l'étude des propagations d'ondes dans les poutres ou les milieux infinis.

La loi fondamentale de la dynamique, écrite sous forme dualisée sur l'espace vectoriel des mouvements virtuels, exprime que la somme des puissances virtuelles des efforts extérieurs et des efforts intérieurs est égale à la puissance virtuelle des quantités d'accélération dans tout mouvement virtuel  $\hat{\underline{U}}$  du système:

$$(1.9) \quad \boxed{\mathcal{P}_i(\hat{\underline{U}}) + \mathcal{P}_e(\hat{\underline{U}}) = \mathcal{A}(\hat{\underline{U}})}$$

Les efforts extérieurs au système étant modélisés par des densités volumiques de forces  $\underline{F}(\underline{x}, t)$  et des densités surfaciques de force à son contour  $\underline{T}(\underline{x}, t)$ , la puissance des efforts extérieurs s'écrit:

$$(1.10) \quad \mathcal{P}_e(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega} \rho(\underline{x}, t) \underline{F}(\underline{x}, t) \cdot \hat{\underline{U}}(\underline{x}) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \underline{T}(\underline{x}, t) \cdot \hat{\underline{U}}(\underline{x}) \, da$$

La puissance des efforts intérieurs s'exprime à l'aide du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$  et du taux de déformation virtuel  $\hat{\underline{\underline{d}}}(\underline{x}, t)$ :

$$(1.11) \quad \mathcal{P}_i(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega} -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \hat{\underline{\underline{d}}}(\underline{x}, t) \, d\Omega$$

Dans le cas particulier où le mouvement virtuel  $\hat{\underline{U}}$  est égal au mouvement réel on en déduit le théorème de l'énergie cinétique:



$$(1.12) \quad \boxed{\mathcal{P}_i(\underline{U}) + \mathcal{P}_e(\underline{U}) = \mathcal{A}(\underline{U}) = \frac{d}{dt} K(\underline{U})}$$

où  $K(\underline{U})$  désigne l'énergie cinétique du système:

$$(1.13) \quad K(\underline{U}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\underline{x}, t) \underline{U}^2(\underline{x}, t) d\Omega$$

### 1.3.3 FORMULATION ENERGETIQUE - PRINCIPE DE HAMILTON

Cette formulation, à l'opposé de la méthode directe, ne fait intervenir que des grandeurs scalaires. Elle peut être obtenue à partir du Principe des Puissance Virtuelles en regroupant les efforts intérieurs et extérieurs en un champ de force  $\underline{F}$  dont on admet qu'il dérive d'un potentiel  $V$ ; contrairement au PPV on fait donc une hypothèse sur le chargement du système (forces extérieures) et sur sa loi de comportement (forces intérieures).

Désignant par  $T$  l'énergie cinétique du système,  $V$  son énergie potentielle définie par  $\underline{F}_c = -\text{grad} V$  où  $\underline{F}_c$  représentent les forces conservatives,  $W_{nc}$  le travail des forces non conservatives, telles les forces d'amortissement, le principe de Hamilton stipule que pour tout intervalle de temps  $[t_1, t_2]$

$$(1.14) \quad \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0}$$

où  $\delta$  désigne une variation arbitraire des quantités.

Les équations de **Lagrange** qui représentent une autre forme bien connue de mise en équation d'un système peuvent se déduire du principe de Hamilton.

Dans la formulation de Lagrange, les énergies cinétique et potentielle, ainsi que le travail des forces non conservatives sont exprimées en fonction de coordonnées, dites généralisées, du système. Le choix de ce système de coordonnées généralisées,  $q_i = 1, \dots, n$ , permet de faciliter la description de la cinématique du système.

$$T = T(q_i, \dot{q}_i) \quad , \quad V = V(q_i) \quad , \quad \delta W_{nc} = \sum Q_i \delta q_i$$

où  $\dot{q}_i$  désigne la dérivée par rapport au temps de  $q_i$ .

Le principe de Hamilton (1.14) s'écrit alors :

$$(1.15) \quad \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i - \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i + Q_i \delta q_i \right) dt = 0$$

En intégrant par parties le terme

$$(1.16) \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

et en reconnaissant que le premier terme du membre de droite est nul, puisque  $\delta q_i$  est nul à  $t_1$  et  $t_2$ , il vient

$$(1.17) \quad \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_i \left[ -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i \right] \delta q_i \right) dt = 0$$

qui doit être valable pour toute variation arbitraire  $\delta q_i$ . Il en résulte :

$$(1.18) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i}$$

qui constituent les équations de Lagrange du système.

### Exemple d'application

Considérons le pendule de la figure 1.7 constitué de 2 masses  $m_1$  et  $m_2$  reliées par des barres rigides de longueur  $L_1$  et  $L_2$ . La description de la cinématique du système est aisément obtenue en retenant comme coordonnées généralisées les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  que forment les barres avec la verticale.

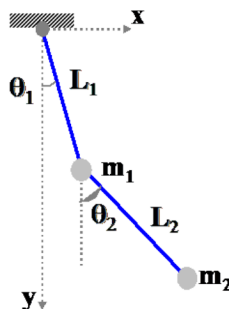


Figure 1.7 : Pendule

Dans le référentiel indiqué sur la figure 1.7, les coordonnées  $(x_i, y_i)$  des deux masses s'expriment par :

$$(1.19a) \quad \begin{aligned} x_1 &= L_1 \sin(\theta_1) & y_1 &= L_1 \cos(\theta_1) \\ x_2 &= L_1 \sin(\theta_1) + L_2 \sin(\theta_2) & y_2 &= L_1 \cos(\theta_1) + L_2 \cos(\theta_2) \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$(1.19b) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) & \dot{y}_1 &= -L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) \\ \dot{x}_2 &= L_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + L_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2) & \dot{y}_2 &= -L_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) - L_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2) \end{aligned}$$

Les énergies cinétique et potentielle s'écrivent :

$$(1.20a) \quad T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$(1.20b) \quad V = (m_1 + m_2) g L_1 (1 - \cos \theta_1) + m_2 g L_2 (1 - \cos \theta_2)$$

où  $g$  désigne l'accélération de la pesanteur.

En reportant les équations (1.19a) et (1.19b) dans (1.20a) et (1.20b), les quantités  $T$  et  $V$  sont exprimées en fonction des variables généralisées  $q_1 = \theta_1$ ,  $q_2 = \theta_2$ .

Les équations de Lagrange (1.18), après calcul des dérivées, conduisent aux deux équations différentielles régissant l'équilibre dynamique du système

$$(1.21a) \quad \begin{aligned} (m_1 + m_2) L_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ - m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + (m_1 + m_2) g L_1 \sin \theta_1 = 0 \end{aligned}$$

$$(1.21b) \quad \begin{aligned} m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 L_1 L_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ + m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 g L_2 \sin \theta_2 = 0 \end{aligned}$$

L'exemple ci-dessus illustre la puissance des méthodes énergétiques pour la mise en équation de systèmes complexes. La méthode directe appliquée au même système est de mise en œuvre beaucoup plus lourde et peut être source d'erreurs.

#### 1.3.4 CONCLUSION

Il convient de réaliser que toutes les méthodes exposées ci-dessus sont équivalentes et conduisent aux mêmes équations d'équilibre. Le choix de la méthode la mieux appropriée dépend du problème à traiter.

La méthode directe est plus intuitive mais se révèle de mise en œuvre difficile pour les systèmes complexes du fait de l'utilisation de grandeurs vectorielles.

La méthode énergétique, du fait de l'utilisation de grandeurs purement scalaires, ou celle des puissances virtuelles se révèlent très puissantes et simples de mise en œuvre. Elles constituent le fondement des méthodes numériques, telle la méthode des éléments finis.

## 1.4 MODÉLISATION EN DYNAMIQUE

L'analyse d'un problème dynamique est complexe du fait que les forces d'inertie proviennent des déplacements de la structure qui sont eux-mêmes reliés aux forces d'inertie. Il en résulte que l'équation d'équilibre dynamique est régie par un système d'équations différentielles, du 2<sup>ème</sup> ordre, comme on l'a vu au paragraphe 1.3 (éq. 1.8 ou 1.12). Si de plus la masse du système est répartie continûment, les déplacements et accélérations doivent être calculés en tout point; l'équilibre dynamique est régi par un système d'équations aux dérivées partielles qui est obtenu, par exemple, à partir de la formulation du principe des puissances virtuelles (éq. 1.9).

Toutefois, la modélisation d'une structure peut permettre des simplifications importantes représentant une approximation suffisante d'un point de vue pratique de la solution exacte du problème. Ces simplifications sont illustrées ci-après sur la structure simplifiée de la figure 1.1a représentant une poutre avec une densité de masse au mètre linéaire  $m(x)$ .

### 1.4.1 MODELISATION EN MASSES CONCENTREES

S'il est possible de concentrer la masse de la poutre en un nombre fini, restreint de points, appelés nœuds, une simplification importante est introduite car les forces d'inertie n'existent qu'en ces points (figure 1.8).

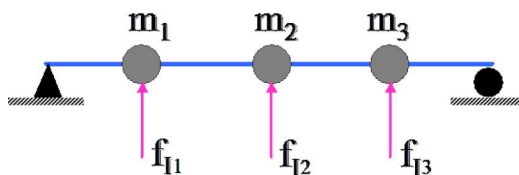


Figure 1.8 : Modélisation en masses concentrées

Dans ce cas, il est suffisant d'exprimer les déplacements et accélérations aux nœuds de la structure. Le nombre de composantes du déplacement nécessaire pour décrire complètement

le champ de forces d'inertie est appelé *nombre de degrés de liberté dynamiques* du système. Si dans l'exemple de la figure 1.8, les seuls déplacements possibles des nœuds sont les déplacements verticaux, la structure comporte  $3 \times 1 = 3$  degrés de liberté. Dans le cas le plus général, les nœuds de la structure possèdent une masse et une inertie massique en rotation et peuvent subir des translations et des rotations dans l'espace; chaque nœud possède 6 degrés de liberté et la structure  $6N$  degrés de liberté, où  $N$  est le nombre de nœuds.

La modélisation en masses concentrées est très utile pour les systèmes dans lesquels une grande partie de la masse est effectivement concentrée à certains emplacements : c'est le cas par exemple des bâtiments où la masse principale se situe aux niveaux des planchers; la masse de la structure porteuse (poteaux, voiles) peut alors être, avec une approximation suffisante, répartie aux niveaux des planchers (pour moitié au niveau inférieur et pour moitié au niveau supérieur).

#### 1.4.2 DEPLACEMENTS GENERALISES

Il est évident, par passage à la limite du cas précédent, que le système de la figure 1.1 possède un nombre infini de degrés de liberté. Il existe cependant une approche alternative permettant de réduire le nombre de degrés de liberté. Cette approche est fondée sur l'hypothèse que la déformée de la structure peut être représentée par la somme de fonctions représentant chacune une déformée possible du système. Ces fonctions sont appelées déplacements généralisés de la structure.

La figure 1.9 illustre cette proposition.

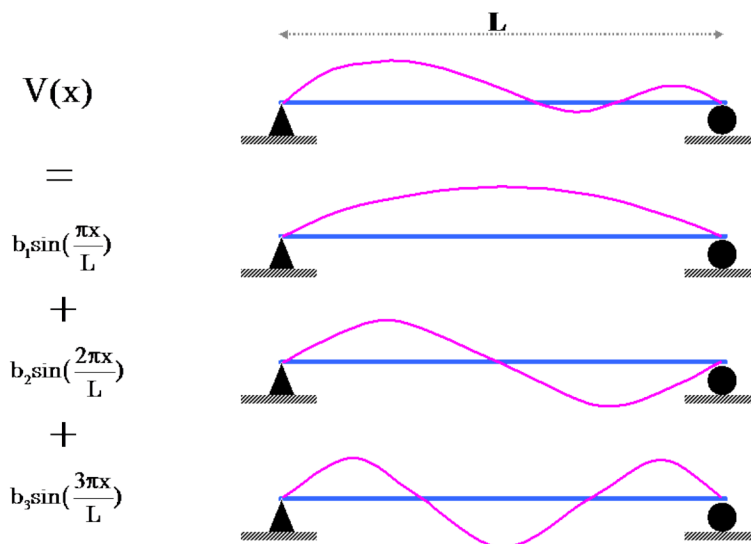


Figure 1.9 : Déplacements généralisés

Dans ce cas, la déformée de la structure peut être exprimée par une somme infinie de série trigonométriques :

$$(1.22) \quad v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right)$$

Les quantités  $b_n$  représentent les coefficients de la série trigonométrique de Fourier et peuvent être assimilées aux coordonnées du système. Dans cet exemple, le nombre infini de degrés de liberté de la poutre est représenté par un nombre infini de déplacements généralisés (les termes de la série de Fourier). L'avantage de l'approche est, en limitant le nombre de termes de la série à quelques termes, de permettre une représentation satisfaisante d'un point de vue pratique de la déformée de la poutre.

Ce concept peut être généralisé à toute fonction  $\psi_n(x)$  compatible avec les conditions limites du système, mais choisie arbitrairement.

$$(1.23) \quad v(x) = \sum_n Z_n \psi_n(x)$$

Pour tout ensemble de fonctions  $\psi_n(x)$ , la déformée de la poutre dépend des amplitudes  $Z_n$  qui sont les coordonnées généralisées du système. Cette notion de coordonnées généralisées a été introduite précédemment dans l'établissement des équations de Lagrange d'un système. Le nombre de fonctions  $\psi_n$  représente le nombre de degrés de liberté du système. En règle générale, une meilleure précision de la réponse dynamique d'un système est obtenue avec une modélisation à l'aide de déplacements généralisés qu'avec une modélisation en masses concentrées; toutefois la résolution numérique est plus complexe.

### 1.4.3 MODELISATION ELEMENTS FINIS

Cette approche combine à la fois les avantages de la modélisation en masses concentrées et celle de la modélisation à l'aide de déplacements généralisés. Elle est illustrée sur la figure 1.10. Cette méthode est applicable à tout type de structure et est particulièrement puissante d'un point de vue numérique. Reprenant l'exemple de la figure 1.1, la structure est subdivisée en un nombre arbitraire d'éléments, de dimensions quelconques. Les nœuds du système représentent le système de coordonnées généralisées.

Le déplacement de la structure est exprimé en fonction de ces coordonnées généralisées à l'aide de fonctions de déplacement, de façon similaire à (1.23). Ces fonctions sont appelées fonctions d'interpolation car elles définissent le déplacement entre les nœuds considérés.

En principe, les fonctions d'interpolation peuvent être définies par toute fonction continue satisfaisant les conditions géométriques de déplacement des nœuds.

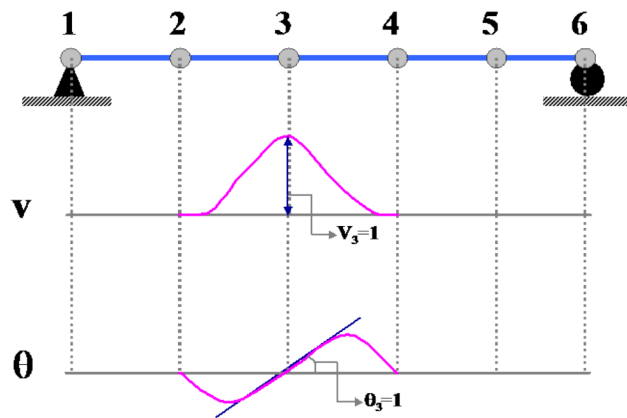


Figure 1.10 : Modélisation éléments finis

Les avantages de la procédure résident dans le fait :

- qu'un nombre arbitraire de nœuds peut être introduit,
- que les calculs sont grandement simplifiés en choisissant des fonctions d'interpolation identiques pour tous les éléments,
- que les équations dynamiques du système sont fortement découplées car le déplacement d'un nœud n'affecte que les nœuds voisins.

La méthode des éléments finis est de loin la méthode la plus puissante pour la résolution des problèmes dynamiques en permettant d'exprimer les déplacements d'une structure quelconque à l'aide d'un ensemble fini de coordonnées.

## 1.5 METHODES DE RÉOLUTION

On ne donnera ici qu'un bref aperçu des méthodes de résolution des équations d'équilibre dynamique d'un système. De plus amples détails seront fournis dans la suite du cours lors des applications.

La méthode de résolution la mieux adaptée, ou la plus efficace, dépend du comportement de l'ouvrage à étudier (linéaire ou non-linéaire) et du mode de définition de la sollicitation appliquée : temporelle (éq. (1.4), fréquentielle (éq. (1.2) ou (1.3)), spectrale (utilisation de spectres de réponse d'un oscillateur à un degré de liberté).

Il convient de réaliser que dans la plupart des applications pratiques, l'obtention d'une solution analytique est inaccessible et que le recours à des méthodes numériques se révèle indispensable.

### 1.5.1 INTEGRATION TEMPORELLE

Il s'agit de loin de la méthode la plus lourde de mise en œuvre; en contrepartie, c'est la méthode la plus générale. Elle consiste à intégrer pas à pas dans le temps les équations du mouvement. Symboliquement, la vitesse et le déplacement à l'instant  $t$  étant connus, le problème consiste à calculer le nouvel état d'équilibre à l'instant  $t+dt$ .

L'intégration temporelle est applicable à tout type de comportement de la structure, qu'il soit linéaire ou non-linéaire. Pour un système non-linéaire, dont les propriétés varient au cours de la sollicitation, c'est la seule méthode applicable.

L'application de la méthode nécessite que la sollicitation soit décrite complètement au cours du temps.

### 1.5.2 INTEGRATION FREQUENTIELLE

La méthode consiste à résoudre les équations du mouvement dans le domaine fréquentiel. La sollicitation est représentée par sa transformée de Fourier (éq (1.3), (1.5) ou (1.6)) et la résolution est effectuée pour chaque harmonique. La solution globale est obtenue par superposition des solutions individuelles, qui s'interprète comme une transformée de Fourier inverse. La méthode n'est bien évidemment applicable qu'aux systèmes linéaires et requiert la définition de la sollicitation par son spectre de Fourier. Avec l'avènement des transformées de Fourier rapide (FFT), la méthode se révèle extrêmement puissante. On verra de plus qu'elle est particulièrement bien adaptée à l'étude des phénomènes d'interaction sol-structure ou fluide-structure; elle est également fondamentale en dynamique stochastique.

### 1.5.3 INTEGRATION MODALE-SPECTRALE

C'est de loin la méthode la plus utilisée en dynamique des structures. L'idée consiste à utiliser comme système de coordonnées généralisées une base particulière constituée par les modes propres de vibration de la structure. Le choix de cette base permet de découpler les équations du mouvement et de ramener le système à la résolution de  $N$  équations différentielles découplées, où  $N$  est le nombre de degrés de liberté du système. L'expérience montre qu'un nombre limité de modes propres,  $p \ll N$ , est suffisant pour obtenir une représentation satisfaisante de la solution qui est égale à la somme des réponses dans chaque mode.

Si de plus seule la réponse maximale, au cours du temps, du système est cherchée, la sollicitation peut être définie de façon simplifiée par son spectre de réponse.

On notera que la méthode de décomposition modale est également applicable pour l'intégration directe des équations du mouvement et l'obtention de la réponse temporelle du



ystème, on parle alors de méthode modale-temporelle. La méthode reste limitée au cas des systèmes linéaires.

#### 1.5.4 SYNTHÈSE

Le tableau ci-dessous permet de résumer les méthodes de résolution applicables suivant la nature du système à analyser et suivant la caractéristique de la grandeur cherchée pour la réponse. Les méthodes sont classées dans l'ordre de facilité de mise en œuvre, de la plus simple à la plus complexe pour chaque configuration.

	<b>Système Linéaire</b>	<b>Système Non-linéaire</b>
Réponse maximale $u_m = \max_t[u(t)]$	Modale - spectrale Modale - temporelle Fréquentielle Intégration directe	Intégration directe
Réponse temporelle $u(t)$	Modale - temporelle Fréquentielle Intégration directe	Intégration directe

Tableau 1.1 - Méthodes de résolution numérique

## CHAPITRE 2

### OSCILLATEUR LINEAIRE A UN DEGRE DE LIBERTE

#### 2.1 DEFINITION

L'oscillateur à 1 degré de liberté est constitué d'un bloc rigide, de masse  $M$  connecté à un support.

La figure 2.1 présente un tel oscillateur, sollicité par une force  $p(t)$  variable dans le temps. Le seul mouvement autorisé pour l'oscillateur est le déplacement horizontal,  $u(t)$ , de la masse. L'oscillateur est connecté à son support par un élément qui développe une force  $F(u, \dot{u})$ , fonction du déplacement et de la vitesse de la masse  $M$ . La relation  $F(u, \dot{u})$  caractérise le comportement de l'oscillateur; la force  $p(t)$  caractérise la sollicitation.

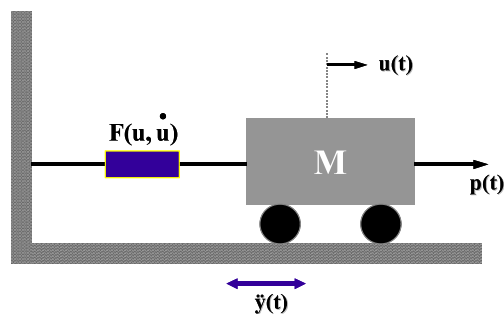


Figure 2.1 : Oscillateur à 1 degré de liberté

#### 2.2 LOI DE COMPORTEMENT DE L'OSCILLATEUR

Cette loi de comportement dépend dans le cas le plus général du déplacement  $u(t)$  de la masse et de sa vitesse  $\dot{u}(t)$  par rapport au support.

La force de rappel  $F$  peut ne dépendre que du déplacement  $u(t)$  (figure 2.2). Si à tout instant il y a proportionnalité entre la force et le déplacement (figure 2.2a), l'oscillateur est élastique linéaire. Ce cas est typiquement celui d'un ressort.

La relation entre la force développée dans la liaison et le déplacement relatif  $u$  des deux extrémités de cette liaison s'écrit simplement :

$$(2.1) \quad F = k.u$$

La dépendance de la force sur le déplacement peut cependant être non linéaire (figure 2.2b); initialement il y a proportionnalité entre force et déplacement (oscillateur élastique linéaire) puis, au-delà d'un certain seuil de déplacement, la relation cesse d'être linéaire; par ailleurs la décharge peut s'effectuer suivant un trajet distinct de la charge. C'est le cas par exemple d'une liaison masse-support constituée d'un assemblage en série d'éléments de ressorts linéaires et de frotteurs de Coulomb (éléments rigides en-deçà d'un certain seuil d'effort puis développant un effort constant au-delà du seuil).

Notons que pour certaines liaisons, il est possible que la décharge s'effectue le long de la même courbe que la charge; l'oscillateur est alors élastique non linéaire. Dans tous les cas, l'oscillateur est dit non linéaire et la relation force-déplacement s'écrit de façon symbolique :

$$(2.2) \quad F = f(U)$$

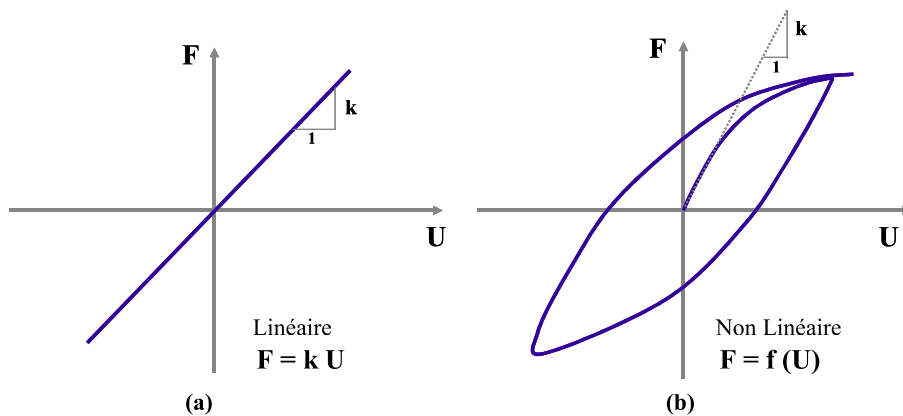


Figure 2.2 : Relation force-déplacement

Dans le présent chapitre on se restreindra au cas de l'oscillateur linéaire caractérisé par une loi de comportement donnée par l'équation (2.1). Le cas de l'oscillateur non linéaire sera étudié au chapitre 5.

Dans les expressions  $F$  de la figure 2.2, le temps n'intervient pas. La relation est la même que le chargement de l'oscillateur soit effectué très lentement ou très rapidement. Si en particulier on considère une liaison constituée d'un seul ressort linéaire et que l'on impose à la masse  $M$  un déplacement initial  $u_0$  avant de la relâcher, celle-ci oscillera indéfiniment avec une amplitude maximale  $u_0$ .

Dans la pratique, on constate que l'amplitude décroît au cours du temps et que la masse retrouve au bout d'un certain temps une position d'équilibre (figure 2.3).

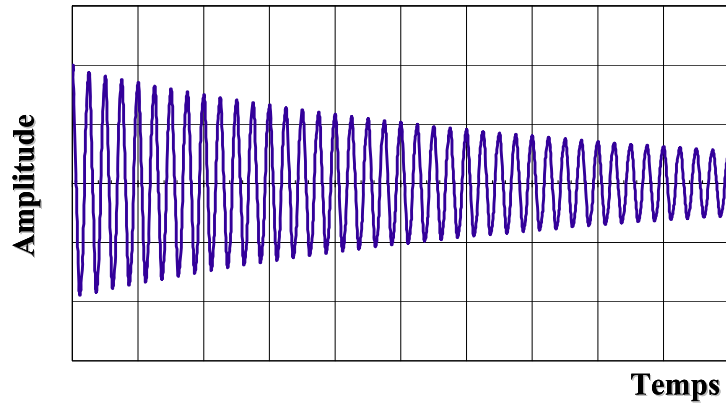


Figure 2.3 : Oscillation libre avec amortissement

Une partie de l'énergie élastique emmagasinée dans le ressort est dissipée au cours du temps; ce phénomène est dénommé de façon générique **amortissement**.

En fait, l'amortissement peut résulter de différents mécanismes. Il peut s'agir d'un amortisseur physique (par exemple un amortisseur hydraulique) auquel on peut avoir recours dans les problèmes d'isolation vibratoire. La dissipation d'énergie peut également provenir d'effets thermiques liés au chargement répété du matériau, de frottements internes dans le matériau (glissements entre grains dans un assemblage de particules par exemple), de déformations d'origine plastique....

En règle générale, et sauf cas exceptionnel, l'amortissement ne peut être calculé à partir des propriétés physiques du système. Par exemple dans le cas d'un bâtiment soumis à une sollicitation sismique significative, les sources de dissipation d'énergie sont multiples : fissuration du béton, plastification des aciers, glissements relatifs entre la structure porteuse et les éléments secondaires (cloisons, baies vitrées...). Dans la pratique, les phénomènes de dissipation d'énergie sont donc caractérisés de façon très simplifiée en considérant qu'ils proviennent d'un amortisseur visqueux linéaire.

Un amortisseur visqueux linéaire est caractérisé par une relation linéaire entre la force développée dans l'amortisseur et la vitesse relative des deux extrémités de celui-ci :

$$(2.3) \quad F = c \dot{u}$$

La constante de proportionnalité  $c$ , caractéristique de l'amortisseur, a pour unités une masse par unité de temps. La description des phénomènes de dissipation d'énergie à l'aide d'un amortisseur équivalent est obtenue en écrivant que l'énergie dissipée dans un cycle de vibration du système est égale à l'énergie dissipée dans un amortisseur linéaire pour un cycle de même amplitude de déplacement.

En se référant à la figure 2.4, considérons un système soumis à un cycle caractérisé par une amplitude maximale du déplacement égale à  $u_{\max}$ . Si au cours de ce cycle on mesure la force nécessaire pour déformer la structure, le diagramme force-déplacement peut être représenté par la courbe limitant l'aire hachurée de la figure 2.4.

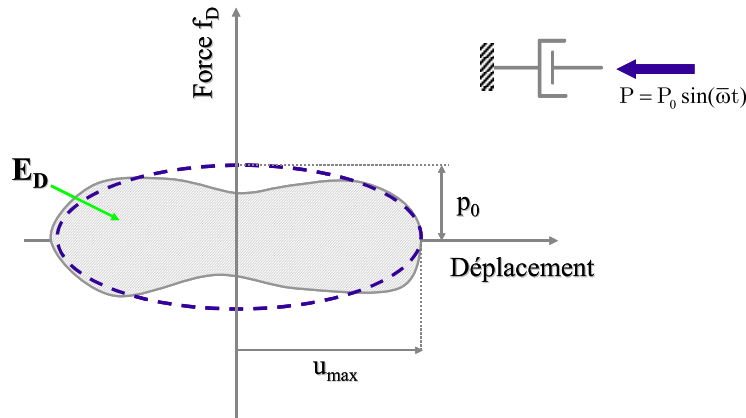


Figure 2.4 : Amortissement équivalent

L'aire de la boucle représente l'énergie  $E_D$  dissipée par la structure au cours d'un cycle de sollicitation.

Considérons maintenant l'amortisseur linéaire de la figure 2.4 soumis à une force harmonique de pulsation  $\bar{\omega}$

$$(2.4) \quad P = P_0 \sin(\bar{\omega}t)$$

Pour ce système, la constante de l'amortisseur  $c$  est donnée par :

$$(2.5) \quad c = \frac{f_{D \max}}{\dot{u}_{\max}} = \frac{P_0}{\bar{\omega}u_{\max}}$$

La courbe effort-déplacement décrite par ce système est représentée par une ellipse, figurée en trait pointillé sur la figure 2.4.

L'énergie dissipée au cours d'un cycle par l'amortisseur linéaire est donnée par :

$$(2.6) \quad E_C = \oint f_D du = \int_0^{\frac{2\pi}{\bar{\omega}}} (c\dot{u}) \dot{u} dt = \pi c \bar{\omega} u_{\max}^2$$

Ecrivant que cette énergie est égale à l'énergie  $E_D$  dissipée par le système, la constante d'amortisseur est donnée par :

$$(2.7) \quad c_{\text{eq}} = \frac{E_D}{\pi \bar{\omega} u_{\text{max}}^2}$$

On notera que l'amortisseur équivalent est inversement proportionnel à la pulsation de la sollicitation. On verra au paragraphe 3.5 une autre façon de caractériser l'équivalence de dissipation d'énergie entre le système et le modèle qui ne fait pas intervenir explicitement la pulsation  $\bar{\omega}$ . La modélisation de l'énergie dissipée dans un système par un amortisseur équivalent se révèle très utile dans la pratique. Tant que les cycles de sollicitations sont d'amplitudes faibles à modérées, l'approximation se révèle satisfaisante. Lorsque l'amplitude de la déformation croît, cette modélisation se révèle inappropriée car les mécanismes de dissipation mis en jeu ont pour origine les déformations plastiques du système et sont très éloignés d'une dissipation visqueuse. La seule représentation fiable de la dissipation d'énergie s'obtient alors à partir de la description de la courbe effort-déplacement décrite lors des cycles de chargement.

## 2.3 EQUATIONS DE L'EQUILIBRE DYNAMIQUE

Suivant les principes exposés au chapitre 1, l'équation d'équilibre dynamique peut être obtenue à partir de trois méthodes : méthode directe, méthode énergétique et principe des puissances virtuelles. Ces trois méthodes sont illustrées ci-après :

### 2.3.1 METHODE DIRECTE

Les forces s'exerçant sur l'oscillateur de la figure 2.5 sont :

- la force extérieure appliquée  $p(t)$ ,
- la force de liaison  $f_s$ , reliée au déplacement  $u$  de la masse; dans le cas d'un système linéaire, cette force est donnée par l'équation (2.1),
- la force de liaison  $f_D$  reliée à la vitesse  $\dot{u}$  de la masse; dans le cas d'un amortisseur visqueux linéaire, cette force est donnée par l'équation (2.3),
- les forces d'inertie  $f_I$  s'exerçant sur la masse  $M$  égales au produit de celle-ci par l'accélération  $\ddot{u}$  de la masse.

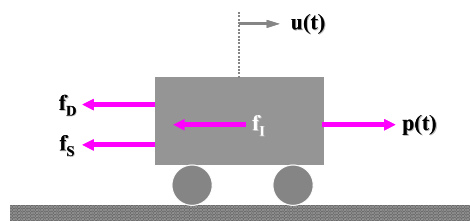


Figure 2.5 : Forces appliquées à l'oscillateur

En écrivant que la résultante de toutes ces forces est nulle :

$$(2.8) \quad f_s + f_D = p(t) - f_i$$

Dans l'équation précédente, on reconnaît le principe d'Alembert; les forces extérieures sont égales aux forces directement appliquées à la masse,  $p(t)$ , diminuées des forces d'inertie  $f_i$ . Ces forces extérieures sont égales aux forces "intérieures",  $f_s + f_D$ , se développant dans la liaison.

Pour un système visco-élastique linéaire, l'équation (2.8) devient en tenant compte de (2.1) et (2.3):

$$(2.9) \quad M\ddot{u} + C\dot{u} + ku = p(t)$$

### 2.3.2 METHODE DES PUISSANCES VIRTUELLES

Considérons une vitesse virtuelle  $\delta\hat{u}$  pour la masse  $M$ . La puissance virtuelle des efforts extérieurs est :

$$(2.10) \quad \mathcal{P}_e(\delta\hat{u}) = p(t) \delta\hat{u}$$

La puissance virtuelle des efforts intérieurs est :

$$(2.11) \quad \mathcal{P}_i(\delta\hat{u}) = -f_s \delta\hat{u} - f_D \delta\hat{u}$$

et la puissance virtuelle des quantités d'accélération est :

$$(2.12) \quad \mathcal{A}(\delta\hat{u}) = M \ddot{u} \delta\hat{u}$$

En écrivant le principe des puissances virtuelles, il vient :

$$(2.13) \quad (-f_s - f_D + p(t)) \delta\hat{u} = M \ddot{u} \delta\hat{u}$$

valable pour toute vitesse virtuelle  $\delta\hat{u}$ . La relation (2.8) en découle de manière triviale.

### 2.3.3 METHODE ENERGETIQUE

L'énergie cinétique du système de la figure 2.1 est donnée par :

$$(2.14) \quad T = \frac{1}{2} M \dot{u}^2$$

Son énergie potentielle, dans le cas d'un système linéaire par :

$$(2.15) \quad V = \frac{1}{2} k u^2$$

Le travail des forces non conservatives est égal au travail des forces appliquées et des forces dissipatives.

$$(2.16) \quad \delta W_{nc} = p(t) \delta u - C \dot{u} \delta u$$

Le principe d'Hamilton permet d'écrire :

$$(2.17) \quad \int_{t_1}^{t_2} [M \dot{u} \delta \dot{u} - k u \delta u] dt + \int_{t_1}^{t_2} [p(t) - C \dot{u}] \delta u dt = 0$$

En intégrant par parties le terme  $\int_{t_1}^{t_2} M \dot{u} \delta \dot{u} dt$ , il vient :

$$(2.18) \quad \int_{t_1}^{t_2} [-M \ddot{u} - C \dot{u} - k u + p(t)] \delta u dt = 0$$

qui est valable pour toute variation  $\delta u$ . L'équation (2.9) en découle immédiatement.

#### 2.3.4 EXEMPLE D'OSCILLATEUR A UN DEGRE DE LIBERTE

L'assemblage de la figure 2.6 constitue un oscillateur à 1 degré de liberté composé de deux barres rigides AB et BC avec une articulation en B, une liaison fixe en A et un appui vertical en C, sans liaison horizontale. La sollicitation est représentée par une force transverse  $p(t)$  appliquée à la barre AB. Les barres sont supportées par des ressorts et amortisseurs. La masse du système est constituée d'une masse distribuée  $m(x) = \bar{m}$  le long de AB et d'une masse ponctuelle M.



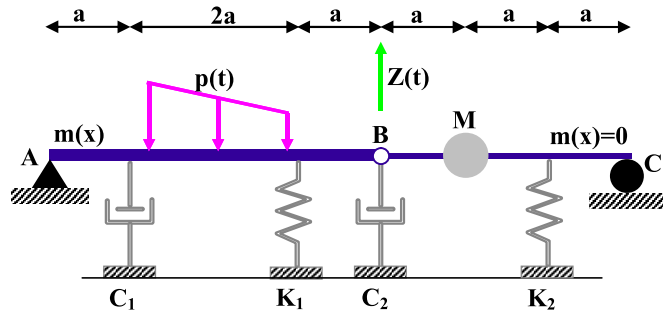


Figure 2.6 : Assemblage de corps rigides

Les deux barres étant supposées rigides, le système ne possède qu'un degré de liberté, le déplacement vertical  $Z(t)$  en B. En raison de la complexité du système, la mise en équation est effectuée plus aisément à l'aide de la méthode des puissances virtuelles.

Les forces s'exerçant sur le système sont :

- les forces élastiques

$$(2.19a) \quad f_{s1} = \frac{3}{4} K_1 Z(t) \quad f_{s2} = \frac{1}{3} K_2 Z(t)$$

- les forces d'amortissement

$$(2.19b) \quad f_{D1} = \frac{1}{4} C_1 \dot{Z}(t) \quad f_{D2} = C_2 \dot{Z}(t)$$

- les forces d'inertie

$$(2.19c) \quad f_{I1} = 2a \bar{m} \ddot{Z}(t) \quad f_{I2} = \frac{2}{3} M \ddot{Z}(t)$$

$$M_{I1} = I_0 \frac{\ddot{Z}(t)}{4a} = \frac{4}{3} a^2 \bar{m} \ddot{Z}(t)$$

où  $I_0$  représente l'inertie massique en rotation de la barre AB et  $\ddot{Z}(t)/4a$  l'accélération angulaire.

- la force extérieure appliquée

$$(2.20) \quad p_1 = \int_{x_1}^{x_2} p(t) dx = 4a \bar{p} \zeta(t)$$

dans le cas où  $p(t) = \bar{p} \zeta(t)$

La puissance des efforts intérieurs s'exprime par :

$$(2.21) \quad \mathcal{P}_i(\delta\hat{u}) = -\frac{3}{4}f_{S1} \delta\hat{u} - \frac{1}{3}f_{S2} \delta\hat{u} - \frac{1}{4}f_{D1} \delta\hat{u} - f_{D2} \delta\hat{u}$$

La puissance des efforts extérieurs vaut :

$$(2.22) \quad \mathcal{P}_e(\delta\hat{u}) = \frac{1}{2}p_1 \delta\hat{u}$$

La puissance des quantités d'accélération vaut :

$$(2.23) \quad \mathcal{A}(\delta\hat{u}) = \frac{2}{3}f_{I2} \delta\hat{u} + \frac{1}{4a}M_{I1} \delta\hat{u} + \frac{1}{2}f_{I1} \delta\hat{u}$$

D'après le principe des puissances virtuelles, tenant compte du fait que la vitesse virtuelle est arbitraire, il vient :

$$(2.24) \quad \left(\frac{4}{3}\bar{m}a + \frac{4}{9}M\right)\ddot{Z}(t) + \left(\frac{1}{16}C_1 + C_2\right)\dot{Z}(t) + \left(\frac{9}{16}K_1 + \frac{1}{9}K_2\right)Z(t) = 2\bar{p}a\zeta(t)$$

L'équation (2.23) peut être écrite sous la forme de l'équation (2.9) de l'oscillateur simple :

$$(2.25) \quad m^* \ddot{Z}(t) + c^* \dot{Z}(t) + k^* Z(t) = p^*(t)$$

avec

$$(2.26) \quad \begin{aligned} m^* &= \frac{4}{3}\bar{m}a + \frac{4}{9}M & c^* &= \frac{1}{16}C_1 + C_2 \\ k^* &= \frac{9}{16}K_1 + \frac{1}{9}K_2 & p^* &= 2\bar{p}a\zeta(t) \end{aligned}$$

dans laquelle  $m^*$ ,  $c^*$ ,  $k^*$  et  $p^*$  représentent la masse généralisée, l'amortisseur généralisé, la raideur généralisée et le chargement généralisé du système.

### 2.3.5 FORMULATION REDUITE DE L'EQUATION D'EQUILIBRE

La mise en œuvre de l'une des trois méthodes exposées ci-dessus conduit à l'équation d'équilibre (2.9) pour l'oscillateur à 1 degré de liberté. Divisant les deux membres de cette équation par  $M$ , on obtient la formulation réduite de l'équation d'équilibre :

$$(2.27) \quad \boxed{\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = \frac{p(t)}{M}}$$

L'écriture précédente montre que l'équation d'équilibre fait intervenir les deux grandeurs fondamentales suivantes caractérisant l'oscillateur :

- **pulsation propre**

$$(2.28) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

ou, de façon équivalente, la fréquence propre

$$(2.29) \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}}$$

ou la période propre

$$(2.30) \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}$$

- **pourcentage d'amortissement critique**

$$(2.31) \quad \xi = \frac{c}{2\sqrt{kM}} = \frac{c}{2M\omega} = \frac{c}{c_c}$$

où  $c_c$  est par définition l'amortissement critique dont la signification physique sera explicitée au paragraphe 4.2.

L'amortissement critique donné par l'équation (2.31) peut également s'exprimer en fonction de la raideur  $k$  en tenant compte de l'équation (2.29).

$$(2.32) \quad c_c = \frac{2k}{\omega}$$

Pour un système linéaire, dont la courbe effort-déplacement est représentée sur la figure 2.7, la raideur  $k$  peut être exprimée en fonction de l'énergie élastique emmagasinée  $E_s$ , égale à l'aire sous la courbe.

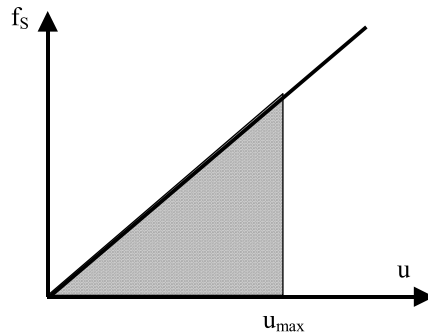


Figure 2.7 : Système linéaire

$$(2.33) \quad k = \frac{2E_S}{u_{\max}^2}$$

Revenant à l'équation (2.7) qui définit l'amortisseur équivalent du système viscoélastique linéaire dont les propriétés dissipatives sont égales à celles d'une structure pour laquelle la nature exacte de l'amortissement est inconnue, il résulte du rapprochement des équations (2.7), (2.31), (2.32) et (2.33) que, en se plaçant à résonance, le pourcentage d'amortissement critique équivalent de la structure est donné par :

$$(2.34) \quad \xi = \frac{E_D}{4\pi E_S}$$

Le pourcentage d'amortissement critique défini par l'équation (2.34) est indépendant de la fréquence de sollicitation  $\bar{\omega}$  si  $E_D$  ne dépend pas de celle-ci (cas de la dissipation d'énergie dans un matériau élastoplastique par exemple). Il est donc plus commode de représenter les propriétés dissipatives de la structure par son pourcentage d'amortissement critique que par l'amortisseur équivalent de l'équation (2.7) qui dépend de  $\bar{\omega}$ . De plus le pourcentage d'amortissement critique est une grandeur accessible par l'expérience, comme on le verra au paragraphe 4.2.

La solution de l'équation (2.27) donnant la réponse de l'oscillateur simple est obtenue de façon classique en cherchant une solution de l'équation homogène, sans second membre ( $p(t) = 0$ ) et une solution particulière. La résolution de l'équation homogène conduit à l'étude des vibrations libres du système; la recherche d'une solution particulière à celle des vibrations forcées.

## 2.4 VIBRATIONS LIBRES

Les vibrations libres sont solutions de l'équation :

$$(2.35) \quad \ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

sous certaines **conditions initiales** pour la vitesse et le déplacement.

La solution générale de l'équation (2.35) est recherchée sous la forme<sup>1</sup> :

$$(2.36) \quad u(t) = \lambda e^{st}$$

Reportant (2.36) dans (2.35), l'inconnue  $s$  doit satisfaire l'équation :

$$(2.37) \quad s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = 0$$

dont la solution dépend du signe du déterminant :

$$(2.38) \quad \Delta = \omega^2 (\xi^2 - 1)$$

qui lui-même dépend de la valeur de  $\xi$ .

On distinguera trois cas possibles :

- système non amorti  $\xi=0$  ou à amortissement sous-critique  $\xi<1$
- système à amortissement critique  $\xi=1$
- système à amortissement sur-critique  $\xi>1$

tout en notant que le cas de l'amortissement sous-critique est celui pertinent pour la majorité des systèmes physiques rencontrés dans la pratique.

### 2.4.1 SYSTEME NON AMORTI $\xi = 0$

L'équation (2.35) se réduit à :

$$(2.39) \quad \ddot{u} + \omega^2 u = 0$$

---

<sup>1</sup>La solution (2.36) est obtenue tout naturellement en effectuant une transformation de Laplace de l'équation (2.35).

dont la solution s'écrit pour des conditions initiales du déplacement  $u(0)$  et de la vitesse  $\dot{u}(0)$  :

$$(2.40) \quad u(t) = \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin(\omega t) + u(0) \cos(\omega t)$$

ou de façon équivalente

$$(2.41) \quad u(t) = \rho \cos(\omega t - \theta)$$

$\rho$  désigne l'amplitude de la réponse et  $\theta$  la phase

$$(2.42a) \quad \rho = \sqrt{u^2(0) + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega}\right)^2}$$

$$(2.42b) \quad \theta = \text{Arctg} \frac{\dot{u}(0)}{\omega u(0)}$$

La figure 2.8 représente la vibration du système au cours du temps. Celle-ci se reproduit à l'identique au bout d'un intervalle de temps égal à la période propre  $T=2\pi/\omega$  de l'oscillateur et se prolonge indéfiniment avec une amplitude maximale égale à  $\rho$ .

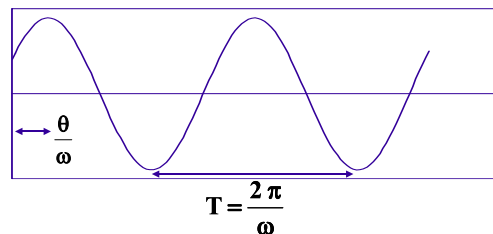


Figure 2.8: Vibration libre d'un système non amorti

#### 2.4.2 SYSTEME A AMORTISSEMENT SOUS-CRITIQUE

Ce cas correspond à  $\xi < 1$  et  $C < 2M\omega$ . La solution de l'équation (2.37) conduit aux deux solutions :

$$(2.43) \quad s = -\xi \omega \mp i\omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

Introduisant la quantité

$$(2.44) \quad \omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

appelée *pulsation propre amortie*, la réponse du système soumis aux mêmes conditions initiales s'écrit :

$$(2.45) \quad u(t) = \left[ \frac{\dot{u}(0) + \xi \omega u(0)}{\omega_D} \sin(\omega_D t) + u(0) \cos(\omega_D t) \right] e^{-\xi \omega t}$$

La solution (2.45) peut être écrite, de façon équivalente, en introduisant l'amplitude  $\rho$  et la phase  $\theta$  sous la forme :

$$(2.46) \quad u(t) = \rho e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_D t - \theta)$$

Elle est représentée sur la figure 2.9 en fonction du temps

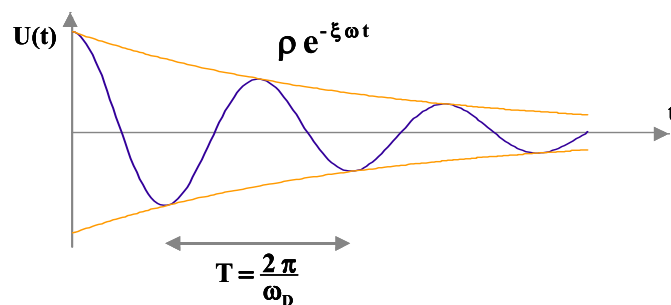


Figure 2.9 : Vibration libre d'un système à amortissement sous-critique

L'examen de la figure 2.9 montre que la réponse passe par des extrema espacés d'un temps  $T=2\pi/\omega_D$ ; l'amplitude des extrema, égale à  $\rho e^{-\xi \omega t}$ , décroît en fonction du temps pour tendre vers 0 au bout d'un temps infini. Le système revient à l'équilibre en oscillant autour de la position neutre correspondant à un déplacement nul.

Ce retour à l'équilibre s'effectue d'autant plus rapidement, et avec moins d'oscillations, que le pourcentage d'amortissement critique  $\xi$  est élevé (figure 2.10).

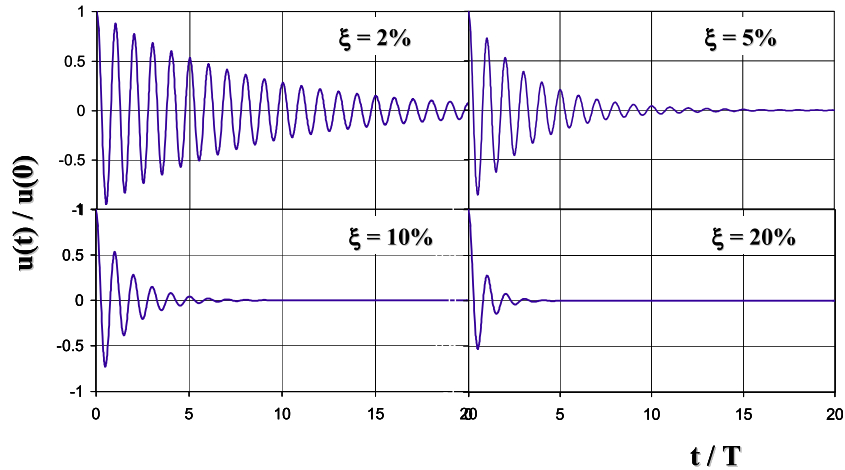


Figure 2.10 : Influence de l'amortissement sur la vibration libre d'un système sous-amorti

Si l'on considère deux extrema successifs, de même signe, dans la réponse vibratoire, le rapport des amplitudes est égal à :

$$(2.47) \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} = e^{\frac{2\pi\xi\omega}{\omega_D}}$$

Prenant le logarithme des deux membres de l'équation (2.47), le pourcentage d'amortissement critique équivalent est égal :

$$(2.48a) \quad \delta = \text{Ln} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

qui pour les faibles valeurs de  $\xi$  se réduit à :

$$(2.48b) \quad \delta = 2\pi\xi$$

La quantité  $\delta$  est appelée *décroissance logarithmique*. La mesure expérimentale de ce décroissement logarithmique permet d'accéder au pourcentage d'amortissement critique d'un système, sans nécessairement connaître la valeur de la constante d'amortisseur  $c$ . Alliée à la définition du pourcentage d'amortissement critique équivalent d'un système, tel qu'il a été défini aux paragraphes 2.0 et 3.5, on dispose ainsi d'une méthode expérimentale pour caractériser globalement la dissipation d'énergie dans une structure sans en connaître nécessairement l'origine physique.

Pour conclure sur l'oscillateur à amortissement sous-critique, on notera que pour les faibles valeurs de  $\xi$  (typiquement inférieures à 20%) telles qu'on les rencontre dans la pratique, on



peut sans préjudice confondre  $\omega$  avec  $\omega_D$ . La figure 2.11 présente la variation  $\omega/\omega_D$  en fonction de  $\xi$  qui est représentée par un cercle de rayon unité.

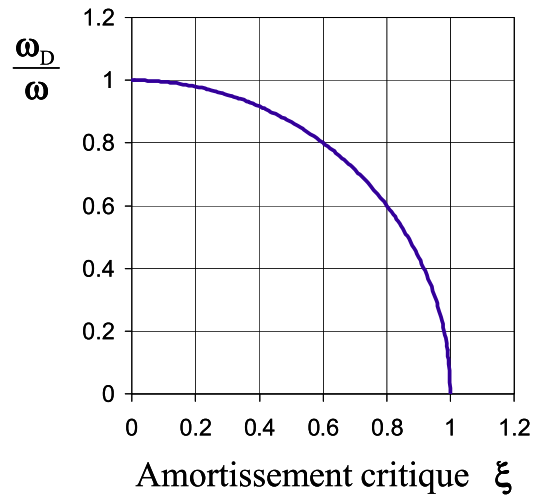


Figure 2.11 : Variation de la pulsation propre amortie en fonction de  $\xi$

### 2.4.3 SYSTEME A AMORTISSEMENT CRITIQUE

Ce cas correspond à  $\xi=1$  et  $C=2M\omega$ .

Sous les mêmes conditions initiales  $u(0)$  et  $\dot{u}(0)$ , la réponse du système s'écrit :

$$(2.49) \quad u(t) = [(1 + \omega t)u(0) + t\dot{u}(0)] e^{-\omega t}$$

Elle est présentée sur la figure 2.12. La réponse ne présente aucune oscillation au cours du temps et le déplacement tend vers 0 au bout d'un temps infini. On peut en déduire que l'amortissement critique correspond à la plus petite valeur de l'amortissement pour laquelle la réponse en vibration libre ne comporte pas d'oscillations.

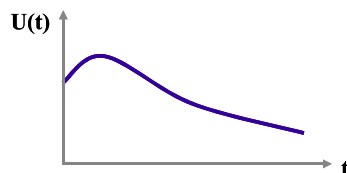


Figure 2.12 : Vibration libre d'un système à amortissement critique

#### 2.4.4 SYSTEME A AMORTISSEMENT SUR-CRITIQUE

Ce cas correspond à  $\xi > 1$  et  $C > 2M\omega$ . La solution de l'équation (2.37) s'écrit :

$$(2.50) \quad u(t) = \left[ \frac{\dot{u}(0) + \xi \omega u(0)}{\hat{\omega}} \text{Sh}(\hat{\omega}t) + u(0) \text{Ch}(\hat{\omega}t) \right] e^{-\xi \omega t}$$

avec

$$(2.51) \quad \hat{\omega} = \omega \sqrt{\xi^2 - 1}$$

On notera que la vibration libre d'un système sur-amorti ne comporte pas d'oscillations et que le système revient à l'équilibre au bout d'un temps infini. La réponse est analogue à celle du système à amortissement critique mais le retour à l'équilibre s'effectue d'autant moins rapidement que le pourcentage d'amortissement critique est élevé.

## 2.5 VIBRATIONS FORCEES

Dans ce paragraphe, on s'intéressera au cas où les vibrations de l'oscillateur simple sont engendrées par une sollicitation  $p(t)$  directement appliquée à la masse  $M$ . On se restreindra dans la suite au cas d'un système à amortissement sous-critique, seul cas d'intérêt dans la pratique.

### 2.5.1 SOLLICITATION HARMONIQUE

La sollicitation appliquée  $p(t)$  est décrite par une expression :

$$(2.52) \quad p(t) = p_0 \sin(\bar{\omega}t)$$

L'équation générale dont on recherche la solution s'écrit :

$$(2.53) \quad \ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = \frac{P_0}{M} \sin(\bar{\omega}t)$$

La solution générale s'écrit sous la forme de la solution générale de l'équation homogène (éq. (2.45)), soit :

$$(2.54) \quad u(t) = [A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t)] e^{-\xi \omega t}$$

et d'une solution particulière que l'on recherchera sous la forme :

$$(2.55) \quad u_1(t) = \lambda \sin(\bar{\omega}t) + \mu \cos(\bar{\omega}t)$$

Reportant (2.55) dans (2.53) et identifiant les constantes terme à terme, il vient en posant :

$$(2.56) \quad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

$$(2.57) \quad u(t) = e^{-\xi\omega t} [A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t)] + \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1-\beta^2)\sin(\bar{\omega}t) - 2\xi\beta \cos(\bar{\omega}t)]$$

Le premier terme de l'équation (2.57) constitue la réponse transitoire de l'oscillateur qui a été étudiée au paragraphe 2.4.2 et le second la réponse forcée ou stationnaire de celui-ci (figure 2.13).

La réponse transitoire s'amortit au cours du temps, d'autant plus rapidement que le pourcentage d'amortissement critique est élevé et la réponse tend vers la solution stationnaire. Cette réponse s'effectue alors avec une période  $T = 2\pi/\bar{\omega}$  égale à celle de la sollicitation.

Dans l'équation (2.57), les constantes A et B sont déterminées par les conditions initiales, vitesse et déplacement du système, à l'instant  $t = 0$ .

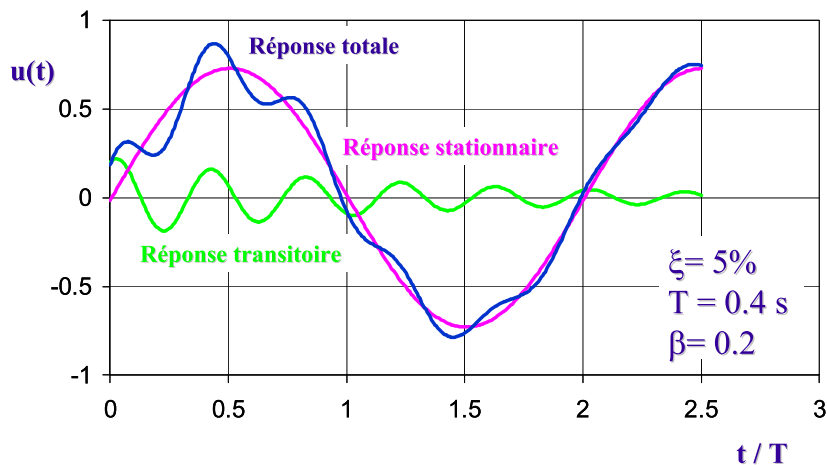


Figure 2.13 : Réponse de l'oscillateur soumis à une sollicitation harmonique

Pour un système même faiblement amorti ( $\xi \approx 5\%$ ), dès que la durée devient supérieure à 2 fois la période de vibration propre  $T = 2\pi/\omega$  de l'oscillateur, la contribution de la réponse transitoire peut être négligée. La réponse stationnaire peut alors s'écrire, de façon similaire à l'équation (2.41) :

$$(2.58) \quad u(t) = \rho \sin(\bar{\omega}t - \theta)$$

où  $\rho$  représente l'amplitude de la réponse et  $\theta$  la phase qui caractérise le déphasage entre l'effort appliqué et le déplacement résultant.

L'amplitude de la réponse est égale à (éq. (2.57)) :

$$(2.59) \quad \rho = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{P_0}{k} D$$

$P_0/k$  représente le déplacement statique (à fréquence nulle) de la masse  $M$  lorsque la sollicitation vaut  $P_0$  et  $D$  le facteur d'amplification dynamique.

Ce facteur d'amplification dynamique est représenté sur la figure 2.14 en fonction du rapport  $\beta$ . Il vaut bien évidemment 1 pour un chargement statique. Lorsque  $\bar{\omega}$  tend vers l'infini,  $D$  tend vers 0 quelle que soit la valeur de  $\xi$ . A très haute fréquence, les forces d'inertie deviennent prépondérantes devant les forces élastique  $f_s$  et d'amortissement  $f_D$ ; elles tendent vers l'infini et s'opposent au mouvement : la masse reste "immobile".

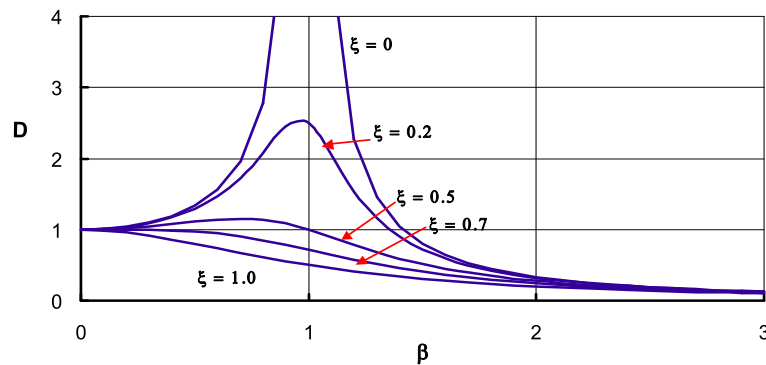


Figure 2.14 : Facteur d'amplification dynamique

Lorsque la pulsation  $\bar{\omega}$  de la sollicitation coïncide avec la pulsation propre  $\omega$  de l'oscillateur, le facteur d'amplification  $D$  passe par un maximum égal à :

$$(2.60) \quad D_{\max} = \frac{1}{2\xi}$$

Ce phénomène est connu sous le nom de résonance. Lorsque l'amortissement est nul,  $D_{\max}$  devient infini.

Reprenant l'étude de l'équation (2.58), la phase  $\theta$  est donnée par :

$$(2.61) \quad \theta = \text{Arctg} \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

Elle est représentée sur la figure 2.15 en fonction de  $\beta$ .

A faible fréquence, la phase est nulle ou négligeable : le système répond instantanément à la sollicitation. Lorsque la résonance est atteinte ( $\beta=1$ ), il se produit un déphasage de  $90^\circ$  entre force appliquée et déplacement résultant : le déplacement est nul lorsque la force est maximale, et vice-versa. A haute fréquence, le déplacement est maximal, en valeur absolue, au même instant que la force mais se produit dans la direction opposée à la force. Rappelons que corrélativement, comme on l'a vu précédemment, son amplitude tend vers 0.

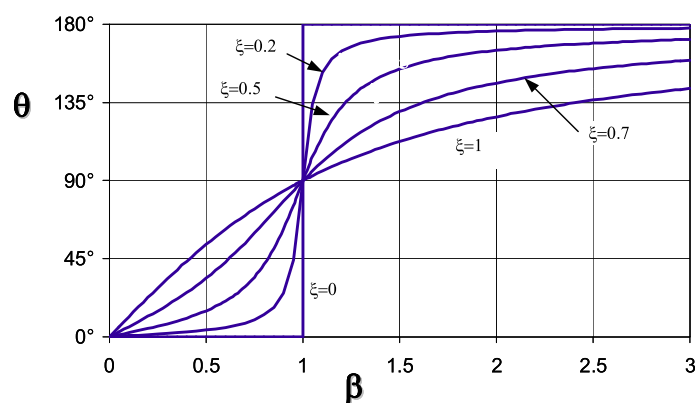


Figure 2.15 : Phase de la réponse stationnaire

## 2.5.2 ETUDE DE LA RESONANCE

On a vu que pour l'oscillateur simple, lorsque la pulsation de la sollicitation coïncidait avec la fréquence propre de l'oscillateur, la réponse, en termes de déplacement, passait par un maximum qui pouvait être infini si l'amortissement de l'oscillateur était nul.

Pour l'oscillateur soumis à des conditions initiales nulles en déplacement et vitesse,  $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ , l'équation (2.57) indique que la réponse s'écrit :

$$(2.62a) \quad A = \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}} \quad B = \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\xi}$$

$$(2.62b) \quad u(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{2\xi} \left[ \left( \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_D t) + \cos(\omega_D t) \right) e^{-\xi\omega t} - \cos(\omega t) \right]$$

qui se simplifie pour les faibles valeurs de  $\xi$  et un temps  $t$  suffisamment élevé en :

$$(2.63) \quad u(t) = \frac{P_0}{2k\xi} (e^{-\xi\omega t} - 1) \cos(\omega t)$$

Lorsque le système est non amorti, le passage à la limite de l'équation (2.62b) pour  $\xi \rightarrow 0$  donne pour réponse :

$$(2.64) \quad u(t) = \frac{P_0}{2k} [\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)]$$

La figure 2.16 présente l'évolution dans le temps des réponses données par les équations (2.63) et (2.64). Pour le système non amorti, l'amplitude de la réponse croît d'une quantité  $\pi$  à chaque cycle et tend vers l'infini : le système devient instable.

Pour le système, même faiblement amorti, l'amplitude de la réponse croît dans le temps mais reste bornée par la valeur  $P_0/2k\xi$  qui est atteinte d'autant plus rapidement que l'amortissement est élevé. La borne obtenue pour l'amplitude du déplacement est égale à celle de la réponse stationnaire à la résonance de l'oscillateur (éq. (2.60)).

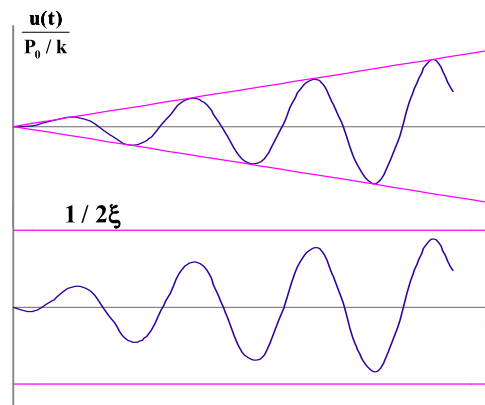


Figure 2.16 : Evolution de l'amplitude de la réponse d'un système en résonance

### 2.5.3 SOLLICITATION IMPULSIVE

La sollicitation consiste en une impulsion appliquée soudainement à l'instant  $t=\tau$  (figure 2.17).

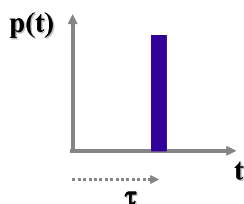


Figure 2.17 : Sollicitation impulsive

L'étude de la sollicitation impulsive revêt une importance toute particulière car, comme on le verra au paragraphe 5.4, elle constitue la solution fondamentale élémentaire de la réponse de l'oscillateur, toute sollicitation générale pouvant être considérée comme une succession d'impulsions élémentaires.

Mathématiquement, la sollicitation impulsive est représentée par la fonction de Dirac  $\delta$  égale à l'infini au temps  $t=\tau$  et nulle pour les autres valeurs du temps, mais dont l'intégrale, appelée *impulsion*, est égale à l'unité :

$$(2.65a) \quad p(t) = \delta(t - \tau)$$

$$(2.65b) \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = 1$$

D'après l'équation fondamentale de la dynamique (éq. (1.7)), la variation de la quantité de mouvement de la masse  $M$  est égale à la résultante des forces appliquées, soit :

$$(2.66) \quad \frac{d}{dt}(M \dot{u}) = p(t) - k u(t) - c \dot{u}(t)$$

Si la force  $p(t)$  agit pendant une durée infiniment brève, le ressort et l'amortisseur n'ont pas le temps de développer des forces et les deux derniers termes du membre de droite de l'équation (2.66) sont nuls. Par intégration de l'équation (2.66), il vient :

$$(2.67) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = M \Delta \dot{u}$$

où  $\Delta \dot{u}$  représente la variation de vitesse communiquée à la masse  $M$ .

Pour un système initialement au repos ( $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ), tenant compte de (2.65b) :

$$(2.68a) \quad \dot{u}(\tau) = \frac{1}{M}$$

Par ailleurs, pour  $t \leq \tau$ , le déplacement est nul, soit :

$$(2.68b) \quad u(\tau) = 0$$

Les relations (2.68) constituent les conditions initiales de la réponse vibratoire de l'oscillateur soumis à une impulsion unité à l'instant  $t = \tau$ . Pour les temps  $t > \tau$  la réponse de l'oscillateur correspondra à sa vibration libre, étudiée au paragraphe 4.0. Son déplacement  $u(t)$  sera régi par l'équation (2.45) dans laquelle les conditions initiales sont introduites :

$$(2.69) \quad \boxed{u(t) \equiv h(t - \tau) = \frac{1}{M\omega_D} e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t - \tau)]}$$

valable pour  $t \geq \tau$ .

$h(t-\tau)$  constitue la solution élémentaire pour une impulsion unité intervenant à l'instant  $t = \tau$ .

La relation (2.67) peut également être obtenue directement à partir des équations de Lagrange (1.18) particularisées pour un impact. Par intégration de ces équations sur la durée de l'impact:

$$(2.70) \quad \int_t^{t+\tau} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] du - \int_t^{t+\tau} \frac{\partial T}{\partial q_i} du + \int_t^{t+\tau} \frac{\partial V}{\partial q_i} du = \int_t^{t+\tau} Q_i du \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Le premier terme après intégration s'écrit

$$(2.71) \quad \Delta \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right]$$

où  $\Delta$  représente la variation de la quantité pendant la durée de l'impact. Les quantités sous le signe intégral des deuxième et troisième termes sont bornées; il en résulte que pour une durée d'impact infinitésimale les deuxième et troisième termes de (2.70) sont négligeables. Le dernier terme représente l'impulsion  $I$  de la force appliquée. Avec l'expression classique de l'énergie cinétique (2.14), il s'ensuit que:

$$(2.72) \quad I = M\Delta\dot{u}$$

qui n'est autre que (2.67).



Physiquement, une impulsion de durée nulle n'existe pas et toute impulsion a une durée finie  $t_1$ , très courte. Sa variation temporelle pendant la durée  $t$ , peut être, par exemple sinusoïdale, triangulaire ou être représentée par un créneau (figure 2.18). Ces situations se rencontrent par exemple dans le cas d'un choc mou, d'une explosion ou d'un choc dur.

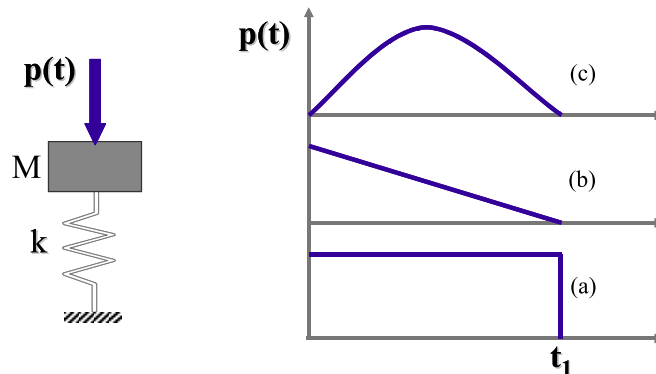


Figure 2.18 : Exemples d'impulsion

Pour ces sollicitations, une solution analytique explicite peut être obtenue pour la réponse de l'oscillateur. Cependant il est plus fécond de s'intéresser à la réponse maximale de l'oscillateur. Cette réponse peut se produire pendant la durée de l'impulsion ou pendant la phase de vibration libre après la fin de l'impulsion.

Dans tous les cas, la réponse maximale est atteinte très rapidement et les forces d'amortissement n'ont pas le temps nécessaire pour absorber une énergie significative; il est donc licite de s'intéresser à la réponse maximale de l'oscillateur non amorti (figure 2.18). Pour une force d'amplitude maximale  $p_0$ , on écrira que le déplacement maximal est égal à :

$$(2.73) \quad \max_t u(t) = \frac{p_0}{k} D$$

où  $D$  représente le coefficient d'amplification dynamique maximal. De façon générale, quelle que soit la forme de l'impulsion,  $D$  ne dépend que du rapport  $t_1/T$  de la durée de l'impulsion à la période propre de l'oscillateur. On peut donc représenter la variation de  $D$  en fonction de ce paramètre. La figure 2.19 présente cette variation pour les trois types d'impulsion de la figure 2.18. Un graphique de ce type est dénommé *spectre de choc*.

On constate sur la figure 2.19 que la valeur de  $D$  est au plus égale à 2.0, ce qui justifie que dans les analyses d'impact il est souvent préconisé de retenir une force statique équivalente égale au double de la force appliquée.

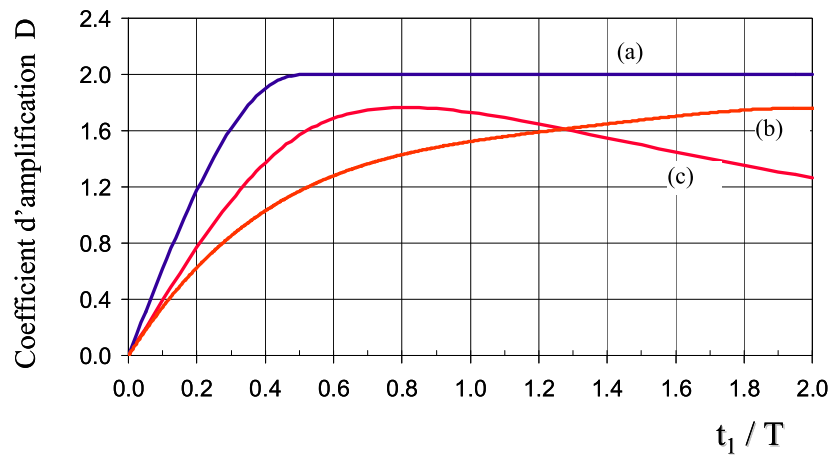


Figure 2.19 : Spectres de choc (voir symboles figure 2.18)

L'examen de la réponse d'un oscillateur à une impulsion du type de celles de la figure 2.18, ou d'autres, montre que de façon générale la réponse maximale de l'oscillateur se produit pendant la durée du choc si le rapport  $t_1/T$  est supérieur à 0.5 et que pour les valeurs élevées de  $t_1/T$  ( $>1$ ) la valeur maximale de l'amplification dépend de la variation temporelle de l'impulsion; une montée graduelle de la force produit une amplification moindre qu'une montée soudaine (comparer sur la figure 2.19 les réponses à la sollicitation sinusoïdale et à l'impulsion rectangulaire).

Pour des durées de choc telles que  $t_1/T < 0.5$ , la réponse maximale se produit pendant la phase de vibration libre suivant la phase d'impulsion et dépend de la valeur de l'impulsion totale  $I = \int_0^{t_1} p(t)dt$ .

Exemple : impulsion rectangulaire

Une solution particulière de l'équation différentielle du mouvement (2.27) avec  $\xi=0$ , est donnée par :

$$(2.74) \quad u(t) = \frac{P_0}{k}$$

La solution générale de l'équation est donc :

$$(2.75) \quad u(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \frac{P_0}{k}$$

Imposant des conditions initiales en déplacement et vitesse nulles, la réponse est donnée par :

$$(2.76) \quad u(t) = \frac{P_0}{k} [1 - \cos(\omega t)]$$

qui n'est valable que pendant la durée de l'impulsion  $t < t_1$ .

A l'instant  $t = t_1$ , l'oscillateur possède un déplacement  $u(t_1)$  et une vitesse  $\dot{u}(t_1)$  qui constituent les conditions initiales de la phase ultérieure pendant laquelle le mouvement est régi par l'équation (2.40) des vibrations libres. La réponse est donnée par :

$$(2.77) \quad u(t) = \frac{\dot{u}(t_1)}{\omega} \sin[\omega(t - t_1)] + u(t_1) \cos[\omega(t - t_1)]$$

valable pour  $t \geq t_1$

La réponse maximale pendant la phase de vibration libre est donnée par :

$$(2.78) \quad u_{\max} = \sqrt{\left[ \frac{\dot{u}(t_1)}{\omega} \right]^2 + [u(t_1)]^2}$$

soit en remplaçant  $\dot{u}(t_1)$  et  $u(t_1)$  par leurs valeurs respectives obtenues à partir de l'équation (2.76) et tenant compte de la relation  $\omega = 2\pi/T$ .

$$(2.79) \quad u_{\max} = \frac{2p_0}{k} \sin\left(\frac{\pi t_1}{T}\right)$$

La réponse maximale pendant la durée de l'impulsion vaut :

$$(2.80) \quad \begin{aligned} u_{\max} &= \frac{p_0}{k} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi t_1}{T}\right) \right] = \frac{2p_0}{k} \sin^2\left(\frac{\pi t_1}{T}\right) & \frac{t_1}{T} \leq 0.5 \\ u_{\max} &= \frac{2p_0}{k} & \frac{t_1}{T} \geq 0.5 \end{aligned}$$

Le rapprochement des équations (2.78) et (2.80) montre que :

- Pour  $\frac{t_1}{T} \leq 0.5$ , la réponse maximale est obtenue pendant la phase de vibration libre et est donnée par l'équation (2.79).
- pour  $\frac{t_1}{T} \geq 0.5$ , la réponse maximale est obtenue pendant la phase d'impulsion et vaut 2.

La courbe  $D = ku_{\max}/p_0$  est représentée en fonction de  $t_1/T$  sur la figure 2.19.

## 2.5.4 SOLLICITATION QUELCONQUE

La sollicitation est définie par sa variation temporelle  $p(t)$  qui peut toutefois être périodique (voir chapitre 1) ou totalement quelconque. Les techniques d'obtention de la solution diffèrent suivant cette particularité mais s'inspirent des développements présentés précédemment pour la sollicitation harmonique ou impulsive.

### 2.5.4.1 SOLLICITATION PERIODIQUE

Une fonction périodique, de période  $T_p$ , peut être décomposée en la somme d'un nombre infini d'harmoniques en utilisant les séries de Fourier.

$$(2.81) \quad p(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T_p} t\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T_p} t\right)$$

que l'on peut également écrire de façon condensée en utilisant les nombres complexes :

$$(2.82) \quad p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2i\pi k}{T_p} t}$$

Les coefficients  $c_k$  sont les coefficients de Fourier de la fonction  $p(t)$ , donnés par :

$$(2.83) \quad c_k = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} p(t) e^{-\frac{2i\pi k}{T_p} t} dt$$

L'expression des coefficients de Fourier est obtenue aisément en multipliant les deux membres de l'équation (2.82) par  $\exp\left(\frac{2i\pi n}{T_p} t\right)$  et en intégrant de 0 à  $T_p$  et en notant que

les fonctions exponentielles sont orthogonales, autrement dit que l'intégrale de leur produit est nulle pour  $n \neq k$  et égale à  $T_p$  pour  $n=k$ .

Tenant compte de la relation linéaire (2.82), la réponse stationnaire de l'oscillateur est alors simplement obtenue en résolvant l'équation de la vibration forcée pour chaque harmonique  $\omega_k$  et en additionnant les réponses ainsi obtenues. La solution pour une sollicitation harmonique a été obtenue au paragraphe 5.1. En conservant les notations complexes introduites dans ce paragraphe, la solution pour une harmonique  $\omega_k$  d'amplitude unité s'écrit :

$$(2.84) \quad u(t) = H(\omega_k) e^{i\omega_k t}$$

où

$$(2.85) \quad H(\omega_k) = \frac{1}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2) + 2i\beta\xi} \quad , \quad \beta = \frac{\omega_k}{\omega} = \frac{2\pi k}{T_p} \frac{1}{\omega}$$

L'équation (2.84) est l'analogie en notations complexes du deuxième terme du membre de droite de l'équation (2.59); elle est obtenue aisément en cherchant la solution stationnaire de l'équation du mouvement (2.53) dans laquelle la sollicitation extérieure (membre de droite de l'équation) est égale à  $e^{i\omega_k t}$

La quantité  $H(\omega_k)$  représente la *fonction de transfert* de l'oscillateur simple, c'est-à-dire sa réponse lorsqu'il est soumis à une sollicitation harmonique d'amplitude unité.

La réponse stationnaire de l'oscillateur soumis à la sollicitation  $p(t)$  est alors donnée par :

$$(2.86) \quad u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H\left(\frac{2\pi k}{T_p}\right) e^{\frac{2i\pi k}{T_p} t}$$

#### 2.5.4.2 SOLLICITATION NON PERIODIQUE

Toute sollicitation quelconque  $p(t)$  peut être considérée comme égale à la somme d'impulsions  $p(\tau)d\tau$  agissant à l'instant  $t = \tau$  (figure 2.20). Cette impulsion produit la réponse dont la solution élémentaire est donnée par l'équation (2.69). Le déplacement incrémental vaut donc :

$$(2.87) \quad du(t) = h(t - \tau) p(\tau) d\tau$$

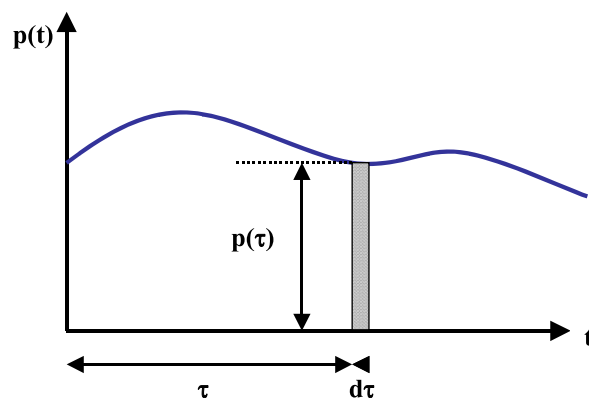


Figure 2.20 : Principe d'obtention de l'intégrale de Duhamel

La réponse à l'instant  $t$  est la somme des réponses aux impulsions produites aux temps  $\tau < t$ , soit :

$$(2.88) \quad u(t) = \frac{1}{m \omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi \omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

Cette intégrale de convolution est connue sous le nom *d'intégrale de Duhamel* caractérisant la réponse d'un oscillateur simple initialement au repos à une sollicitation quelconque  $p(t)$ . Si  $p(t)$  n'est pas connue analytiquement, ou est représentée par une fonction compliquée, l'intégrale de Duhamel doit être évaluée numériquement. Cette intégration numérique ne se révèle pas particulièrement compétitive et il est souvent préférable d'intégrer directement l'équation différentielle régissant l'équilibre dynamique de l'oscillateur. On verra un schéma d'intégration numérique possible au chapitre 4 traitant de l'oscillateur non-linéaire.

Une méthode alternative d'obtention de la réponse de l'oscillateur à une sollicitation quelconque est similaire à celle décrite pour une sollicitation périodique; elle fait appel à la transformée de Fourier de la fonction  $p(t)$  qui s'exprime non plus en fonction d'une série, mais d'une intégrale :

$$(2.89) \quad p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$P(\omega)$  est la transformée de Fourier de la fonction  $p(t)$  et s'exprime :

$$(2.90) \quad P(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) e^{-i\omega t} dt$$

De façon analogue à l'équation (2.86), la réponse de l'oscillateur est :

$$(2.91) \quad u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) P(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Si l'évaluation de l'intégrale (2.90) pour la détermination de la transformée de Fourier ne pose pas de difficulté, l'évaluation de la transformée de Fourier inverse (équation 2.91) nécessite le recours à une intégration le long de contours dans le plan complexe. Cette technique n'est jamais utilisée dans la pratique car difficile de mise en œuvre analytiquement.

L'intégration numérique de ces intégrales nécessite de les tronquer pour les restreindre à un intervalle fini; cette troncature est mathématiquement équivalente à rendre la fonction  $p(t)$  périodique.

Considérons donc une sollicitation  $p(t)$  de durée finie  $t_d$ . La réponse maximale de l'oscillateur à cette sollicitation peut intervenir après la fin de la sollicitation; il est donc nécessaire de déterminer cette réponse sur une durée  $T_0$  suffisamment longue. Typiquement, si la réponse maximale se produit après la fin de la sollicitation, elle sera atteinte au cours du premier

demi-cycle de vibration libre puisque, en raison de l'amortissement, cette réponse s'atténue au cours du temps. La durée d'analyse doit donc être telle que :

$$(2.92) \quad T_0 \geq t_d + \frac{T}{2}$$

où  $T$  est la période propre de l'oscillateur.

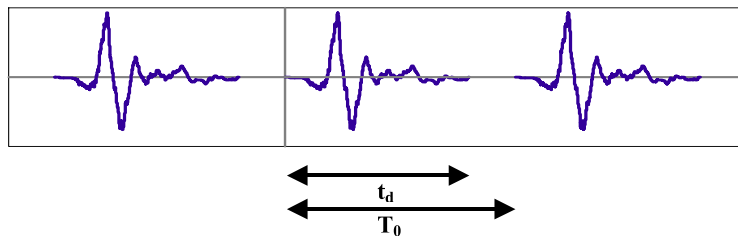


Figure 2.21 : Extension périodique de la sollicitation

Si au-delà d'un temps supérieur à  $T_0$ , la fonction  $p(t)$  est reproduite à l'identique (figure 2.21), la sollicitation est rendue périodique et susceptible du traitement exposé au paragraphe 5.4.1 pour les sollicitations périodiques.

La solution est donc obtenue en exprimant cette fonction périodique en série de Fourier, en résolvant l'équation d'équilibre pour chaque harmonique et en superposant les réponses. On dit que la réponse est obtenue par *analyse fréquentielle*.

Avec l'avènement des algorithmes de transformation de Fourier rapide (FFT), cette méthode de résolution est devenue très performante d'un point de vue numérique. Il faut cependant observer que la solution par cette technique ne représente que la solution stationnaire à une prolongation périodique de la sollicitation. La solution est d'autant plus précise que la durée  $T_0$  est choisie grande. La transformation de Fourier étant non causale, les conditions initiales qui devraient être nulles ne le seront à la limite que si  $T_0 \rightarrow \infty$ . Pour un oscillateur "normalement amorti", il est possible de choisir une valeur raisonnable de  $T_0$  permettant de respecter approximativement ces conditions initiales. De plus, dans ce cas la contribution de la réponse transitoire, non prise en compte dans la méthode, devient négligeable. La méthode devient plus problématique pour un oscillateur très faiblement amorti et requiert des adaptations dont l'objet dépasse le cadre du cours.

## CHAPITRE 3

### OSCILLATEUR SIMPLE GENERALISE

#### 3.1 INTRODUCTION

L'étude de l'oscillateur simple à 1 degré de liberté ne se restreint pas à l'étude d'un système masse-ressort-amortisseur tel qu'il a été décrit au chapitre 2. On a déjà rencontré un exemple d'assemblage complexe de corps rigides dont les conditions aux limites étaient telles que les mouvements possibles de l'assemblage pouvaient être décrits par l'amplitude du déplacement en un point du système (chapitre 2.3.4). On a montré que moyennant l'introduction de grandeurs généralisées (masse  $m^*$ , raideur  $k^*$ , amortisseur  $c^*$  et chargement  $p^*$ ), l'équation différentielle régissant l'équilibre dynamique du système se ramenait à celle de l'oscillateur à 1 degré de liberté. Ce concept peut être généralisé à l'étude de systèmes possédant une flexibilité distribuée sur l'ensemble de la structure, comme par exemple une poutre en flexion. En toute théorie, la poutre possède un nombre infini de degrés de liberté (voir chapitre 1), cependant en admettant que la déformée de la poutre ne peut prendre qu'une forme unique, il est possible de ramener l'étude de cette structure à celle d'un oscillateur à 1 degré de liberté.

Cette méthode, alliée à un choix pertinent de la forme pré-supposée de la déformée, se révèle féconde pour l'obtention de solutions approchées de la réponse vibratoire. La méthode sera illustrée sur l'exemple simple d'une poutre console (figure 3.1), mais est d'application plus générale.

#### 3.2 EQUATION D'EQUILIBRE DYNAMIQUE

La poutre console de la figure 3.1 est caractérisée par une rigidité en flexion  $EI(x)$  variable sur sa hauteur, et une masse représentée par une variation  $\bar{m}(x)$  de la masse linéique.

Ce système possède une infinité de degrés de liberté représentés par le déplacement horizontal et la rotation de tout point  $M$  de la fibre neutre. Pour ramener ce système à un oscillateur à 1 degré de liberté, il est nécessaire de supposer que la déformée de la poutre s'exprime à l'aide d'une fonction unique  $\psi(x)$  et que l'amplitude du déplacement d'un point quelconque de la poutre s'exprime par :

$$(3.1) \quad u(x, t) = \psi(x) z(t)$$



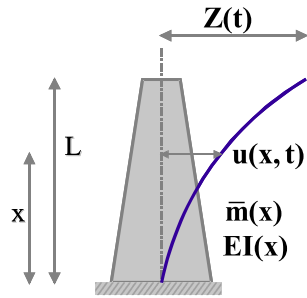


Figure 3.1 : Poutre Console

où  $z(t)$  représente la variation temporelle du déplacement.  $z(t)$  est appelée coordonnée généralisée. Typiquement  $z(t)$  est choisi comme étant le déplacement d'un point particulier de la poutre, par exemple son extrémité supérieure.

L'équation différentielle régissant l'équilibre dynamique de ce système peut être obtenue à partir du principe des puissances virtuelles.

Soit  $p(x,t)$  la distribution des efforts extérieurs appliqués le long de la poutre; pour toute vitesse virtuelle,  $\hat{U}$ , la puissance des efforts extérieurs est donnée par :

$$(3.2) \quad \mathcal{P}_e(\hat{U}) = \int_0^L p(x,t) \hat{U} dx$$

Les efforts intérieurs sont représentés par le moment de flexion  $M(x,t)$  dans toute section de la poutre; la puissance des efforts intérieurs associée à la vitesse de rotation  $\hat{\mathcal{R}}$  est donnée par :

$$(3.3) \quad \mathcal{P}_i(\hat{\mathcal{R}}) = -\int_0^L M(x,t) d\hat{\mathcal{R}} = -\int_0^L EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{d\hat{\mathcal{R}}}{dx} dx$$

La puissance des quantités d'accélération a pour expression :

$$(3.4) \quad \mathcal{A}(\hat{U}) = \int_0^L \bar{m}(x) \ddot{u}(x,t) \hat{U} dx$$

Tenant compte de la relation (3.1), il vient :

$$(3.5) \quad \ddot{u}(x,t) = \psi(x) \ddot{z}(t) \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \psi''(x) z(t)$$

et les vitesses virtuelles  $\hat{u}$  et  $\hat{\mathcal{R}}$  s'expriment par :

$$(3.6) \quad \hat{U} = \psi(x) \hat{Z} \quad , \quad \hat{\mathcal{R}} = \psi'(x) \hat{Z}$$

Reportant les expressions (3.5) et (3.6) dans les relations (3.2) à (3.4) :

$$(3.7a) \quad \mathcal{P}_e(\hat{U}) = \int_0^L p(x, t) \psi(x) \hat{Z} \, dx = p^* \hat{Z}$$

$$(3.7b) \quad \mathcal{P}_i(\hat{U}) = -\int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 z(t) \hat{Z} \, dx = -k^* z(t) \hat{Z}$$

$$(3.7c) \quad \mathcal{A}(\hat{U}) = \int_0^L \bar{m}(x) [\psi(x)]^2 \ddot{z}(t) \hat{Z} \, dx = m^* \ddot{z}(t) \hat{Z}$$

L'expression du principe des puissances virtuelles

$$(3.8) \quad \mathcal{P}_i(\hat{U}) + \mathcal{P}_e(\hat{U}) = \mathcal{A}(\hat{U})$$

conduit à l'équation :

$$(3.9) \quad [m^* \ddot{z}(t) + k^* z(t) - p^*(t)] \hat{Z} = 0$$

valable pour toute vitesse virtuelle  $\hat{Z}$ . Il s'ensuit que :

$$(3.10) \quad \boxed{m^* \ddot{z}(t) + k^* z(t) = p^*(t)}$$

dans laquelle on reconnaît l'équation différentielle de l'oscillateur simple à 1 degré de liberté. La pulsation propre de cet oscillateur est donnée par :

$$(3.11) \quad \omega = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}}$$

Application :

Considérons la poutre de la figure 3.1 avec des propriétés constantes sur la hauteur

$$(3.12) \quad EI(x) = EI \quad , \quad \bar{m}(x) = m$$

et pour laquelle l'excitation s'exprime par :

$$(3.13) \quad p(x, t) = \bar{p} \zeta(t)$$

Les conditions aux limites sont telles que la poutre est encastree à sa base. Ces conditions s'expriment par :

$$\begin{aligned} - \text{déplacement nul à la base} & \quad \psi(0) = 0 \\ - \text{rotation nulle à la base} & \quad \psi'(0) = 0 \end{aligned}$$

A ce stade, il est possible de choisir toute fonction  $\psi(x)$  vérifiant ces conditions aux limites. En choisissant par exemple :

$$(3.14) \quad \psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

on vérifiera aisément en utilisant les définitions de  $p^*$ ,  $k^*$ ,  $m^*$  données par les relations (3.7) que l'équation d'équilibre s'écrit :

$$(3.15) \quad 0.227 m L \ddot{z}(t) + \frac{\pi^4 EI}{32 L^3} z(t) = 0.363 L \bar{p} \zeta(t)$$

De l'équation précédente, on déduit immédiatement que la pulsation propre de l'oscillateur est donnée par :

$$(3.16) \quad \omega = \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

avec 
$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\pi^4}{32 \cdot 0.228}} = 1.91$$

Il convient de réaliser que la valeur de la pulsation propre calculée par (3.16) dépend totalement de la forme de la déformée  $\psi(x)$ . Si un autre choix, respectant les conditions aux limites, était fait, une valeur différente serait obtenue. Par exemple en choisissant pour  $\psi(x)$  la déformée statique sous une charge unité appliquée au sommet :

$$(3.17) \quad \psi(x) = \frac{3 x^2}{2 L^2} - \frac{1 x^3}{2 L^3}$$

on vérifiera que la valeur de  $\lambda$  vaut :

$$\lambda = 1.89$$

La fréquence propre obtenue avec cette déformée est plus faible. En réalité, la valeur exacte de  $\lambda$  est (chapitre 7) :

$$\lambda = 1.875$$

### 3.3 METHODE DE RAYLEIGH

L'introduction de coordonnées généralisées a permis de réduire un système à un nombre infini de degrés de liberté à un oscillateur simple pour lequel la pulsation propre est calculée par l'équation (3.11).

Ce résultat pour la pulsation propre peut être obtenu de façon équivalente par des considérations énergétiques. Elle est connue sous le nom de méthode de Rayleigh.

Pour un système conservatif isolé, la somme de l'énergie potentielle  $V$  et de l'énergie cinétique  $T$  est constante.

Démonstration :

Les équations de Lagrange d'un système conservatif s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad \text{soit encore} \quad \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial V}{\partial q_i} \dot{q}_i = 0$$

Tenant compte de  $V = V(q_i)$  ,  $T = T(q_i, \dot{q}_i) = \frac{1}{2} m_{ij}(q_k) \dot{q}_i \dot{q}_j$

il vient compte tenu de la symétrie de la matrice masse

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad , \quad \frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i = m_{ij} \dot{q}_j \ddot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

En reportant ces expressions dans les équations de Lagrange et en tenant compte de la relation

$$\dot{q}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \dot{q}_i \frac{d}{dt} (m_{ij}(q_k) \dot{q}_j) = 2 \frac{dT}{dt} - m_{ij}(q_k) \dot{q}_j \ddot{q}_i$$

il vient  $\frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = \frac{d(T+V)}{dt} = 0$  soit  $T + V = \text{cst}$

Lorsque l'énergie potentielle est maximale, l'énergie cinétique est nulle. De même, lorsque l'énergie cinétique est maximale, l'énergie potentielle est nulle. La conservation de l'énergie totale implique donc :

$$(3.18) \quad V_{\max} = T_{\max}$$

Démonstration :

$$V = \frac{1}{2} k x^2 \quad , \quad T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad , \quad V + T = \text{cste}$$

a) énergie potentielle maximale  $\Leftrightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow (kx)\dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0 \Rightarrow T = 0$

b) énergie cinétique maximale

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow (kx)\dot{x} = 0 \Rightarrow kx = 0 \Rightarrow V = 0$$

En vibration libre, le déplacement  $u(x,t)$  est donné :

$$(3.19) \quad u(x, t) = \psi(x) z_0 \sin(\omega t)$$

qui est l'analogie de (3.1) pour une vibration harmonique. La vitesse vaut alors :

$$(3.20) \quad \dot{u}(x, t) = \omega \psi(x) z_0 \cos(\omega t)$$

et les énergies potentielle et cinétique de la poutre en flexion prennent les valeurs :

$$(3.21a) \quad V = \frac{1}{2} \int_0^L EI(x) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]^2 dx$$

$$(3.21b) \quad T = \frac{1}{2} \int_0^L \bar{m}(x) (\dot{u})^2 dx$$

Reportant (3.19) et (3.20) dans (3.21) :

$$(3.22) \quad \begin{aligned} V_{\max} &= \frac{1}{2} z_0^2 \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx \\ T_{\max} &= \frac{1}{2} z_0^2 \omega^2 \int_0^L \bar{m}(x) [\psi(x)]^2 dx \end{aligned}$$

et tenant compte de la relation (3.18), on en déduit la pulsation propre  $\omega^2$

$$(3.23) \quad \omega^2 = \frac{\int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx}{\int_0^L \bar{m}(x) [\psi(x)]^2 dx}$$

dans laquelle on reconnaît au numérateur l'expression de la raideur généralisée et au dénominateur celle de la masse généralisée (équations 3.7).

### 3.4 CHOIX DU MODE DE VIBRATION

Comme on l'a indiqué précédemment, la déformée  $\psi(x)$  peut être arbitraire pour autant qu'elle respecte les conditions aux limites du système. A chaque choix de  $\psi(x)$  correspond une valeur de la pulsation propre  $\omega$ . Toutefois, toute déformée qui ne correspond pas au mode de vibration exact du système conduit à une valeur de  $\omega$  supérieure à la valeur exacte.

En conséquence, la meilleure approximation pour  $\psi(x)$  est celle qui donne la valeur minimale de  $\omega$ .

Les considérations suivantes peuvent guider dans le choix de la déformée  $\psi(x)$ . Dans un système en vibration libre, les forces appliquées résultent des forces d'inertie (Principe de d'Alembert, cf. chap. 1) qui sont proportionnelles à la distribution de masse et à la déformée; en conséquence, la déformée correcte  $\psi_c(x)$  est celle qui résulte d'un chargement proportionnel à  $\bar{m}(x)\psi_c(x)$ . Bien évidemment, cette proposition ne permet pas la détermination de  $\psi_c(x)$  mais on peut en déduire que la déformée calculée avec un chargement  $p(x) = \bar{m}(x)\psi(x)$ , où  $\psi(x)$  représente une déformée raisonnable, fournira une excellente approximation de la solution.

Il est possible de simplifier plus avant la procédure en retenant comme déformée celle résultant d'un champ d'accélération uniforme  $g$ , c'est-à-dire un chargement  $p(x) = \bar{m}(x)g$  ( $\psi(x)=g$ ). Posant  $\bar{u}(x) = u(L)\psi(x)$  la déformée correspondant à ce chargement avec  $\psi(L) = 1$ , la pulsation propre peut alors être évaluée à partir de l'énergie potentielle  $V_{\max}$ , égale au travail produit par la force  $p(x)$  :

$$(3.24) \quad V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^L p(x) \bar{u}(x) dx = \frac{1}{2} g \bar{u}(L) \int_0^L \bar{m}(x) \psi(x) dx$$

L'expression (3.22) de l'énergie cinétique maximale reste valable et par suite :

$$(3.25) \quad \omega^2 = \frac{g}{\bar{u}(L)} \frac{\int_0^L \bar{m}(x) \psi(x) dx}{\int_0^L \bar{m}(x) [\psi(x)]^2 dx} = g \frac{\int_0^L \bar{m}(x) \bar{u}(x) dx}{\int_0^L \bar{m}(x) [\bar{u}(x)]^2 dx}$$

L'équation (3.25) est communément utilisée pour le calcul de la fréquence propre de tout système; elle ne nécessite que le calcul de la déformée  $\bar{u}(x)$  sous un champ d'accélération uniforme.

Lorsque la répartition de masse est non uniforme, le calcul de  $\bar{u}(x)$  peut être fastidieux. Gardant à l'esprit que l'intérêt majeur de la méthode de Rayleigh est d'obtenir rapidement et aisément une bonne approximation de la fréquence propre du système, la complication introduite dans le calcul de  $\bar{u}(x)$  n'est pas justifiée. On calculera  $\bar{u}(x)$  en supposant la répartition de masse uniforme et en utilisant l'équation (3.25). De façon générale, tout raffinement dans le choix de  $\psi(x)$  est généralement injustifié pour l'application de la méthode de Rayleigh.

Application :

Reprenons l'exemple de la figure 3.1 en supposant la flexibilité  $EI$  et la masse linéique  $m$  constants sur la hauteur de la poutre. Sous un chargement latéral défini par  $p = mg$ , la poutre prend une déformée :

$$\bar{u}(x) = \frac{pL^4}{8EI} \left[ \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{x}{L} \right)^4 + \frac{4}{3} \frac{x}{L} - \frac{1}{3} \right] = \bar{u}(L)\psi(x)$$

On calculera aisément les intégrales :

$$\int_0^L \psi(x) dx = 0.3634L \quad \text{et} \quad \int_0^L [\psi(x)]^2 dx = 0.2268L$$

L'équation (3.25) fournit alors, tenant compte de  $p = mg$

$$\omega = \left( \frac{\lambda}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\text{avec} \quad \lambda = \sqrt[4]{\frac{8 \cdot 0.3634}{0.2268}} = 1.89$$

La valeur de  $\lambda$  obtenue par cette approche est très voisine de la valeur exacte 1.875. L'avantage de la méthode est d'éviter les spéculations sur le choix de  $\psi(x)$ , qui de plus par construction, satisfait aux conditions aux limites.

## CHAPITRE 4

### REPOSE SISMIQUE DE L'OSCILLATEUR A UN DEGRE DE LIBERTE

#### 4.1 INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, on s'est intéressé à la réponse d'un oscillateur à un degré de liberté soumis à des sollicitations appliquées directement à la masse  $M$ . Une autre forme de sollicitation est celle constituée par un mouvement du support. C'est en particulier le cas de sollicitations provenant par le sol comme les vibrations ambiantes ou les sollicitations sismiques; dans ce cas, le support de l'oscillateur simple représente le sol. Ce chapitre est plus particulièrement consacré à l'étude de la réponse sismique puisque la réponse aux vibrations ambiantes relève du domaine de la dynamique stochastique.

On rappelle brièvement qu'une sollicitation sismique provient d'une rupture s'initiant dans le manteau terrestre; cette rupture donne naissance à des ondes qui se propagent dans le milieu et atteignent éventuellement la surface du sol où elles se manifestent par une vibration ressentie dans les trois directions de l'espace. Les appareils enregistreurs, les sismographes, recueillent ces vibrations sous la forme d'accélération du sol en fonction du temps. C'est sous cette forme que la sollicitation du support est définie dans ce chapitre.

#### 4.2 MISE EN EQUATION

La figure 4.1 schématise le système à étudier. La masse  $M$  repose sur un support soumis à une accélération  $\ddot{y}(t)$  fonction du temps. On supposera, dans un premier temps, que l'accélération  $\ddot{y}(t)$  est connue par sa variation en fonction du temps.

La masse est reliée à son support par un élément développant une force  $F(u, \dot{u})$  fonction du déplacement et de la vitesse relatifs de la masse par rapport à celui-ci. On considère que cette liaison est de type viscoélastique linéaire et s'écrit :

$$(4.1) \quad F = k u + c \dot{u}$$

où  $u$  est le déplacement de la masse dans un référentiel lié au support.



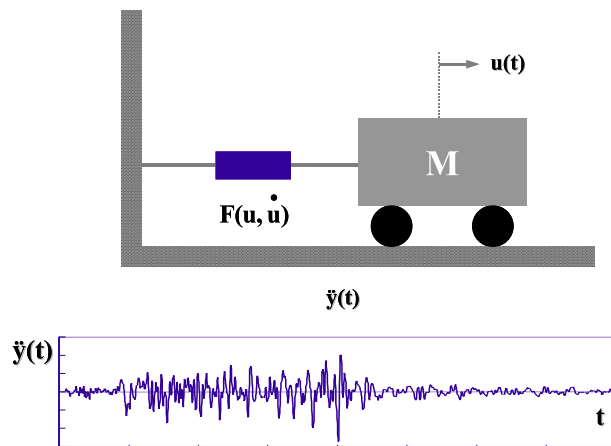


Figure 4.1 : Excitation sismique de l'oscillateur

L'équation d'équilibre est obtenue par exemple en identifiant les forces s'exerçant sur la masse (figure 4.2). Ces forces sont constituées par :

- la force de rappel élastique  $f_s = ku$
- la force de rappel de l'amortisseur  $f_D = c\dot{u}$
- la force d'inertie  $f_i$

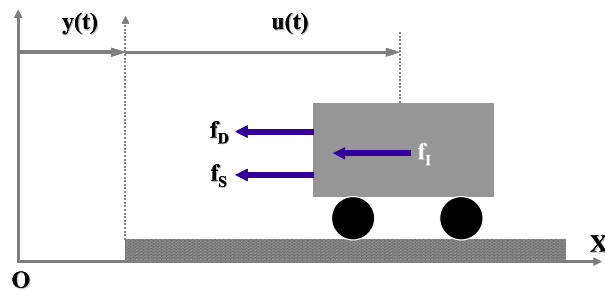


Figure 4.2 : Forces appliquées

La force d'inertie s'exerçant sur la masse est égale au produit de la masse par l'accélération *absolue* de celle-ci.

Dénotant  $v$  le déplacement de la masse dans un référentiel fixe, la règle de composition des mouvements s'écrit :

$$(4.2) \quad v = u + y$$

où  $y$  est le déplacement du support.

L'équilibre du système s'obtient en écrivant la nullité de la résultante des efforts, soit :

$$(4.3) \quad f_s + f_D + f_l = 0$$

qui en remplaçant les efforts par leurs expressions respectives devient :

$$(4.4) \quad M(\ddot{u} + \ddot{y}) + c\dot{u} + ku = 0$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme réduite introduite au chapitre 2 :

$$(4.5) \quad \boxed{\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = -\ddot{y}(t)}$$

où  $\omega$  et  $\xi$  représentent les caractéristiques de l'oscillateur : pulsation propre et pourcentage d'amortissement critique.

En comparant l'équation (4.5) à l'équation (2.27) du chapitre 2, on constate que la réponse sismique de l'oscillateur est analogue à sa réponse lorsqu'il est sollicité directement en introduisant un chargement équivalent :

$$(4.6) \quad p_{\text{eff}}(t) = -M\ddot{y}(t)$$

### 4.3 REPONSE TEMPORELLE DE L'OSCILLATEUR

L'équivalence donnée par l'équation (4.6) indique que les solutions obtenues au chapitre 2 restent applicables en remplaçant  $p(t)$  par  $-M\ddot{y}(t)$ .

Ainsi les méthodes d'analyse fréquentielle ou temporelle donnent :

- analyse fréquentielle

$$(4.7) \quad u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H\left(\frac{2\pi k}{T_p}\right) e^{\frac{2i\pi k}{T_p}t}$$

où  $T_p$  est la période fondamentale de la sollicitation  $\ddot{y}(t)$  rendue périodique et  $C_k$  les coefficients de Fourier de cette fonction périodique;  $H(\bullet)$  est la fonction de transfert, complexe, de l'oscillateur donnée par l'équation (2.82).

- analyse temporelle

L'intégrale de Duhamel donnant la réponse devient :

$$(4.8) \quad u(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

où  $\omega_D$  est la pulsation propre amortie.

Exemple :

Considérons l'accélérogramme enregistré à la station de Lake Hughes (composante E-W) pendant le séisme de Northridge en 1994 (figure 4.3) et examinons la réponse d'un oscillateur de pourcentage d'amortissement critique fixe, égal à 2%, et de période propre,  $T$ , variable. Cette réponse, calculée par l'intégrale de Duhamel (4.8) est donnée sur la figure 4.4.

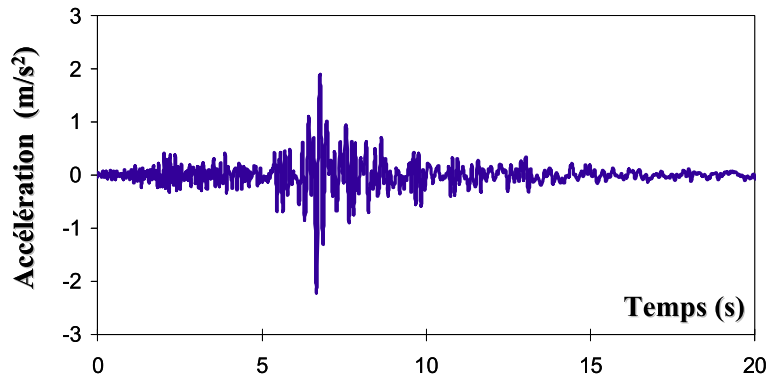


Figure 4.3 : Accélérogramme de Lake Hughes (Northridge 1994)

L'examen de la figure 4.4 montre que l'amplitude, la durée et la forme du signal dépendent fortement de la période propre de l'oscillateur. Celui-ci répond de façon quasi harmonique avec une période égale à celle de l'oscillateur. Ce résultat est très général pour une sollicitation possédant un large contenu fréquentiel et peut être démontré par la théorie des vibrations aléatoires.

On observe également que parmi les trois oscillateurs, celui avec la période la plus longue possède la réponse en déplacement la plus élevée. Il ne faut cependant pas faire une règle générale de cette constatation qui n'est valable que pour une certaine gamme de périodes, comme on le verra au paragraphe suivant. La comparaison des réponses pour  $T = 0.5$  s et  $T = 1$  s dément d'ailleurs cette proposition.

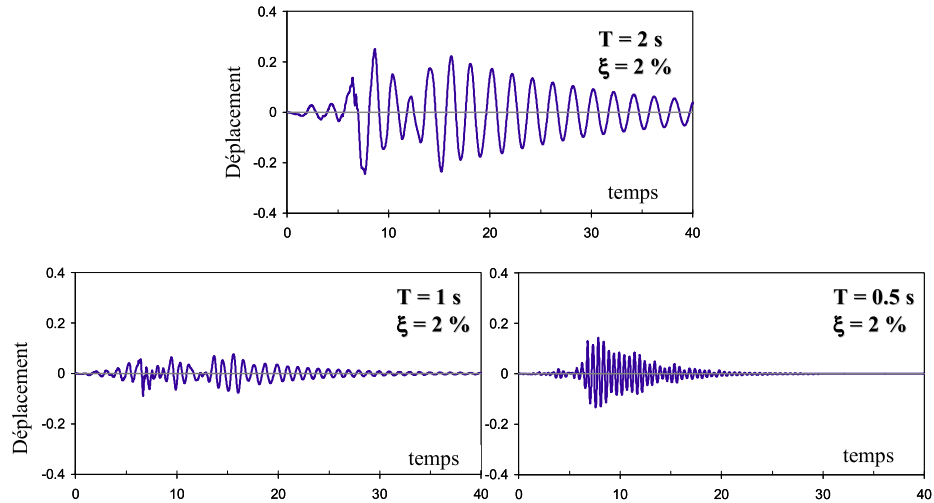


Figure 4.4 : Influence de la période propre sur la réponse de l'oscillateur

La figure 4.5 présente la réponse de l'oscillateur de période fixe égale à 0.5 s et de pourcentage d'amortissement critique variable entre 0% et 5%. Pour le système non amorti, au bout d'une durée correspondant à la phase transitoire de la réponse, la réponse devient stationnaire avec une amplitude constante, la plus élevée des trois systèmes étudiés. Pour un amortissement non nul l'amplitude maximale de la réponse diminue et le mouvement s'atténue d'autant plus rapidement après la phase d'excitation forcée ( $t > 10-15\text{s}$ ) que le pourcentage d'amortissement critique est élevé. On notera également, qu'hormis le cas  $\xi = 0$ , les réponses présentent une certaine similarité.

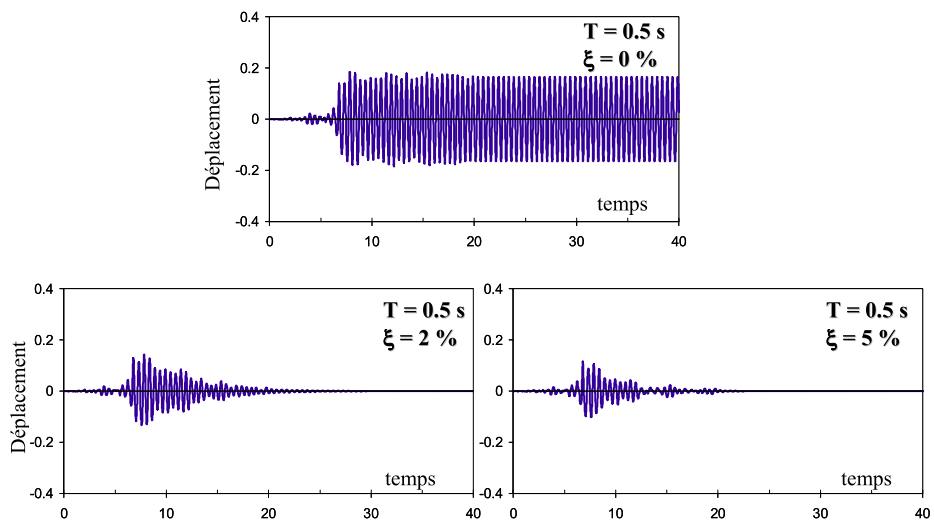


Figure 4.5 : Influence de l'amortissement sur la réponse de l'oscillateur

## 4.4 CALCUL DES EFFORTS

Une fois la réponse de l'oscillateur déterminée, par exemple par l'équation (4.8), l'effort élastique dans le système s'obtient simplement par :

$$(4.9) \quad f_s(t) = k u(t)$$

L'expression de la raideur  $k$  en fonction de la masse de l'oscillateur et de sa pulsation propre permet d'écrire (4.9) sous la forme :

$$(4.10) \quad f_s = M \omega^2 u(t) = M A(t)$$

où  $A(t)$  représente une accélération, appelée *pseudo-accélération* de l'oscillateur, à ne pas confondre avec son accélération. Sous la forme (4.10), on reconnaît que l'effort est donné par le produit de la masse par une accélération.

La pseudo-accélération  $A(t)$  de l'oscillateur est peu différente en valeur absolue de l'accélération absolue de la masse ; la différence provient des forces d'amortissement. Réécrivant l'équation (4.5) sous la forme :

$$(4.11) \quad (\ddot{u} + \ddot{y}) = -\omega^2 u - 2\xi \omega \dot{u}$$

on reconnaît l'accélération absolue  $(\ddot{x} + \ddot{y})$  de la masse et sa pseudo-accélération  $\omega^2 u$ . Ces deux grandeurs ne sont égales, et de signe opposé, que lorsque le pourcentage d'amortissement critique est nul.

De façon équivalente, on peut définir une pseudo-vitesse relative de la masse  $V(t)$ , donnée par :

$$(4.12) \quad V(t) = \omega u(t)$$

Cette vitesse diffère également de la vitesse relative  $\dot{u}$  de la masse, comme le montre la relation (4.5) réécrite sous la forme :

$$(4.13) \quad \dot{u} = -\frac{1}{2\xi} \omega u - \frac{1}{2\xi \omega} (\ddot{u} + \ddot{y})$$

Les pseudo-vitesse et pseudo-accélération sont reliées au déplacement relatif de la masse par :

$$(4.14) \quad \boxed{A = \omega V = \omega^2 u}$$

## 4.5 RÉPONSE MAXIMALE DE L'OSCILLATEUR

L'équation (4.8) fournit la réponse de l'oscillateur à tout instant, à partir de laquelle les efforts se développant dans le système peuvent être calculés. Pour le dimensionnement d'une structure, la connaissance de la variation temporelle de l'effort n'est pas obligatoirement nécessaire et seule la valeur maximale de cette grandeur est requise.

L'introduction de la notion de *spectre de réponse* de la sollicitation  $\ddot{y}(t)$  permet d'accéder directement à cette grandeur.

Reprenons l'exemple de la figure 4.4 et examinons la réponse de l'oscillateur de période propre 2s et de pourcentage d'amortissement critique 2% ; cette réponse est donnée sur la figure 4.6.

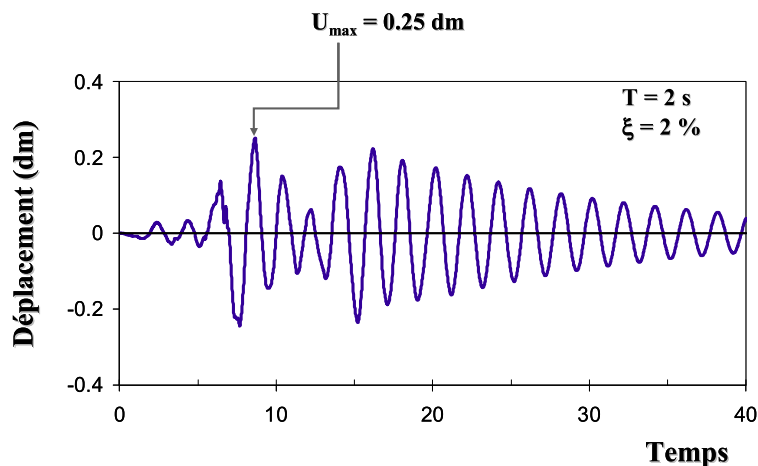


Figure 4.6 : Réponse de l'oscillateur  $T = 2s$ ,  $\xi = 2\%$

La valeur maximale du déplacement de la masse  $M$  intervient au temps  $t = 8.66$  s et vaut 2.5 cm ; rappelons que ce déplacement représente le déplacement relatif de la masse par rapport à son support et non son déplacement absolu.

Il est possible de répéter l'opération précédente pour une collection d'oscillateurs de périodes propres  $T$  et de pourcentages d'amortissement critique variables. Pour chaque réponse, on ne retient que la valeur maximale de déplacement que l'on notera  $S_D$ .

$$(4.15) \quad S_D(T, \xi) = \max_t u(T, \xi, t)$$

En reportant les valeurs  $S_D$  en fonction de la période  $T$  pour des valeurs fixées de  $\xi$ , on obtient les courbes de la figure 4.7, appelées *spectres de réponse en déplacement*, sous-

entendu d'un oscillateur simple soumis à la sollicitation de la figure 4.3. Ces courbes, établies une fois pour toutes pour une sollicitation  $\ddot{y}(t)$  donnée, permettent d'obtenir directement, sans autre calcul, la réponse maximale de tout oscillateur simple de caractéristiques  $(T, \xi)$  ; ceci est illustré sur la figure 4.7 pour l'oscillateur  $T = 2s$ ,  $\xi = 2\%$  de la figure 4.6.

On a vu au paragraphe 4 que les efforts élastiques dans le système pouvaient être obtenus à partir du produit de la masse par la pseudo-accelération. Il est donc intéressant d'introduire un spectre de réponse en pseudo-accelération  $S_A(T, \xi)$ , défini par :

$$(4.16) \quad S_A(T, \xi) = \max_t [\omega^2 u(T, \xi, t)] = \omega^2 S_D(T, \xi)$$

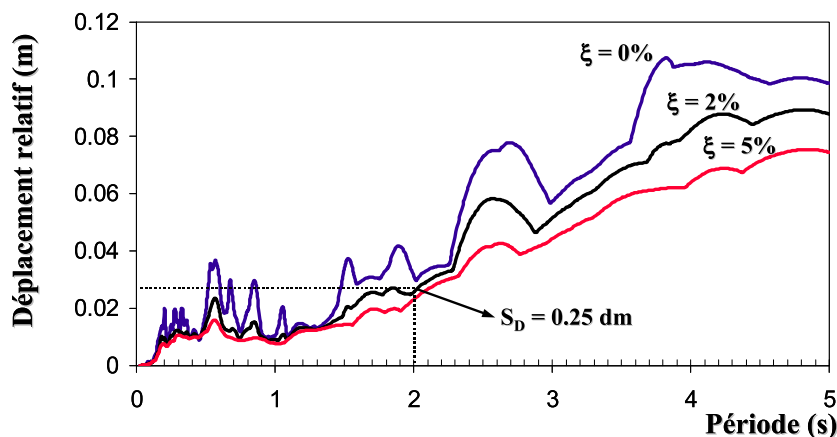


Figure 4.7 : Spectres de réponse en déplacement

De même, on peut définir un spectre de pseudo-vitesse relative  $S_V(T, \xi)$ . Ces grandeurs sont reliées par :

$$(4.17) \quad S_A(T, \xi) = \omega S_V(T, \xi) = \omega^2 S_D(T, \xi)$$

Les spectres de la figure 4.7 sont présentés sur la figure 4.8 en termes de pseudo-accelération calculée par la relation (4.17).

Il convient de réaliser que les figures 4.7 et 4.8 contiennent la même information qui caractérise la sollicitation  $\ddot{y}(t)$  de la figure 4.3.

Une fois connu le spectre de réponse en pseudo-accelération, l'effort élastique maximal développé dans l'oscillateur est donné par :

$$(4.18) \quad f_{S_{\max}} = M S_A(T, \xi)$$

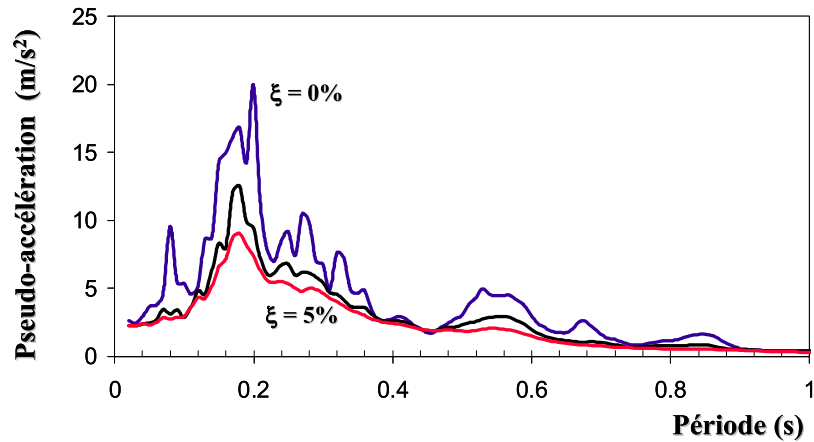


Figure 4.8 : Spectres de réponse en pseudo-accelération

Le produit  $MS_A$  est la force statique équivalente qu'il convient d'appliquer à l'oscillateur pour l'obtention de l'effort élastique maximal qui s'y développera sous l'action de l'accélérogramme de la figure 4.3.

#### 4.6 SPECTRES DE RÉPONSE NORMALISÉS

Le paragraphe précédent a montré que si l'on ne s'intéresse qu'à la réponse maximale de la structure afin de déterminer les efforts maximaux qui s'y développent, la connaissance de la variation temporelle  $\ddot{y}(t)$  de l'accélération du sol n'est pas nécessaire. Seul le spectre de réponse en pseudo-accelération (ou déplacement relatif) est requis.

L'introduction de cette grandeur permet de définir, dans une zone sismique, une sollicitation enveloppe pour le système, ce que ne permet pas de faire la donnée  $\ddot{y}(t)$ . En effet, tant du point de vue du contenu fréquentiel que du point de vue des amplitudes, la variabilité du mouvement sismique est grande et parmi un ensemble de sollicitations  $\ddot{y}_i(t)$ , une sollicitation  $\ddot{y}_j(t)$  peut être la plus défavorable pour une structure, alors que pour une autre structure la sollicitation la plus défavorable sera représentée par  $\ddot{y}_k(t)$ . Par contre, en calculant les spectres de réponse  $S_{Ai}(T, \xi)$  de ces sollicitations, il est possible de définir un spectre enveloppe qui, en vertu de l'équation (4.18), conduira aux efforts les plus élevés. Il est cependant important de réaliser que ce spectre enveloppe n'est représentatif d'aucun mouvement sismique  $\ddot{y}_i(t)$  et il est vain de rechercher dans une banque de données de séismes enregistrés, un enregistrement possédant un spectre de réponse identique, ou même voisin, d'un spectre enveloppe.



Par contre, la définition d'un spectre enveloppe est très utile pour les règlements de construction parasismique. Ces spectres y sont définis à partir de traitements statistiques des spectres d'enregistrement réels et possèdent généralement tous des formes identiques (figure 4.9).

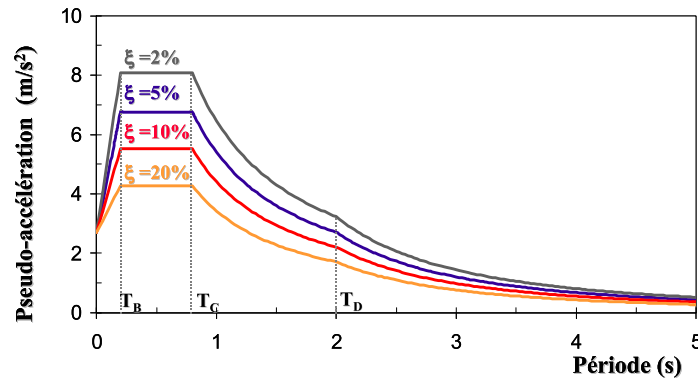


Figure 4.9 : Spectres de réponse normalisés

- Pour les faibles périodes, la pseudo-accélération croît linéairement jusqu'à une valeur d'amplification maximale atteinte pour une période  $T_B$  ;
- La pseudo-accélération est constante et maximale pour des périodes comprises entre  $T_B$  et au plus  $T_C$  ;
- Entre les périodes  $T_C$  et  $T_D$ , la pseudo-vitesse relative est constante, ce qui signifie que la pseudo-accélération décroît en  $1/T$  (équation 4.17) ;
- Au delà de  $T_D$ , le déplacement relatif est constant, ce qui signifie que la pseudo-accélération décroît en  $1/T^2$  (équation 4.17).

Il est intéressant d'examiner les deux extrémités du spectre, à période nulle et à période infinie :

- A période nulle, la pseudo-accélération est égale à l'accélération maximale du support, comme le montre l'équation (4.5) lorsque  $\omega = \infty$  ; le déplacement relatif  $u$  devient nul. Quelle que soit la valeur de l'amortissement, tous les spectres se raccordent à période nulle à l'accélération maximale  $\max[\ddot{y}(t)]$  ;
- A période infinie, le déplacement relatif  $S_D(\infty, \xi)$  tend vers le déplacement maximal du support  $\max[y(t)]$ . Ce résultat s'explique aisément : un oscillateur de période infinie correspond à un système avec une raideur nulle :

tout se passe comme si la masse n'était plus connectée au support; par suite, lors de l'excitation de celui-ci, elle reste immobile. Son mouvement relatif par rapport au support est donc égal au mouvement du support. En pratique, l'examen des spectres de réponse d'enregistrements réels montre que la réponse devient égale au déplacement du sol pour des périodes  $T_F$  de l'ordre de 10s.

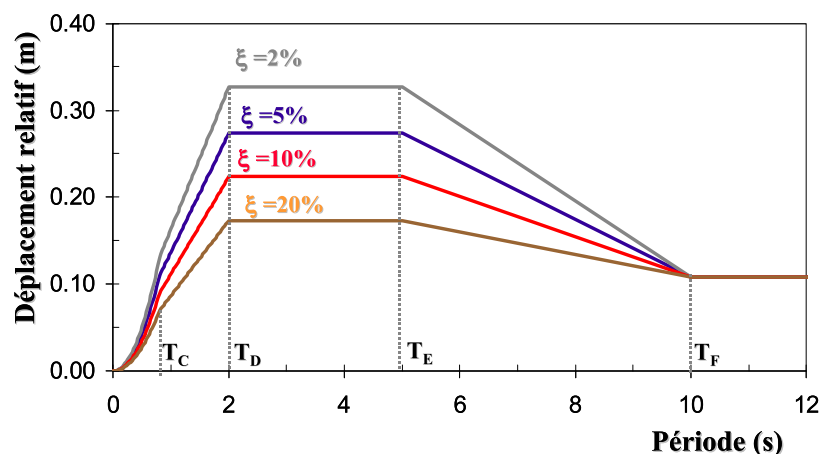


Figure 4.10 : Spectres de réponse en déplacement

Les spectres en pseudo-accélérations de la figure 4.9 peuvent être tracés en termes de déplacement relatif par la transformation (4.17) (figure 4.10). Sous cette forme, les considérations générales développées au paragraphe 3.0, relatives à la réponse de divers oscillateurs, s'explicitent ; on constate en particulier que les oscillateurs de périodes élevées, comprises entre  $T_D$  et  $T_E$  présentent les valeurs maximales.



## CHAPITRE 5

### OSCILLATEUR NON LINEAIRE A UN DEGRE DE LIBERTE

#### 5.1 INTRODUCTION

Les premiers chapitres ont été consacrés à l'étude de l'oscillateur simple à un degré de liberté dont la loi de comportement était linéaire, viscoélastique. Cette schématisation est tout à fait acceptable pour l'étude des vibrations de systèmes dont les amplitudes restent modérées. Dès que ces amplitudes deviennent importantes, le matériau constitutif est sollicité au-delà de son domaine d'élasticité et le comportement du système devient non-linéaire. Cette situation se rencontre tout particulièrement lors de la sollicitation d'ouvrages dans les zones sièges de secousses sismiques d'intensités modérées à fortes.

Bien qu'une structure soit généralement un système plus complexe qu'un oscillateur à un degré de liberté, on a vu au chapitre 3 qu'il était parfois possible de ramener son étude à celle d'un oscillateur simple. Par ailleurs, l'étude de l'oscillateur simple permet d'introduire les notions essentielles de ductilité, spectres anélastiques et d'aborder les problèmes de résolution numérique de systèmes non-linéaires.

L'exposé se limite au cas d'un oscillateur sollicité par le mouvement de son support, mais toutes les notions introduites sont immédiatement transposables aux autres types de sollicitations.

#### 5.2 EXEMPLES DE NON-LINEARITE DE COMPORTEMENT

Les exemples présentés ci-dessous (figure 5.1) sont issus d'essais réalisés dans les trente dernières années pour l'étude du comportement des matériaux de construction soumis à des sollicitations sismiques. De ce fait, il correspondent à des sollicitations cycliques et sont réalisés sur des pièces (poutres).

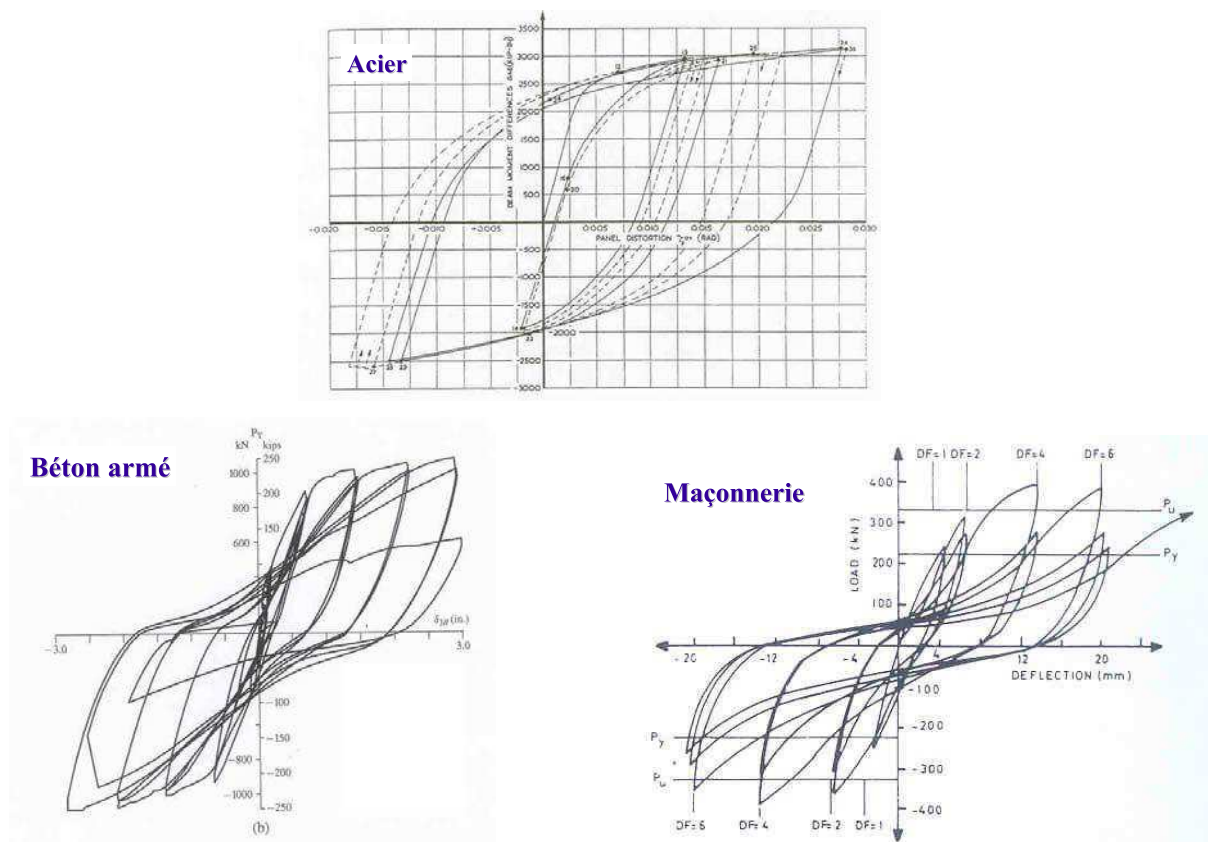


Figure 5.1 : Courbes effort-déformation  
 (1) Acier (Krawinkler - Bertero - Popov) (2) Béton armé (Popov - Bertero)  
 (3) Maçonnerie (Priestley)

L'examen de la figure 5.1 montre que les courbes cycliques effort-déplacement dépendent fortement du matériau étudié. Elles présentent cependant des traits communs :

- au début du chargement, pour les faibles amplitudes de déplacement, le comportement est linéaire;
- au-delà d'un certain seuil de déplacement, les non-linéarités apparaissent dans la courbe effort-déplacement; ces non-linéarités se traduisent par une limitation de l'effort maximal applicable à la pièce testée;
- lors des cycles de charge-décharge, des boucles d'hystérésis apparaissent qui traduisent une dissipation d'énergie.

Les différences notables entre les trois matériaux testés ont trait à la dégradation qui apparaît pour le béton armé, et encore plus pour la maçonnerie, pour des cycles d'amplitude de déplacement élevée. Pour l'acier, même pour des cycles d'amplitude de déplacement élevée, l'effort applicable à la pièce reste sensiblement constant; pour le béton armé et la maçonnerie, cet effort chute très rapidement au-delà d'un certain seuil. Corrélativement la forme des boucles d'hystérésis change passant d'une forme régulière à une forme en S.

Les courbes de la figure 5.1 ne sont que la manifestation, à l'échelle macroscopique de la pièce testée, de phénomènes irréversibles se produisant à l'échelle du matériau : plastification de l'acier, fissuration du béton et plastification des aciers, glissement des éléments de maçonnerie les uns par rapport aux autres....

### 5.3 MODELISATION SIMPLIFIEE DU COMPORTEMENT NON-LINEAIRE

Les comportements du type de celui des figures 5.1b ou 5.1c sont complexes et délicats à modéliser. Par contre, celui de la figure 5.1a peut être schématisé comme indiqué sur la figure 5.2.

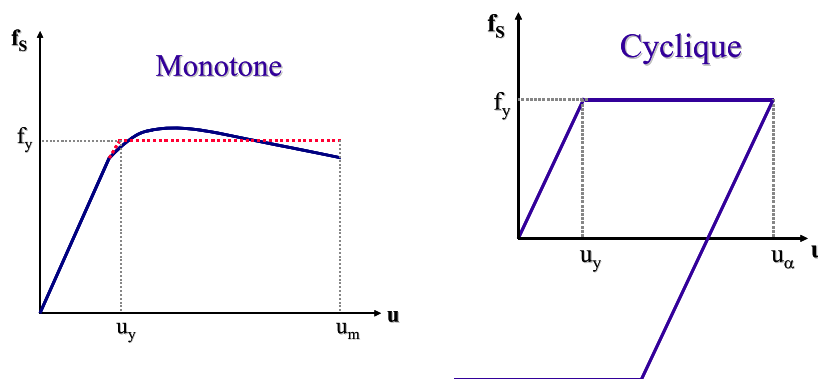


Figure 5.2 : Schématisation du comportement non-linéaire

Sous chargement monotone, la courbe effort-déplacement est approchée par un diagramme bilinéaire comportant une pente initiale jusqu'à un déplacement  $u_y$ , puis un plateau à force constante au-delà de  $u_y$ . L'extrémité du plateau correspond à une valeur de déplacement  $u_m$  pour lequel la rupture, ou l'instabilité, se manifeste.

Sous chargement cyclique la décharge, qui intervient pour la valeur  $u_\alpha$  du déplacement, s'effectue suivant un trajet parallèle à celui du chargement initial; la décharge se poursuit jusqu'à l'atteinte en traction d'une force égale à  $-f_y$ , valeur pour laquelle un plateau apparaît dans la courbe. Le rechargement à partir d'un point de ce plateau suit de nouveau un trajet parallèle à celui du chargement initial, et ainsi de suite.

Le comportement décrit sur la figure 5.2 correspond à une schématisation *élastique parfaitement plastique* du comportement du système; il est très proche du comportement réel de la pièce en acier de la figure 5.1.

## 5.4 COEFFICIENT REDUCTEUR D'EFFORTS ET DUCTILITE

Reprenons le système dont le comportement est schématisé sur la figure 5.2. Si le matériau constitutif du système possédait une résistance infinie, le comportement serait élastique; sous l'action d'une sollicitation sismique d'amplitude d'effort maximale  $f_0$ , le déplacement atteint vaudrait  $u_0$  (figure 5.3), tel que :

$$(5.1) \quad f_0 = k u_0$$

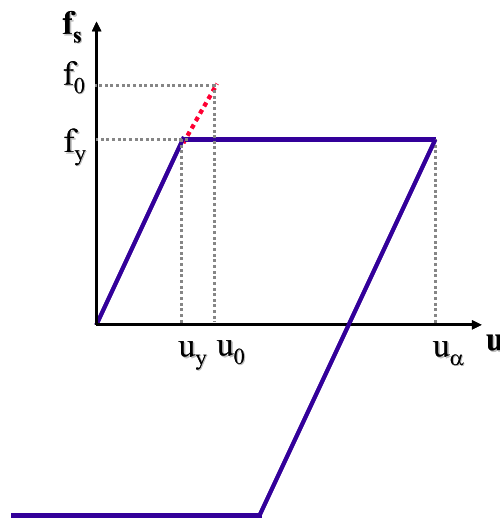


Figure 5.3 : Définition de la ductilité

La capacité de résistance du matériau limite en fait l'effort supporté par le système à une valeur  $f_y$ , appelée *limite d'élasticité* (yield strength) qui, dans le cas du comportement élasto-plastique parfait, se confond avec la résistance limite du matériau;  $f_0$  apparaît donc comme étant la résistance minimale que doit posséder le système pour rester élastique lors du chargement considéré. Dans le cas plus général d'un matériau écrouissable,  $f_y$  représente la force correspondant à la première apparition de phénomènes irréversibles. Il est alors naturel d'introduire la limite d'élasticité normalisée, définie par :

$$(5.2) \quad \bar{f}_y = \frac{f_y}{f_0} = \frac{u_y}{u_0}$$

Si la réponse du système est telle que  $\bar{f}_y$  est inférieure à 1.0, le comportement est non-linéaire avec apparition de déplacements irréversibles.

De façon alternative, il est possible d'introduire un *coefficient réducteur des efforts*  $R_y$  :

$$(5.3) \quad R_y = \frac{f_0}{f_y} = \frac{1}{\bar{f}_y}$$

qui est égal à 1 pour un système à comportement élastique et supérieur à 1.0 pour un système répondant de façon anélastique.

Le paramètre fondamental intervenant dans la réponse non-linéaire d'un système est le déplacement maximal  $u_\alpha$  atteint par celui-ci lors de la sollicitation; en normalisant ce déplacement par le déplacement  $u_y$  à la limite d'élasticité, on définit la *ductilité*  $\mu$  du système :

$$(5.4) \quad \boxed{\mu = \frac{u_\alpha}{u_y}}$$

Le déplacement maximal  $u_\alpha$  du système anélastique est relié au déplacement maximal du système élastique de même raideur initiale  $k$  par :

$$(5.5) \quad \frac{u_\alpha}{u_0} = \mu \bar{f}_y = \frac{\mu}{R_y}$$

Pour certains systèmes, la valeur de  $u_\alpha$  est peu différente de  $u_0$  et dans ce cas le coefficient réducteur des efforts se confond avec la ductilité du système; cette hypothèse n'est cependant pas toujours valable et ductilité  $\mu$  et coefficient réducteur d'efforts  $R_y$  prennent des valeurs différentes.

Le comportement du système décrit sur la figure 5.3 et les notions introduites ci-dessus permettent de mettre en évidence la différence fondamentale qui existe entre un système élastique et un système élastoplastique :

- Pour le système linéaire, il y a une correspondance biunivoque entre force et déplacement. Traditionnellement, le dimensionnement d'une telle structure fait appel à l'évaluation des efforts. Le raisonnement en forces est privilégié par les ingénieurs.
- Pour le système élastoplastique, ou de façon plus générale non-linéaire, il n'existe plus de relation biunivoque entre force et déplacement. La force ne représente plus le paramètre significatif puisque, comme l'indique la figure 5.3, la force maximale supportée par le système est toujours limitée par ses caractéristiques de résistance, et cette force maximale est associée à une infinité de valeurs de déplacements dont certaines peuvent correspondre à des états inacceptables pour le système : déplacement correspondant à la limite de stabilité du système, à la rupture du matériau.... Pour le système non-linéaire, le paramètre fondamental à considérer dans le dimensionnement est le déplacement maximal, ou de façon équivalente la ductilité appelée (dans la réponse).



Cet aspect n'apparaît pas toujours clairement dans les règles de construction parasismique qui font appel, pour préserver le mode de raisonnement familier aux ingénieurs, à un raisonnement en force. Les efforts sont évalués par un calcul élastique (éq. 5.1) puis affectés d'un coefficient réducteur d'efforts  $R_y$  (éq. 5.3) dont la valeur est donnée dans le règlement; la valeur de  $R_y$  dépend du matériau constitutif de l'ouvrage (acier, béton, maçonnerie) et de son schéma structural (portique, voiles....), c'est-à-dire de la valeur  $u_m$  maximale que le système peut supporter ou de façon équivalente de la ductilité maximale acceptable (éq. 5.4).

Exemple :

Reprenons l'exemple du chapitre 4 de l'accélérogramme enregistré à Lake Hughes pendant le séisme de Northridge (1994) (figure 5.4) et examinons la réponse d'un oscillateur simple de période propre 2.0 s dont le support est soumis à cet accélérogramme. La masse de l'oscillateur est prise égale à 1.0 kt, de sorte que sa raideur vaut  $k = \pi^2 \approx 10$  MN/m.

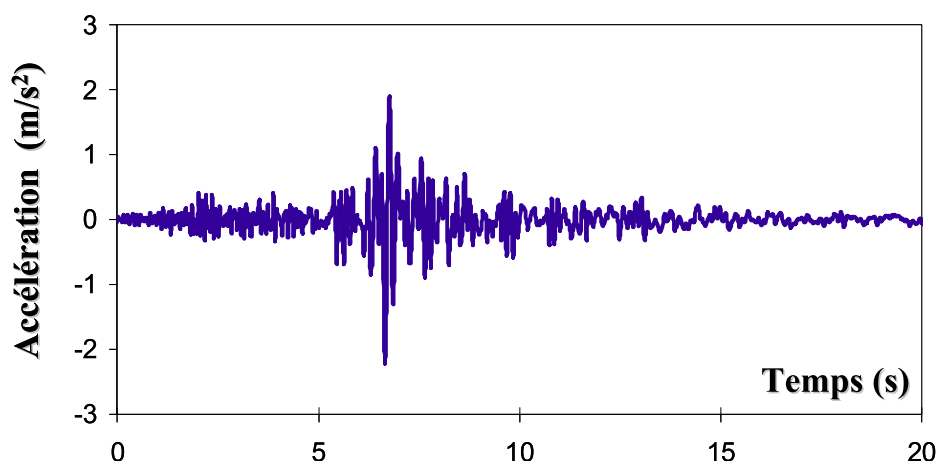


Figure 5.4 : Accélérogramme de Lake Hughes

La réponse élastique du système est donnée sur la figure 5.5 (a) en termes d'effort maximal; la valeur maximale de l'effort est atteinte à  $t = 15.2$  s et vaut  $f_0 = 0.29$  MN. Le déplacement résultant donné sur la figure 5.6 (a) a pour valeur maximale  $u_0 = 0.029$  m qui est atteint au même instant puisque le système est élastique (pourcentage d'amortissement critique nul).

La courbe effort-déformation (figure 5.7a) est bien entendu une droite.

La force  $f_0 = 0.29$  MN représente la valeur minimale de résistance que doit posséder le système pour rester élastique sous l'action du séisme de la figure 5.4.

Reprenons le même système, soumis à la même sollicitation, mais dont la limite d'élasticité (égale à la résistance) prend les valeurs  $f_y = 0.15$  MN, 0.10 MN et 0.05 MN, correspondant à

des facteurs de réduction d'effort égaux à 1.93, 2.9 et 5.8. Les réponses sont données sur les figures 5.5 à 5.7. Les figures 5.5 et 5.6 montrent clairement l'effet de la limitation de la capacité de résistance du système. Les déplacements maximaux, qui prennent des valeurs soit positives soit négatives, valent respectivement  $u_{\alpha} = 0.035$  m, 0.042 m et 0.025 m. On notera que le déplacement maximal n'est pas atteint en fin de sollicitation et que de plus la plus grande valeur ne correspond pas à l'oscillateur de plus faible résistance.

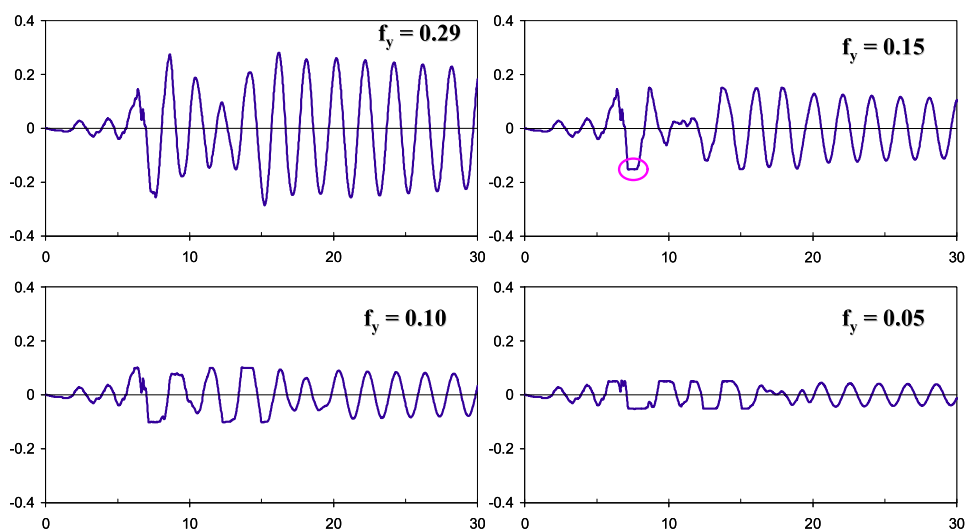


Figure 5.5 : Variation de l'effort pour différents systèmes élastoplastiques

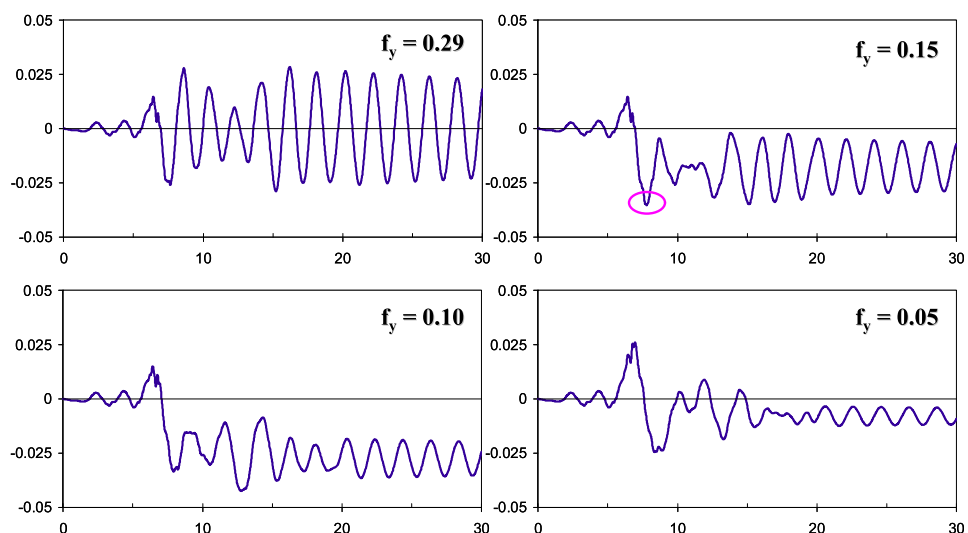


Figure 5.6 : Variation du déplacement

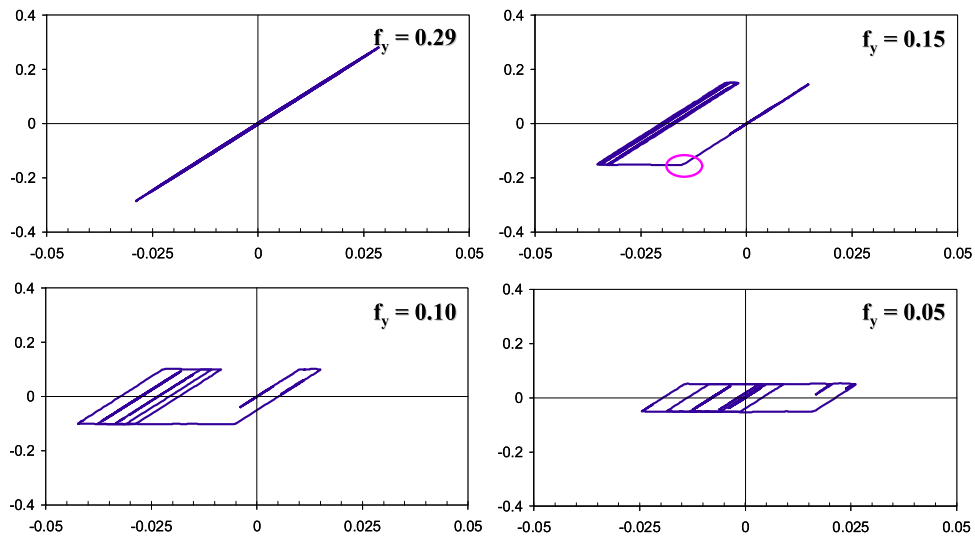


Figure 5.7 : Courbes effort-déplacement

Le déplacement élastique de chaque oscillateur vaut  $u_y = f_y/k$ ; dont on déduit la ductilité  $\mu$  appelée dans chaque oscillateur (éq. 5.4) : 2.3, 4.2 et 5.2. On notera que, pour l'oscillateur de caractéristiques intermédiaires, le coefficient réducteur d'effort est différent de la valeur de la ductilité  $\mu$ .

## 5.5 MISE EN EQUATION

L'équation d'équilibre de l'oscillateur non-linéaire s'obtient, comme pour le cas de l'oscillateur linéaire, en identifiant les efforts appliqués et en écrivant que leur résultante est nulle :

$$(5.6) \quad f_I + f_D + f_S = 0$$

Les indices I, D et S ont les significations des chapitres précédents. L'élément de liaison est constitué d'un amortisseur de caractéristique  $c$  et d'un élément non-linéaire élastoplastique du type de celui de la figure 5.2b dont on écrira la loi de comportement  $f_s(u)$ . Pour une sollicitation du support, l'équation d'équilibre s'écrit (éq. 4.4) :

$$(5.7) \quad M\ddot{u} + c\dot{u} + f_s(u) = -M\ddot{y}(t)$$

soit sous forme réduite :

$$(5.8) \quad \ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u_y \bar{f}_s(u) = -\ddot{y}(t)$$

dans laquelle  $\omega$  est la pulsation propre élastique,  $\xi$  le pourcentage d'amortissement critique et :

$$(5.9) \quad \bar{f}_s = \frac{f_s(u)}{M\omega^2 u_y} = \frac{f_s(u)}{f_y}$$

$\bar{f}_s$  décrit, sous forme partiellement adimensionnelle, la loi de comportement de la figure 5.2b. L'équation (5.8) met clairement en évidence le fait que la réponse à une sollicitation donnée  $\ddot{y}(t)$  dépend maintenant de trois paramètres :  $\omega$ ,  $\xi$  et  $u_y$  (déplacement élastique maximal = déplacement atteint à la limite d'élasticité du système).

## 5.6 REPONSE TEMPORELLE DE L'OSCILLATEUR

La résolution de l'équation (5.8) ne peut en règle générale être obtenue de façon analytique et le recours à des schémas d'intégration numérique s'avère indispensable.

Il existe un très large ensemble d'algorithmes numériques adaptés à la résolution de l'équation (5.8). Leur exposé dépasse largement le cadre de ce cours, aussi se limitera-t-on à la présentation d'un algorithme particulier faisant partie d'une classe plus large d'algorithmes, dénommés algorithmes de Newmark.

L'équation à résoudre est réécrite sous la forme :

$$(5.10) \quad M a_{n+1} + c v_{n+1} + k(d_{n+1}) d_{n+1} = f_{n+1}$$

dans laquelle  $a$ ,  $v$  et  $d$  représentent l'accélération, la vitesse et le déplacement et  $f$  les efforts appliqués. Comme indiqué par l'équation (5.10), pour un système non-linéaire  $k$  dépend du déplacement  $d$ . Un schéma d'intégration défini par l'équation (5.10) est dit implicite car il fait intervenir les grandeurs  $a_{n+1}$ ,  $v_{n+1}$ ,  $d_{n+1}$  qui sont inconnues à l'instant  $t_{n+1}$ .

Les grandeurs  $a$ ,  $v$  et  $d$  sont connues à l'instant  $t_n$  et la résolution de (5.10) fournit les valeurs à  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ , où  $\Delta t$  est le pas de temps d'intégration.

La famille d'algorithmes de Newmark dépend de deux paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  et est basée sur les équations suivantes, qui adjointes à l'équation (5.10), permettent le calcul de  $a_{n+1}$ ,  $v_{n+1}$  et  $d_{n+1}$  :

$$(5.11a) \quad d_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1-2\beta) a_n + 2\beta a_{n+1}]$$

$$(5.11b) \quad v_{n+1} = v_n + \Delta t [(1-\gamma)a_n + \gamma a_{n+1}]$$

Les paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  conditionnent la stabilité et la précision de l'algorithme. En particulier la stabilité inconditionnelle de l'algorithme est obtenue pour  $2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2}$ . Des choix particuliers de  $\gamma$  et  $\beta$  permettent de retrouver des schémas d'intégration connus :

- accélération moyenne constante  $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4}$
- accélération linéaire  $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{6}$
- différence centrale  $\gamma = \frac{1}{2}, \beta = 0$

On notera que seul le premier schéma d'intégration est inconditionnellement stable; les deux autres ne sont stables que si le pas de temps est inférieur à une valeur critique,  $t_{crit}$ , proportionnelle à la période propre de l'oscillateur.

A titre d'illustration, le schéma d'accélération linéaire suppose que l'accélération varie linéairement au cours de l'incrément  $\Delta t$  (figure 5.8).

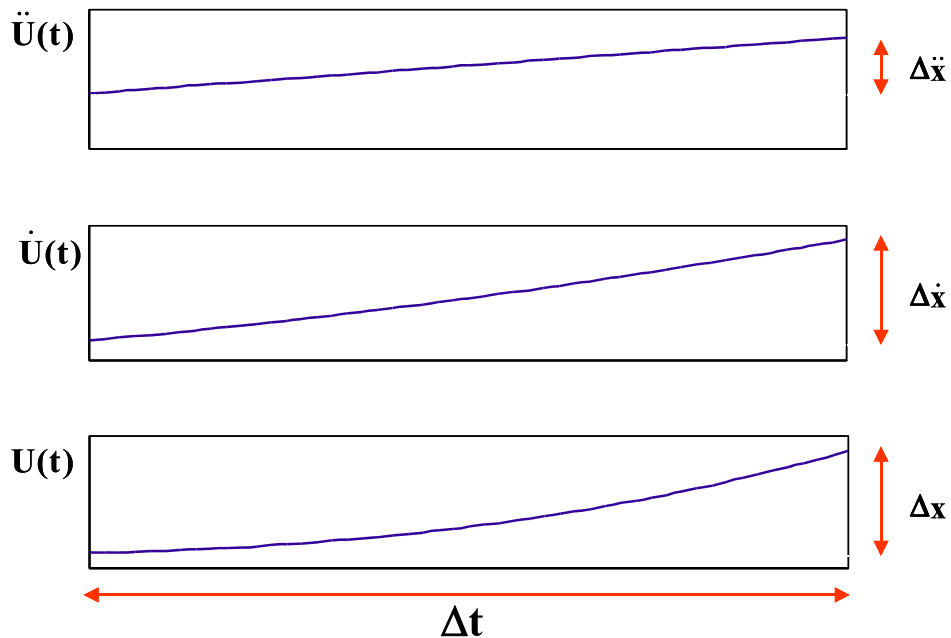


Figure 5.8 : Schéma d'intégration de l'accélération linéaire

A partir des équations (5.10) et (5.11), plusieurs implémentations sont possibles. La plus directe, mais pas la plus efficace, consiste à définir des prédicteurs,  $\tilde{d}_{n+1}$  et  $\tilde{v}_{n+1}$ , qui sont les données connues à  $t_n$  :

$$(5.12a) \quad \tilde{d}_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) a_n$$

$$(5.12b) \quad \tilde{v}_{n+1} = v_n + \Delta t (1 - \gamma) a_n$$

et à réécrire (5.10) sous la forme :

$$(5.13) \quad [M + \gamma \Delta t c + \beta \Delta t^2 k] a_{n+1} = f_{n+1} - c \tilde{v}_{n+1} - k \tilde{d}_{n+1}$$

qui se ramène à la résolution d'un système :

$$(5.14) \quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

dans lequel  $\mathbf{x} = a_{n+1}$  est l'inconnue et  $\mathbf{b}$  est connue;  $d_{n+1}$  et  $v_{n+1}$  sont alors calculés en ajoutant des correcteurs aux prédicteurs définis par (5.12) :

$$(5.15a) \quad d_{n+1} = \tilde{d}_{n+1} + \Delta t^2 \beta a_{n+1}$$

$$(5.15b) \quad v_{n+1} = \tilde{v}_{n+1} + \Delta t \gamma a_{n+1}$$

Le calcul peut alors procéder à la détermination de  $a$  à l'étape suivante.

D'un point de vue numérique, il est nettement préférable d'éliminer  $a_{n+1}$  et  $v_{n+1}$  de l'équation (5.10) à l'aide des relations (5.11) et de prendre pour inconnue  $d_{n+1}$ . Une fois  $d_{n+1}$  déterminée par une équation similaire à (5.14),  $v_{n+1}$  s'en déduit par une relation analogue à (5.11); la valeur de  $a_{n+1}$  est alors déterminée par l'équation (5.10) qui impose l'équilibre au temps  $t_{n+1}$ .

Il convient de réaliser que pour un système linéaire  $k$  est constant et l'algorithme précédent est direct. En particulier, pour autant que le pas de temps d'intégration reste constant, la matrice  $\mathbf{A}$ , et son inverse, sont déterminées une fois pour toute au début du calcul. Pour un système non-linéaire,  $k$  est fonction de  $d_{n+1}$ , qui est inconnue. La mise en œuvre de l'algorithme nécessite alors le recours, à l'intérieur d'un intervalle de temps  $\Delta t$ , à une résolution itérative pour assurer la compatibilité entre la raideur tangente  $k$  et le déplacement  $d_{n+1}$ . Plusieurs méthodes itératives (Newton-Raphson, Newton-Raphson modifiée, BFGS) sont disponibles pour la résolution du système non-linéaire (5.14). On se reportera à des cours d'analyse numérique pour l'exposé de ces méthodes.

## 5.7 REPONSE MAXIMALE DE L'OSCILLATEUR

De façon analogue à la procédure exposée pour l'oscillateur linéaire, il est possible de développer une approche permettant l'évaluation directe du déplacement maximal de l'oscillateur élastoplastique sans avoir recours à des calculs temporels donnant tout l'historique de la réponse. Notons, comme cela a été indiqué au paragraphe 4.0, que la grandeur dont on cherche à déterminer la valeur maximale est ici le déplacement et non l'effort.

Cette approche est basée sur la définition de spectres de réponse anélastiques. De façon analogue à la définition introduite pour l'oscillateur linéaire, on définit le spectre de réponse anélastique en pseudo-accelération, pour une valeur donnée de la ductilité  $\mu = u_m / u_y$ , comme l'ensemble des valeurs  $A_y = \omega^2 u_y$  fonction de la période élastique  $T = 2\pi / \omega$ . Notons que  $A_y$  est proportionnel à l'effort maximal supporté par le système :

$$(5.16) \quad f_y = M A_y = M \omega^2 u_y = k u_y$$

Les spectres de réponse anélastiques de l'accélérogramme de Lake Hughes (figure 5.4) sont présentés sur la figure 5.9 pour des ductilités de 1 (spectre élastique), 1.5, 2.0, 4.0 et 8.0.

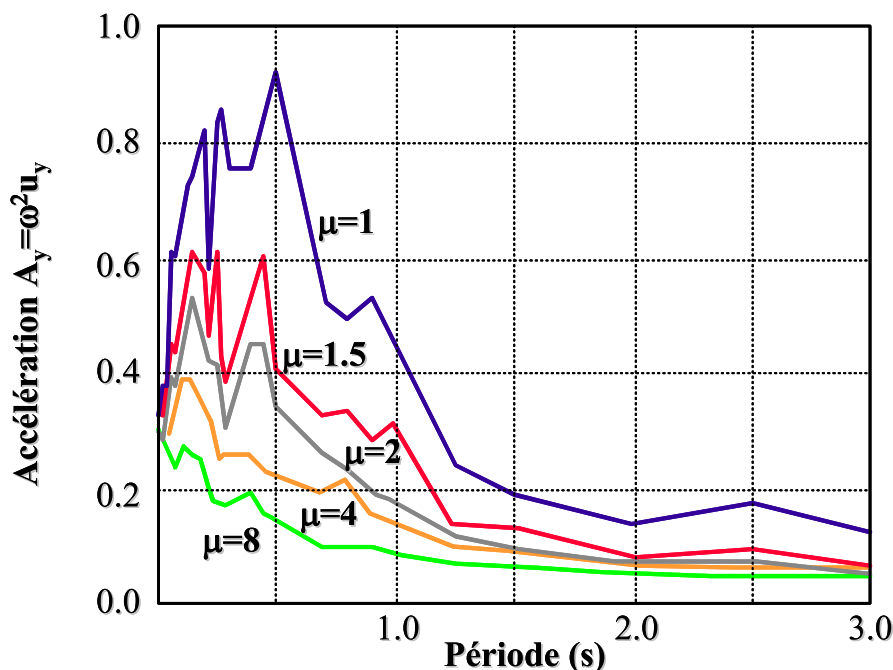


Figure 5.9 : Spectres anélastiques de l'accélérogramme de Lake Hughes

Le traitement statistique des spectres anélastiques des séismes enregistrés permet de construire, à partir des spectres élastiques, des spectres anélastiques pour différentes ductilités. Ces spectres sont les analogues de ceux de la figure 4.9 du chapitre 4. Un tel ensemble de spectres est présenté sur la figure 5.10.

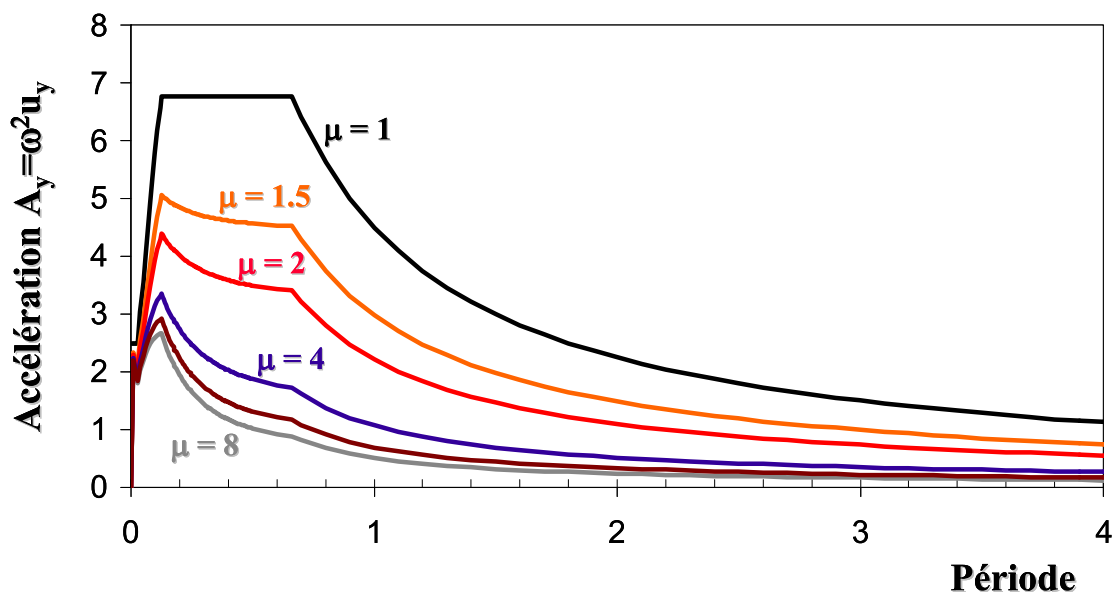


Figure 5.10 : Spectres anélastiques

Pour l'utilisation qui en est faite ci-après, il est utile de représenter ces spectres dans un diagramme déplacement-accélération en lieu et place du diagramme période-accélération de la figure 5.10. Cette transformation est effectuée à l'aide des relations (figure 5.3) :

$$(5.17) \quad \mu = \frac{u_\alpha}{u_y} \quad , \quad A_y = \frac{f_y}{M} = \omega^2 u_y$$

qui permettent d'exprimer  $u_\alpha$  en fonction de  $A_y$

$$(5.18) \quad u_\alpha = \mu u_y = \mu A_y \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2$$

La transformation (5.18), appliquée aux spectres de la figure 5.10, conduit à la représentation des spectres au format A-D (accélération-déplacement), donnée sur la figure 5.11.



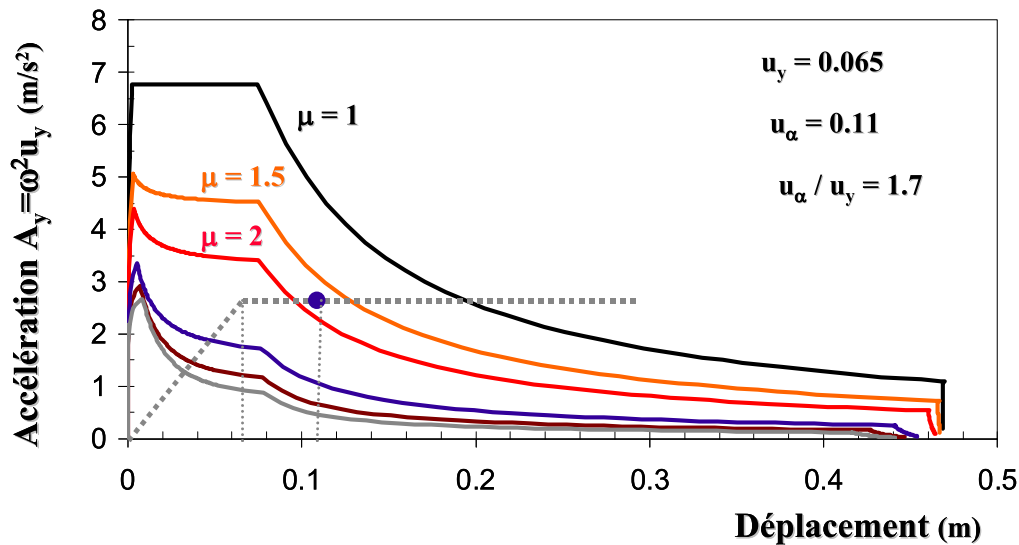


Figure 5.11 : Spectres anélastiques au format A-D

Dans cette représentation, en vertu de la relation (5.18), une droite issue de l'origine correspond à une période propre  $T$  constante de l'oscillateur.

La courbe effort-déplacement sous chargement monotone (figure 5.2a) peut être également représentée dans ce même diagramme en divisant les ordonnées par la masse  $M$  de l'oscillateur.

La détermination du déplacement maximal de l'oscillateur s'effectue alors en recherchant l'intersection de cette courbe avec le spectre anélastique correspondant à la ductilité appropriée. Pratiquement, on procède de la façon suivante :

- Détermination du déplacement élastique maximal  $u_y$  du système. Sur la figure 5.11, ce déplacement vaut 0.065 m.
- Estimation d'une ductilité  $\mu_i$  de l'oscillateur.
- Détermination du déplacement correspondant à l'intersection du spectre associé à la ductilité  $\mu_i$  avec la courbe de comportement de l'oscillateur; cette intersection correspond à un déplacement maximal  $(u_\alpha)_i$ .
- Calcul de la ductilité effectivement appelée dans l'oscillateur  $\mu_j = (u_\alpha)_i / u_y$
- Si  $\mu_j \neq \mu_i$ , reprise de la procédure avec une nouvelle estimation de  $\mu_i$ .

Pour les données de la figure 5.11, cette procédure conduit aux valeurs :

$$u_y = 0.065 \text{ m}, u_\alpha = 0.11 \text{ m}, \mu = u_\alpha / u_y = 1.7$$

dont le point représentatif est indiqué sur la figure 5.11.

La procédure décrite ci-dessus permet la détermination directe du déplacement maximal  $u_\alpha$  de l'oscillateur, dont la loi de comportement est donnée sur la figure 5.2, soumis à une sollicitation sismique dont les spectres de réponse anélastiques sont représentés sur la figure 5.10, ou sur la figure 5.11 dans le format A-D.

La connaissance de  $u_\alpha$  permet de vérifier le dimensionnement du système; si  $u_\alpha$  est trop élevé pour assurer la stabilité du système, la valeur de la limite d'élasticité  $f_y$  (égale à la résistance) du système doit être augmentée pour diminuer l'appel à ductilité. On dispose ainsi d'une méthode simple de dimensionnement d'un système non-linéaire à 1 degré de liberté soumis à une sollicitation sismique.



## CHAPITRE 6

### OSCILLATEUR A N DEGRES DE LIBERTE

#### 6.1 INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, on a vu qu'il était possible de réduire l'étude dynamique d'une structure à celle d'un système à 1 degré de liberté, dont l'équilibre dynamique est régi par une équation différentielle du second ordre. Cette configuration se rencontre lorsque le mouvement de la structure réelle est contraint par des conditions aux limites permettant de décrire sa cinématique par le mouvement d'un seul point.

Cependant, en règle générale, une structure possède plusieurs degrés de liberté et la réduction à un degré de liberté, obtenue en se donnant a priori la déformée  $\psi(x)$  de la structure, ne permet l'obtention que d'une solution approchée de la réponse. La difficulté réside alors dans l'évaluation de la qualité de l'approximation. Si les conditions aux limites et le chargement de la structure qui, rappelons-le, est induit par les forces d'inerties dépendant de la distribution des masses, sont tels que le mouvement de la structure s'effectue effectivement de façon préférentielle suivant cette déformée, alors l'approximation sera acceptable, et utile pour l'obtention d'une solution rapide.

Dans les autres cas, l'approximation est médiocre et il convient de décrire la réponse dynamique de la structure par les mouvements d'un nombre, fini ou infini, de points de celle-ci.

Comme on l'a indiqué au chapitre 1, les degrés de liberté d'une structure peuvent être représentés par le déplacement d'un nombre fini de points, ou par l'introduction de coordonnées généralisées représentant les amplitudes d'un nombre spécifié de déformées.

#### 6.2 EQUATION DE L'EQUILIBRE DYNAMIQUE

##### 6.2.1 MASSES CONCENTREES

Rappelons que le nombre de degrés de liberté d'un système est le nombre de composantes du déplacement requises pour exprimer les forces d'inertie se développant dans celui-ci. Ces déplacements sont évalués en un nombre de points de la structure, appelés nœuds où sont

concentrées les masses. Dans le cas le plus général, un nœud possède six mouvements possibles (3 translations et 3 rotations) et le nombre de degrés de liberté du système est égal à  $N=6p$  où  $p$  est le nombre de nœuds.

La figure 6.1 présente deux exemples de modélisations de structures planes entrant dans ce cadre. Dans le cas du portique à deux travées, les degrés de liberté sont constitués par les déplacements des nœuds situés à l'intersection des poteaux et des poutres, les masses de la structure sont concentrées en ces nœuds. A chaque nœud est affectée la masse des éléments de poteaux et planchers localisés à son voisinage et symbolisés sur la figure 6.1 par le rectangle pointillé pour le nœud central. Si la raideur axiale des poteaux est infinie, les seuls mouvements possibles des nœuds sont la translation horizontale et la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure, soit un nombre de degrés de liberté égal à  $2p=18$ .

Si de plus les planchers sont considérés comme infiniment rigides, la cinématique d'un niveau de plancher est décrite par le mouvement d'un de ses points; on aboutit au modèle "brochette" de la figure 6.1b, dans lequel la masse d'un niveau est concentrée en un point et la raideur en flexion-cisaillement des poutres verticales est égale à la somme des raideurs des poteaux d'un niveau. Le nombre de degrés de liberté a été réduit dans le cas présent à  $2p=6$ .

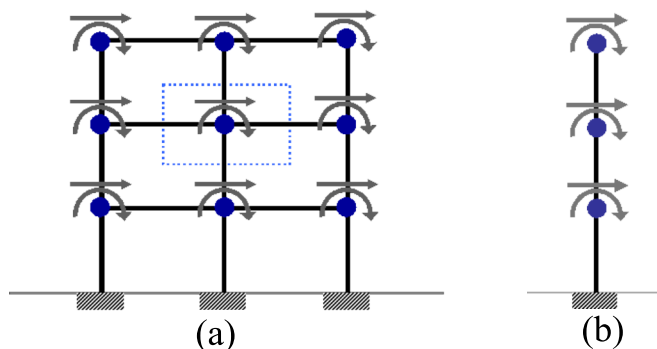


Figure 6.1 : Modélisation en masses concentrées

L'équation d'équilibre dynamique d'un système du type de celui de la figure 6.1 peut être obtenue par la méthode directe en écrivant en chaque nœud et pour *chaque degré de liberté* que la résultante des forces est nulle. Ces forces se composent de :

- forces élastiques  $\underline{f}_S$
- forces d'amortissement  $\underline{f}_D$
- forces d'inertie  $\underline{f}_I$
- forces appliquées extérieures  $\underline{p}$

L'équilibre général du système s'exprime, pour chaque degré de liberté  $i$  :

$$(6.1) \quad f_{Si} + f_{Di} + f_{Ii} = p_i$$

Chacune des forces résistantes (élastiques, d'amortissement ou d'inertie) s'exprime, de façon plus générale, à l'aide de coefficients d'influence traduisant la dépendance de la force en un point sur la valeur du mouvement de tous les autres points.

Ainsi, en supposant que le principe de superposition est valide, et donc que le système est linéaire, la force élastique développée suivant le degré de liberté  $i$  s'exprime par :

$$(6.2a) \quad f_{Si} = k_{i1} u_1 + k_{i2} u_2 + \dots = \sum_{j=1}^N k_{ij} u_j$$

soit pour l'ensemble des degrés de liberté, sous la forme matricielle :

$$(6.2b) \quad \underline{\mathbf{F}}_S = \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{U}}$$

Note : dans la suite, les matrices seront représentées par un symbole gras souligné une fois pour les vecteurs et deux fois pour les matrices carrées de dimension  $N \times N$ .

Le coefficient  $k_{ij}$  représente la force qu'il faut appliquer au degré de liberté  $i$  pour maintenir son déplacement nul sous l'effet d'un déplacement unité imposé au seul degré de liberté  $j$ .

La matrice  $\underline{\mathbf{K}}$  représentant l'ensemble des coefficients d'influence  $k_{ij}$  est la *matrice de rigidité* du système.

En supposant que les forces d'amortissement sont d'origine visqueuse, et dépendent donc de la vitesse, on peut écrire de façon similaire :

$$(6.3a) \quad f_{Di} = c_{i1} \dot{u}_1 + c_{i2} \dot{u}_2 + \dots = \sum_{j=1}^N c_{ij} \dot{u}_j$$

soit sous forme matricielle :

$$(6.3b) \quad \underline{\mathbf{F}}_D = \underline{\mathbf{C}} \dot{\underline{\mathbf{U}}}$$

Les coefficients  $c_{ij}$  sont les coefficients de la *matrice d'amortissement* du système.

Le coefficient  $c_{ij}$  représente la force qu'il faut appliquer au degré de liberté  $i$  pour maintenir sa vitesse nulle sous l'effet d'une vitesse unité imposée au seul degré de liberté  $j$ .

Finalement les forces d'inertie peuvent être exprimées de façon similaire :

$$(6.4a) \quad f_{ii} = m_{i1} \ddot{u}_1 + m_{i2} \ddot{u}_2 + \dots = \sum_{j=1}^N m_{ij} \ddot{u}_j$$

soit sous forme matricielle :

$$(6.4b) \quad \underline{\mathbf{F}}_I = \underline{\mathbf{M}} \underline{\ddot{\mathbf{U}}}$$

La matrice des coefficients  $m_{ij}$  est la matrice de masse du système.

Le coefficient  $m_{ij}$  représente la force qu'il faut appliquer au degré de liberté  $i$  pour maintenir son accélération nulle sous l'effet d'une accélération unité imposée au seul degré de liberté  $j$ .

Regroupant les équations (6.2b), (6.3b) et (6.4b), l'équation d'équilibre dynamique du système s'écrit sous forme matricielle :

$$(6.5) \quad \boxed{\underline{\mathbf{M}} \underline{\ddot{\mathbf{U}}} + \underline{\mathbf{C}} \underline{\dot{\mathbf{U}}} + \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{P}}(t)}$$

Les matrices  $\underline{\mathbf{M}}$ ,  $\underline{\mathbf{C}}$  et  $\underline{\mathbf{K}}$  ont pour dimensions  $N \times N$ , et les vecteurs  $\underline{\mathbf{U}}$  et  $\underline{\mathbf{P}}$  pour dimensions  $N$  où  $N$  représente le nombre de degrés de liberté du système (égal au nombre de nœuds multiplié par le nombre de déplacements possibles du nœud).

## 6.2.2 COORDONNEES GENERALISEES

Dénotons par  $\underline{\mathbf{q}}$  le vecteur des  $N$  coordonnées généralisées du système,  $N$  étant le nombre de degrés de liberté. On postule que l'énergie cinétique et l'énergie potentielle s'expriment par les formes quadratiques suivantes :

$$(6.6) \quad T = \frac{1}{2} \underline{\dot{\mathbf{q}}}^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\dot{\mathbf{q}}}$$

$$(6.7) \quad V = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{q}}^T \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{q}}$$

Les forces généralisées, qui incluent les forces extérieures et les forces non conservatives, sont représentées par le vecteur  $\underline{\mathbf{Q}}$ , que par analogie avec l'oscillateur à un degré de liberté, on écrira :

$$(6.8) \quad \underline{\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{P}} - \underline{\mathbf{C}} \underline{\dot{\mathbf{q}}}$$

où  $\underline{\mathbf{P}}$  représente les charges appliquées.

Les équations de Lagrange du système (eq. 1.18) s'écrivent :

$$(6.9) \quad \frac{d}{dt}(\underline{\underline{\mathbf{M}}}\dot{\underline{\mathbf{q}}}) + \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{P}} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}\dot{\underline{\mathbf{q}}}$$

soit (6.10) 
$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}\ddot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}\dot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{P}}(t)$$

L'équation (6.10) a une structure identique à celle de l'équation (6.5), les inconnues n'étant plus les déplacements des nœuds où sont concentrées les masses, mais les coordonnées généralisées.

L'évaluation des matrices  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  est liée à la discrétisation spatiale du système.

## 6.3 STRUCTURE ET PROPRIETES DE LA MATRICE DE RIGIDITE

### 6.3.1 CONSTRUCTION DE LA MATRICE DE RIGIDITE

La définition de la matrice de rigidité (éq. 6.2b) montre que le terme  $k_{ij}$  de la matrice est égal à la force qu'il faut appliquer au degré de liberté  $i$  pour maintenir son déplacement nul sous l'effet d'un déplacement unitaire appliqué au seul degré de liberté  $j$ ; en particulier le terme  $k_{ii}$  est égal à la force qu'il faut appliquer au degré de liberté  $i$  pour lui imposer un déplacement unitaire tout en maintenant nuls les autres degrés de liberté.

L'exemple de la figure 6.2, constitué de deux masses reliées par des ressorts de raideur  $k_1$  et  $k_2$ , illustre cette définition.

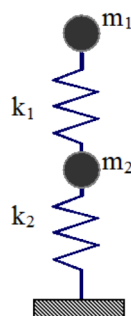


Figure 6.2 : Système masse-ressort à deux degrés de liberté



Le système possède deux degrés de liberté, les déplacements  $u_1$  et  $u_2$  des deux masses. Un déplacement unitaire ( $u_1=1$ ) appliqué à la masse  $m_1$ , en maintenant le déplacement  $u_2$  de la masse  $m_2$  nul, nécessite d'appliquer une force  $k_1$ , à la masse  $m_1$  et  $-k_1$  à la masse  $m_2$ . De même, un déplacement unitaire  $u_2$  appliqué à la masse  $m_2$ , tout en maintenant une valeur nulle pour  $u_1$ , nécessite l'application d'une force  $-k_1$  à la masse  $m_1$  et  $(k_1+k_2)$  à la masse  $m_2$ . Il en résulte la structure de la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ .

$$(6.11) \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1+k_2 \end{bmatrix}$$

Dans le cadre d'une formulation à l'aide des coordonnées généralisées, la construction de la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  s'appuie sur le principe des puissances virtuelles.

Prenons l'exemple d'une poutre droite dans le cadre d'une formulation en éléments finis. On a vu au chapitre 1 que dans cette modélisation les coordonnées généralisées étaient représentées par les degrés de liberté  $u_i$  (translation et rotation) des extrémités de la poutre. En se restreignant à l'étude des déplacements transverses de la poutre, il existe quatre degrés de liberté pour la poutre (déplacements transverses et rotations des deux extrémités de la poutre); le déplacement de tout point de la poutre s'exprime par :

$$(6.12) \quad u(x) = \sum \psi_i(x) u_i$$

où  $\psi_i(x)$  sont les fonctions de forme du déplacement qui ne sont pas précisées pour l'instant.  $\psi_i(x)$  représente le déplacement transverse de la poutre pour un déplacement unitaire  $u_i=1$ , et pour  $u_j (j \neq i)=0$ .

Considérons une rotation  $u_2=1$  de l'extrémité de la poutre (figure 6.3); sous l'effet de cette rotation, la déformée de la poutre est  $\psi_2(x)$  et le moment qui s'y développe vaut :

$$(6.13) \quad M(x) = EI(x) \psi_2''(x)$$

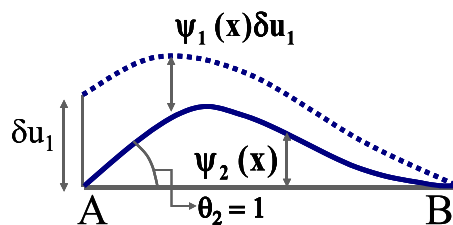


Figure 6.3 : Principe des puissances virtuelles pour la poutre

Pour calculer par exemple le terme  $k_{12}$  de la matrice de rigidité, on applique un champ de vitesse virtuelle  $\hat{\mathbf{u}}^T = \{\hat{u}_1, 0, 0, 0\}$ ; soit  $\mathbf{P}$  le vecteur des efforts appliqués aux degrés de liberté résultant de l'application de la déformée  $\psi_2(x)$ .

La puissance des efforts extérieurs dans le champ de vitesse virtuelle  $\hat{\mathbf{u}}$  vaut :

$$(6.14) \quad \mathcal{P}_e(\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{P}^T \hat{\mathbf{u}} = p_1 \hat{u}_1$$

Par suite de la définition donnée ci-dessus du terme  $k_{21}$ , il en résulte que :

$$(6.15) \quad p_1 = k_{21}$$

La puissance des efforts intérieurs, en négligeant la contribution de l'effort tranchant (poutre en flexion), s'écrit :

$$(6.16) \quad \mathcal{P}_i(\hat{\mathbf{u}}) = -\int_0^L M(x) d\hat{\mathcal{R}}$$

où  $\hat{\mathcal{R}}$  est la vitesse de rotation virtuelle associée à  $\hat{u}_1$ . Par définition de  $\psi_1(x)$ , la vitesse virtuelle  $\hat{u}_1$ , induit en tout point de la poutre une vitesse  $\psi_1(x)\hat{u}_1$  et donc une vitesse de rotation  $\hat{\mathcal{R}} = \psi_1'(x)\hat{u}_1 \Rightarrow d\hat{\mathcal{R}} = \psi_1''(x)\hat{u}_1 dx$ . L'équation (6.16) devient en tenant compte de (6.13) :

$$(6.17) \quad \mathcal{P}_i(\hat{\mathbf{u}}) = -\int_0^L EI(x)\psi_1''(x)\psi_2''(x)\hat{u}_1 dx$$

La puissance des quantités d'accélération étant nulle (problème statique), le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$(6.18) \quad \mathcal{P}_e(\hat{\mathbf{u}}) + \mathcal{P}_i(\hat{\mathbf{u}}) = 0$$

valable pour tout champ de vitesse virtuelle  $\hat{\mathbf{u}}$ ; il en résulte :

$$(6.19) \quad k_{21} = \int_0^L EI(x)\psi_1''(x)\psi_2''(x) dx$$

De façon générale, le terme  $k_{ij}$  de la matrice de rigidité s'obtient par :

$$(6.20) \quad k_{ij} = \int_0^L EI(x)\psi_i''(x)\psi_j''(x) dx$$

### 6.3.2 EXEMPLE : POUTRE DROITE

Les fonctions  $\psi_i(x)$  s'obtiennent aisément à partir de la résistance des matériaux. Rappelons que  $\psi_1(x)$  (respectivement  $\psi_3(x)$ ) représente la déformée de la poutre pour un déplacement unitaire du nœud A (respectivement B), les autres degrés de liberté étant maintenus égaux à 0. De même  $\psi_2(x)$  (respectivement  $\psi_4(x)$ ) représente la déformée de la poutre sous l'action d'une rotation unitaire du nœud A (respectivement B), les autres degrés de liberté étant maintenus égaux à 0 (figure 6.4).

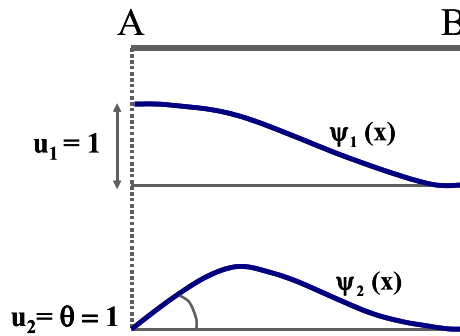


Figure 6.4 : Fonctions de forme de la poutre droite

$$(6.21a) \quad \psi_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$(6.21b) \quad \psi_2(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$$

$$(6.21c) \quad \psi_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$(6.21d) \quad \psi_4(x) = -x\left(\frac{x}{L}\right)\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Le déplacement d'un point quelconque de la poutre s'obtient alors par (6.12) où  $u_1$ ,  $u_3$  représentent les déplacements transverses des nœuds A et B,  $u_2$  et  $u_4$  les rotations de ces mêmes nœuds. L'équation différentielle du mouvement de la poutre prend la forme (6.10) dans laquelle  $\underline{\mathbf{q}}^T = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ .

L'application de l'équation (6.20) permet alors de calculer les éléments de la matrice de rigidité qui, dans le cas d'une inertie constante, prend la forme :

$$(6.22) \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}} = \frac{12EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{2} & -1 & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} \\ -1 & -\frac{L}{2} & 1 & -\frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} & -\frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix}$$

### 6.3.3 PROPRIETES DE LA MATRICE $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$

L'énergie élastique emmagasinée dans la structure sous l'action d'un champ de forces  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$  appliqué aux degrés de liberté du système est une quantité positive qui vaut :

$$(6.23) \quad V = \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i u_i$$

En tenant compte de la définition de la matrice de rigidité (eq. 6.2b), l'énergie élastique s'exprime également par :

$$(6.24) \quad V = \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{U}}}^T \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{U}}}$$

Cette quantité étant positive, il s'ensuit que la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  est *définie positive*. Elle possède donc une inverse, appelée *matrice de flexibilité* :

$$(6.25) \quad \underline{\underline{\mathbf{S}}} = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^{-1}$$

Par ailleurs, la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  est *symétrique*. Ce résultat, évident pour l'élément de poutre comme le montre l'équation (6.20), peut être obtenu de façon plus générale par application du théorème de Betti. Ce théorème exprime le résultat suivant : soit deux champs de forces  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_1$  et  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_2$  induisant des champs de déplacements  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}_1$  et  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}_2$ , alors le travail de  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_1$  dans le champ  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}_2$  est égal au travail de  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_2$  dans le champ  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}_1$ .

$$(6.26) \quad \underline{\underline{\mathbf{P}}}_1^T \underline{\underline{\mathbf{U}}}_2 = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_2^T \underline{\underline{\mathbf{U}}}_1$$

Tenant compte de  $\underline{\mathbf{P}}_i = \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{U}}_i$ , il vient :

$$(6.27a) \quad \underline{\mathbf{P}}_2^T \underline{\mathbf{U}}_1 = [\underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{U}}_2]^T \underline{\mathbf{U}}_1 = \underline{\mathbf{U}}_2^T \underline{\mathbf{K}}^T \underline{\mathbf{U}}_1$$

et

$$(6.27b) \quad \underline{\mathbf{P}}_1^T \underline{\mathbf{U}}_2 = [\underline{\mathbf{P}}_1^T \underline{\mathbf{U}}_2]^T = \underline{\mathbf{U}}_2^T \underline{\mathbf{P}}_1 = \underline{\mathbf{U}}_2^T \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{U}}_1$$

soit d'après le théorème de Betti (eq. 6.26) :

$$(6.28) \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{K}}}$$

### 6.3.4 STRUCTURE DE LA MATRICE $\underline{\mathbf{K}}$

La formulation de la matrice  $\underline{\mathbf{K}}$  dans le cadre de la méthode des éléments finis ne conduit pas à une matrice pleine dans laquelle tous les coefficients sont non nuls. Au contraire le couplage entre nœuds n'existe que pour les nœuds adjacents. Il en résulte qu'un grand nombre de termes sont nuls et que la matrice  $\underline{\mathbf{K}}$  a une structure bande. Par exemple dans le cas d'un assemblage de barres (1 degré de liberté par nœud), la matrice  $\underline{\mathbf{K}}$  sera tridiagonale.

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{pmatrix} & & & & & & & \mathbf{0} \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ \mathbf{0} & & & & & & & \end{pmatrix}$$

### 6.4 STRUCTURE ET PROPRIETES DE LA MATRICE DE MASSE

La modélisation en masses concentrées n'introduit aucun couplage entre les degrés de liberté. Il en résulte pour la matrice de masse une structure diagonale qui présente beaucoup d'avantages pour le traitement numérique.

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & m_i & & 0 \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & & m_n \end{bmatrix}$$

Si par contre pour la modélisation on adopte une formulation en coordonnées généralisées, il en résulte un couplage entre degrés de liberté et une structure bande analogue à celle de la matrice de rigidité.

Avec ce choix de modélisation, la construction de la matrice masse  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$  procède comme celle de la matrice de rigidité en appliquant le principe des puissances virtuelles aux forces d'inertie.

Reprenons l'exemple du paragraphe 3.1 et de la figure 6.3 : pour une accélération angulaire instantanée  $\ddot{u}_2 = 1$  du point A et en retenant pour distribution des accélérations le long de la poutre la même fonction  $\psi_2(x)$  que celle utilisée pour les déplacements, la puissance des efforts extérieurs, dans le champ de vitesse virtuelle  $\hat{\mathbf{u}} = \{\hat{u}_1, 0, 0, 0\}$ , vaut :

$$(6.29) \quad \mathcal{P}_e(\hat{\mathbf{u}}) = \underline{\mathbf{P}}^T \hat{\mathbf{u}} = p_1 \hat{u}_1$$

qui par définition est égale à  $m_{21} \hat{u}_1$

La puissance des efforts intérieurs est nulle car la poutre "n'a pas le temps de se déformer" et la puissance des quantités d'accélération vaut :

$$(6.30) \quad \mathcal{A}(\hat{\mathbf{u}}) = \int_0^L m(x) \psi_2(x) \psi_1(x) \hat{u}_1 dx$$

Le principe des puissances virtuelles conduit à :

$$(6.31) \quad m_{21} = \int_0^L m(x) \psi_2(x) \psi_1(x) dx$$

De façon plus générale, le terme  $m_{ij}$  vaut :

$$(6.32) \quad m_{ij} = \int_0^L m(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx$$

Tout comme la matrice de rigidité, la matrice de masse est *définie positive et symétrique*. Cette propriété résulte de la positivité de l'énergie cinétique  $T = \frac{1}{2} \dot{\underline{\mathbf{U}}}^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \dot{\underline{\mathbf{U}}}$  et de l'application du théorème de Betti aux forces d'inertie.

On notera que la construction d'une matrice de masse consistante est plus laborieuse que celle de la matrice de masses concentrées; d'un point de vue numérique, on introduit une complication supplémentaire dans le traitement des équations sans que le gain en précision soit nécessairement significatif. Aussi bien souvent, dans la pratique, on privilégie l'utilisation d'une matrice masse diagonale.

## 6.5 VIBRATIONS LIBRES NON AMORTIES

### 6.5.1 EXEMPLE

Considérons le portique plan de la figure 6.5 pour lequel on admettra que les planchers sont infiniment rigides dans leur plan pour autoriser la modélisation de la structure par un modèle brochette. Supposons de plus, à titre de simplification, que les poteaux possèdent une grande raideur axiale et de flexion. Dans ces conditions, les seuls déplacements possibles des nœuds sont les translations horizontales (figure 6.5b). Le système de la figure 6.5 possède trois degrés de liberté (3 nœuds x 1 déplacement possible). Avec les valeurs de raideur des poteaux et de masses indiquées sur la figure 6.5, les matrices masse et rigidité du système s'écrivent :

$$(6.33) \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}} = 600 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

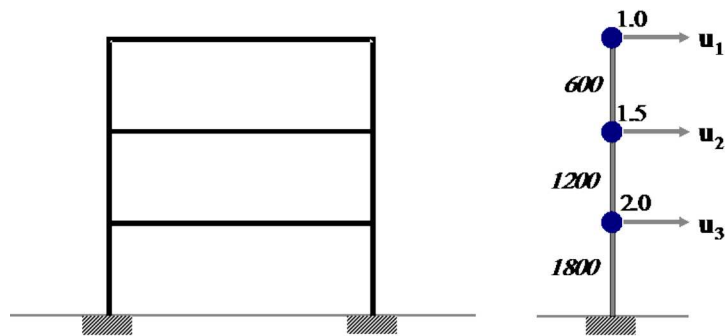


Figure 6.5 : a) portique plan b) modélisation brochette

Si on impose au portique de la figure 6.5 un déplacement initial au nœud 1 et que de cette position initiale on relâche le système, celui-ci entre en vibration. La variation dans le temps du déplacement du nœud intermédiaire, par exemple, prend l'allure indiquée sur la figure 6.6.

Cette vibration se poursuit indéfiniment dans le temps et, contrairement au cas de l'oscillateur à un degré de liberté, la vibration du système n'est plus sinusoïdale et ne présente pas de périodicité (comme cela est démontré par l'équation 6.41).

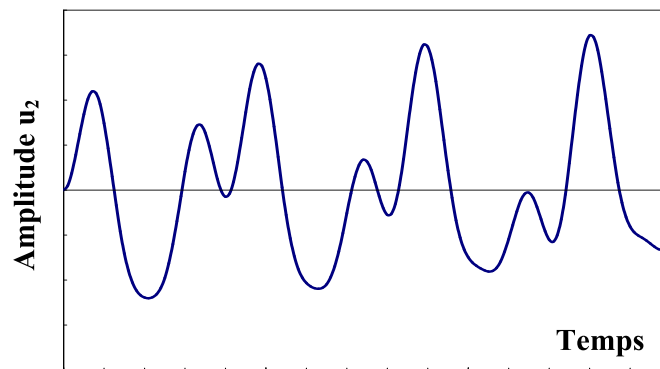


Figure 6.6 : Vibration libre du portique de la figure 6.5

## 6.5.2 FREQUENCES PROPRES ET MODES PROPRES

La vibration libre du système est solution de l'équation (6.5), ou (6.10), dans laquelle le terme d'amortissement est pris égal à 0 et les forces extérieures appliquées sont nulles :

$$(6.34) \quad \underline{\underline{\mathbf{M}}}\ddot{\underline{\underline{\mathbf{U}}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\underline{\mathbf{U}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Une solution particulière de ce système d'équations différentielles est de la forme :

$$(6.35) \quad \underline{\underline{\mathbf{U}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}\sin(\omega t + \theta)$$

Reportant (6.35) dans (6.34), il vient :

$$(6.36) \quad [\underline{\underline{\mathbf{K}}} - \omega^2 \underline{\underline{\mathbf{M}}}] \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Le système matriciel (6.36) n'a de solution non triviale ( $\underline{\underline{\mathbf{D}}} \neq \underline{\underline{\mathbf{0}}}$ ) que si, et seulement si, son déterminant est nul.

$$(6.37) \quad \det[\underline{\underline{\mathbf{K}}} - \omega^2 \underline{\underline{\mathbf{M}}}] = 0$$



Les matrices  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$  étant définies positives, il en résulte que l'équation (6.37) possède N racines réelles  $\omega_i^2$  où N est la dimension des matrices  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ , c'est-à-dire le nombre de degrés de liberté du système. Ces racines sont les valeurs propres du système (6.36).

On nomme *fréquence propre* du système les quantités :

$$(6.38) \quad f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$$

qui sont au nombre de N. La plus faible fréquence  $f_1$  est dénommée fréquence fondamentale,  $f_2$  fréquence d'ordre 2, etc.....

A chaque valeur propre  $\omega_i^2$  est associé un vecteur propre  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_i$ , solution de l'équation :

$$(6.39) \quad [\underline{\underline{\mathbf{K}}} - \omega_i^2 \underline{\underline{\mathbf{M}}}] \underline{\underline{\mathbf{D}}}_i = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

qui du fait que  $\omega_i^2$  est valeur propre du système est non nul et défini à une constante multiplicative près :

$$(6.40) \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}_i^T = \{d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n\}$$

Le système possède N vecteurs propres associés aux valeurs propres. Ces vecteurs propres sont appelés *modes propres* du système.

La solution générale de l'équation (6.36) s'écrit alors :

$$(6.41) \quad \underline{\underline{\mathbf{U}}} = \sum_{i=1}^N a_i \underline{\underline{\mathbf{D}}}_i \sin(\omega_i t + \theta_i)$$

où les constantes  $a_i$  et  $\theta_i$  sont déterminées par les conditions initiales et les  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_i$  sont définis à une constante multiplicative près.

### 6.5.3 PROPRIETES DES MODES PROPRES

Les modes propres, solutions de l'équation (6.39), possèdent la propriété fondamentale d'être orthogonaux 2 par 2 par rapport aux matrices de masse et de rigidité.

$$(6.42a) \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}_m^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_n = c \delta_{mn}$$

$$(6.42b) \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}_m^T \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_n = c' \delta_{mn}$$

où  $\delta_{mn}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{mn} = 1$  si  $m = n$ ,  $=0$  si  $m \neq n$ ),  $c$  et  $c'$  deux constantes.

La démonstration de la relation (6.42a) s'obtient par application du théorème de Betti aux forces d'inertie. Les forces d'inertie  $\underline{\underline{\mathbf{f}}}_{In}$  (respectivement  $\underline{\underline{\mathbf{f}}}_{Im}$ ) engendrent les déplacements  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_n$  (respectivement  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_m$ ), donc :

$$(6.43) \quad \underline{\underline{\mathbf{f}}}_{Im}^T \underline{\underline{\mathbf{D}}}_n = \underline{\underline{\mathbf{f}}}_{In}^T \underline{\underline{\mathbf{D}}}_m$$

Par définition des forces d'inertie

$$(6.44a) \quad \underline{\underline{\mathbf{f}}}_{Im}^T \underline{\underline{\mathbf{D}}}_n = -\omega_m^2 \left[ \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_m \right]^T \underline{\underline{\mathbf{D}}}_n = -\omega_m^2 \underline{\underline{\mathbf{D}}}_m^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_n$$

$$(6.44b) \quad \underline{\underline{\mathbf{f}}}_{In}^T \underline{\underline{\mathbf{D}}}_m = -\omega_n^2 \left[ \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_n \right]^T \underline{\underline{\mathbf{D}}}_m = -\omega_n^2 \underline{\underline{\mathbf{D}}}_n^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_m$$

Par soustraction des équations (6.44a) et (6.44b) et en transposant la deuxième équation, il vient :

$$(6.45) \quad (\omega_n^2 - \omega_m^2) \underline{\underline{\mathbf{D}}}_m^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_n = 0$$

lorsque  $\omega_n$  est différent de  $\omega_m$ , la propriété (6.42a) en découle. La propriété (6.42b) s'obtient en notant que  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  étant solution de (6.36) :

$$(6.46) \quad \omega_n^2 \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_n = \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_n$$

soit en prémultipliant par  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_m^T$

$$(6.47) \quad \omega_n^2 \underline{\underline{\mathbf{D}}}_m^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_n = \underline{\underline{\mathbf{D}}}_m^T \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_n$$

ce qui compte tenu de (6.42a) achève la démonstration.

La propriété d'orthogonalité des modes propres permet d'exprimer les pulsations propres  $\omega_i$  en fonction des modes propres : reprenant l'équation (6.39) et prémultipliant par  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_j^T$ , il vient du fait de (6.42) :

$$(6.48) \quad \boxed{\omega_i^2 = \frac{\underline{\underline{\mathbf{D}}}_i^T \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_i}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}_i^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_i}}$$

#### 6.5.4 NORMALISATION DES MODES PROPRES

Les modes propres sont définis à une constante multiplicative près. Cette constante peut être choisie de façon que :

- le déplacement d'un nœud particulier, par exemple le nœud 1 du portique de la figure 6.5, soit toujours égal à 1 dans tous les modes;
- le plus grand déplacement d'un nœud dans le mode considéré soit égal à 1;
- les modes propres soient normalisés par rapport à la matrice  $\underline{\underline{K}}$  ou à la matrice  $\underline{\underline{M}}$

$$(6.50) \quad \underline{\underline{D}}_i^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{D}}_i = 1 \quad , \quad \underline{\underline{D}}_i^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{D}}_i = 1$$

Dans les programmes de calculs éléments finis, c'est généralement cette dernière méthode qui est retenue et le plus souvent la normalisation est effectuée par rapport à la matrice de masse.

#### 6.5.5 EXEMPLE D'APPLICATION

Reprenant le portique de la figure 6.5, les fréquences propres du système sont solutions de :

$$\det \begin{bmatrix} 600 - \omega^2 & -600 & 0 \\ -600 & 1800 - 1.5\omega^2 & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000 - 2\omega^2 \end{bmatrix}$$

soit

$$\omega_1 = 14.5 \text{ rad/s} \quad , \quad \omega_2 = 31.1 \text{ rad/s} \quad , \quad \omega_3 = 46.1 \text{ rad/s}$$

Les modes propres sont obtenus comme solutions de l'équation (6.39). Ils sont dessinés sur la figure 6.7 en normant le déplacement du nœud au sommet à 1. dans tous les modes.

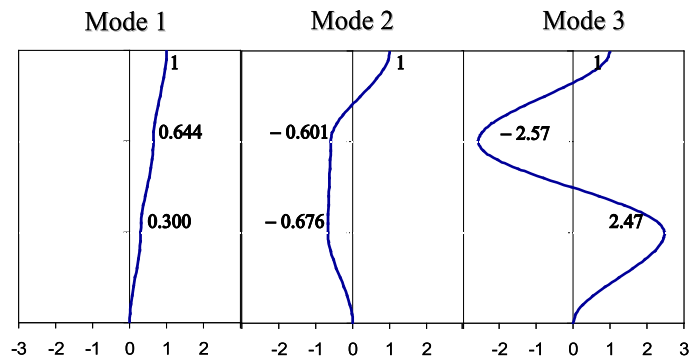


Figure 6.7 : Modes propres du portique

La réponse temporelle du système, causée par l'application d'un déplacement initial, d'amplitude  $\underline{d} = [0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$ , et d'une vitesse initiale nulle correspond à la somme des réponses de chaque mode (équation 6.41). Elle est représentée sur la figure 6.8.

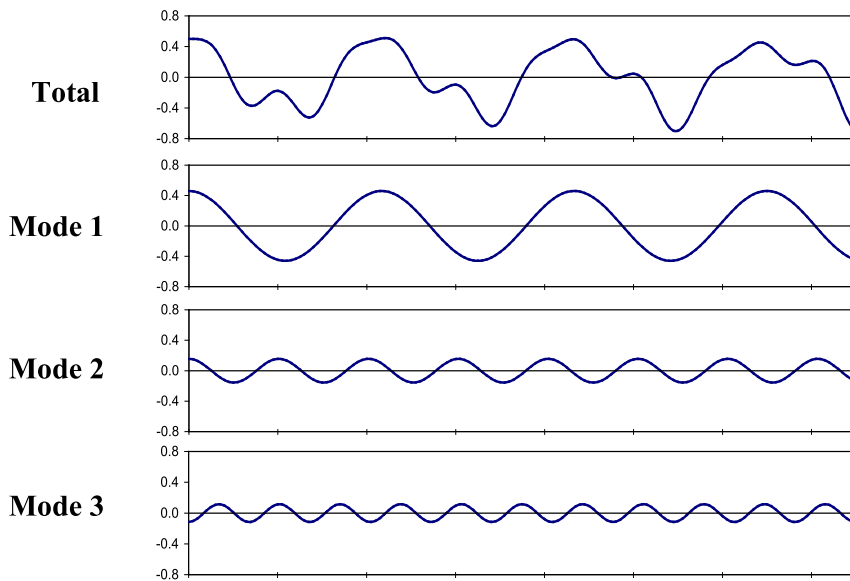


Figure 6.8 : Vibration libre du portique de la figure 6.5 (nœud 2)

### 6.5.6 CONCLUSIONS

On retiendra qu'un système à N degrés de liberté possède N fréquences propres réelles et N modes propres associés.

Ces modes propres constituent une base orthogonale complète. La base des modes propres, dénommée *base modale*, permet donc d'exprimer un déplacement quelconque du système en fonction des déformées modales.

## 6.6 VIBRATIONS FORCÉES NON AMORTIES

### 6.6.1 DECOUPLAGE DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

L'équation générale du mouvement (eq. 6.5) se réduit en l'absence de termes d'amortissement à :

$$(6.50) \quad \underline{\underline{\mathbf{M}}}\ddot{\underline{\mathbf{U}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{P}}(t)$$

Du fait de la structure non diagonale de la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$ , et bien que la matrice  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$  puisse souvent être considérée comme diagonale, il existe un couplage entre les degrés de liberté du système : l'équation de rang  $i$  du système (6.50) fait intervenir non seulement le degré de liberté  $u_i$  mais également des degrés de liberté  $u_k$  ( $k \neq i$ ).

L'exemple du portique de la figure 6.5 illustre ce couplage. Les matrices de masse et de rigidité du portique sont données par l'équation (6.33) et la forme développée de (6.50) devient :

$$(6.51) \quad \begin{cases} \ddot{u}_1 + 600(u_1 - u_2) = p_1 \\ 1.5\ddot{u}_2 + 600(-u_1 + 3u_2 - 2u_3) = p_2 \\ 2\ddot{u}_3 + 600(-2u_2 + 5u_3) = p_3 \end{cases}$$

Afin de découpler les équations (6.50), on utilise la propriété d'orthogonalité des modes propres. La base des modes propres constitue une base orthogonale complète qui permet d'exprimer tout déplacement  $\underline{\mathbf{U}}$  sur cette base :

$$(6.52) \quad \underline{\mathbf{U}} = \sum_{i=1}^N \underline{\mathbf{D}}_i y_i(t)$$

où  $y_i(t)$  joue le rôle de coordonnée généralisée et  $\underline{\mathbf{D}}_i$  le rôle de fonction de forme du déplacement. Ainsi dans l'exemple du paragraphe 5.5,  $y_i(t)$  représente le déplacement du sommet puisque  $\underline{\mathbf{D}}_i$  a été normé pour valoir 1 au point 1.

Reportant l'équation (6.52) dans (6.50), prémultipliant par  $\underline{\mathbf{D}}_j^T$  les deux membres de l'équation, il vient :

$$(6.53) \quad \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{M}} \sum_{i=1}^N \underline{\mathbf{D}}_i \ddot{y}_i(t) + \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{K}} \sum_{i=1}^N \underline{\mathbf{D}}_i y_i(t) = \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{P}}$$

Tenant alors compte de la propriété d'orthogonalité (6.42), l'équation (6.53) se réduit à :

$$(6.54) \quad \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{D}}_j \ddot{y}_j(t) + \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{D}}_j y_j(t) = \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{P}} \quad , \quad j = 1, \dots, N$$

Définissant les quantités suivantes :

- masse généralisée  $m_j = \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{D}}_j$
- rigidité généralisée  $k_j = \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{D}}_j$
- chargement généralisé  $p_j = \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{P}}$

l'équation (6.54) s'écrit :

$$(6.55) \quad \ddot{y}_j(t) + \omega_j^2 y_j(t) = \frac{p_j(t)}{m_j} \quad , \quad j = 1, \dots, N$$

dans laquelle on a posé :

$$(6.56) \quad \omega_j^2 = \frac{k_j}{m_j}$$

Sous la forme (6.55) on reconnaît l'équation d'équilibre dynamique de l'oscillateur simple à un degré de liberté.

Ainsi, l'utilisation de la base modale a permis la transformation du système (6.50) de N équations différentielles couplées en N équations différentielles découplées (éq. 6.55, avec  $j=1, \dots, N$ ). La solution  $y_j$  de chacune de ces équations est obtenue par les techniques exposées au chapitre 3 (intégrale de Duhamel, transformation de Fourier) et la solution générale est donnée par l'équation (6.52).

## 6.6.2 EXEMPLE

Les modes du portique de la figure 6.5 ont été déterminés au paragraphe 5.5. Décomposant les déplacements  $u_i$  ( $i=1, \dots, 3$ ), sur cette base modale, on obtient :

$$(6.57) \quad \begin{cases} u_1(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \\ u_2(t) = 0.644y_1(t) - 0.601y_2(t) - 2.57y_3(t) \\ u_3(t) = 0.300y_1(t) - 0.676y_2(t) + 2.47y_3(t) \end{cases}$$

Les grandeurs généralisées  $m_i$  et  $k_i$  valent :

$$\begin{array}{lll} m_1=1.802 & m_2=2.456 & m_3=23.109 \\ k_1=380.045 & k_2=2367.227 & k_3=49110.480 \end{array}$$

En reportant (6.57) dans (6.51), on aboutit au système d'équations différentielles suivant :

$$(6.58) \quad \begin{cases} \ddot{y}_1(t) + 210.902y_1(t) = p_1(t)/1.802 \\ \ddot{y}_2(t) + 963.855y_2(t) = p_2(t)/2.456 \\ \ddot{y}_3(t) + 2125.167y_3(t) = p_3(t)/23.109 \end{cases}$$

Le système (6.58) traduit les mêmes équations d'équilibre que le système (6.51) mais sa structure est infiniment moins complexe : chaque inconnue  $y_i$  n'apparaît que dans une seule équation alors que les  $u_i$  apparaissaient dans plusieurs équations.

### 6.6.3 CALCUL DES EFFORTS

Une fois les déplacements  $\underline{U}$  déterminés, les efforts dans la structure s'obtiennent par :

$$(6.59) \quad \underline{F} = \underline{K} \underline{U}$$

soit pour chaque mode propre :

$$(6.60) \quad \underline{F}_j = \underline{K} \underline{U}_j = \underline{K} \underline{D}_j y_j(t)$$

Tenant compte du fait que  $\underline{D}_j$  est un vecteur propre (éq. 6.36) :

$$(6.61) \quad \underline{K} \underline{D}_j = \omega_j^2 \underline{M} \underline{D}_j$$

et (6.60) peut également s'écrire :

$$(6.62) \quad \underline{F}_j = \omega_j^2 \underline{M} \underline{D}_j y_j(t) \quad , \quad j = 1, N$$

Sous cette forme on reconnaît que la force  $\underline{\mathbf{F}}_j$  est le produit d'une masse par une quantité qui a la dimension d'une accélération.

Du fait de la structure (souvent) diagonale de la matrice  $\underline{\mathbf{M}}$ , la formulation (6.62) est préférable à la formulation (6.59) car elle nécessite moins d'opérations : la force au degré de liberté  $i$  dans le mode  $j$  s'écrit simplement :

$$(6.63) \quad f_{ij} = \omega_j^2 \left( \sum_{k=1}^N m_{ik} d_{kj} \right) y_j(t) = \omega_j^2 m_{ii} d_{ij} y_j(t)$$

La résultante globale des efforts résulte de la superposition de tous les modes :

$$(6.64) \quad \underline{\mathbf{F}} = \sum_{j=1}^N \underline{\mathbf{F}}_j = \sum_{j=1}^N \omega_j^2 \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{D}}_j y_j(t)$$

## 6.7 VIBRATIONS FORCÉES AMORTIES

### 6.7.1 GENERALITES

Le mouvement est régi par l'équation générale (6.5). Utilisant la décomposition sur la base modale définie par (6.52) et tenant compte des propriétés d'orthogonalité des modes, l'équation (6.5) se réduit au système de  $N$  équations différentielles :

$$(6.65) \quad m_j \ddot{y}_j(t) + \sum_{i=1}^N \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{C}} \underline{\mathbf{D}}_i \dot{y}_i(t) + k_j y_j(t) = p_j(t) \quad , \quad j = 1, \dots, N$$

A moins de faire une hypothèse sur la structure de la matrice d'amortissement  $\underline{\mathbf{C}}$ , les équations (6.65) ne sont plus découplées et la décomposition sur la base modale perd de son intérêt. La résolution des équations (6.5), ou (6.65), nécessite une connaissance de cette matrice d'amortissement.

Sous le terme matrice d'amortissement, on a coutume de désigner tous les phénomènes de dissipation d'énergie que l'on représente dans l'analyse par un amortissement visqueux équivalent (chapitre 3). Dans une structure, cette dissipation d'énergie provient de l'ouverture/fermeture de microfissures, de frottements développés aux liaisons de différents éléments de la structure, de la déformation des éléments secondaires généralement non modélisés, du frottement aux interfaces structure principale - éléments secondaires, du comportement anélastique dans les matériaux lié à l'amplitude des déformations induites.



Cette simple énumération, non exhaustive, suffit à indiquer qu'il n'est pas envisageable de construire la matrice d'amortissement à partir des propriétés géométriques et mécaniques de la structure.

Deux alternatives s'offrent à l'analyste :

- mesurer la dissipation d'énergie dans la structure soumise à des chargements cycliques et la traduire en termes de matrice d'amortissement équivalent,
- estimer a priori "l'amortissement" de la structure.

Ces différentes alternatives et leurs conséquences sur le traitement des équations (6.5) sont examinées ci-après.

### 6.7.2 DECOUPLAGE DES EQUATIONS

Si l'on fait l'hypothèse que les modes propres possèdent les mêmes propriétés d'orthogonalité par rapport à la matrice d'amortissement que par rapport aux matrices de masse et de rigidité, alors l'équation (6.65) se simplifie en :

$$(6.66) \quad \ddot{y}_j(t) + 2\xi_j \omega_j \dot{y}_j(t) + \omega_j^2 y_j(t) = \frac{p_j(t)}{m_j}, \quad j = 1, \omega, \dots, N$$

dans laquelle on a posé par analogie avec le cas de l'oscillateur simple à 1 degré de liberté :

$$(6.67) \quad \xi_j = \frac{c_j}{2m_j\omega_j}$$

La solution des N équations différentielles (6.66) peut alors être obtenue par les méthodes exposées au chapitre 3 pour l'oscillateur simple (intégrale de Duhamel, transformation de Fourier). Une fois les  $y_i$  déterminés, la réponse générale de la structure s'obtient par l'équation (6.52).

Pour aboutir aux équations (6.66), une hypothèse forte a été faite sur la structure de la matrice  $\underline{\underline{C}}$ . Avec cette hypothèse, les seules données nécessaires pour l'analyse sont constituées des pourcentages d'amortissement critique équivalent  $\xi_j$  dans chaque mode; cette quantité est communément désignée sous le terme *d'amortissement modal*.

L'amortissement modal peut être mesuré sur la structure ou plus habituellement calculé sur la base des amortissements équivalents des matériaux constitutifs.

### 6.7.2.1 MESURE DE L'AMORTISSEMENT MODAL

La bibliothèque Millikan, sur le campus de l'université de Caltech (Californie), fournit un exemple de mesures de l'amortissement sur une structure réelle.

Cet ouvrage a été sollicité à l'aide de vibreurs harmoniques convenablement disposés sur sa hauteur pour exciter son mode fondamental. Par ailleurs, on dispose sur le même ouvrage d'enregistrements accélérométriques recueillis lors de deux séismes l'ayant sollicité : séisme de Lytle Creek de magnitude 5.4 et d'accélération maximale au sol égale à 0.05g; séisme de San Fernando de magnitude 6.4 et d'accélération maximale au sol égale à 0.20g.

La figure 6.9 présente, pour l'excitation par vibreur, la réponse en accélération au sommet de l'immeuble en fonction de la fréquence d'excitation des vibreurs. L'enregistrement fait clairement apparaître un pic marqué à la fréquence de 1.49 Hz correspondant à la fréquence du mode fondamental.

Pour le mode fondamental de vibration, la structure répond comme un oscillateur à un degré de liberté pour lequel les résultats du chapitre 3 sont applicables. Une méthode d'identification inverse permet alors de déterminer le pourcentage d'amortissement critique reproduisant au mieux la courbe de la figure 6.9. La valeur obtenue est donnée dans le tableau 6.1.

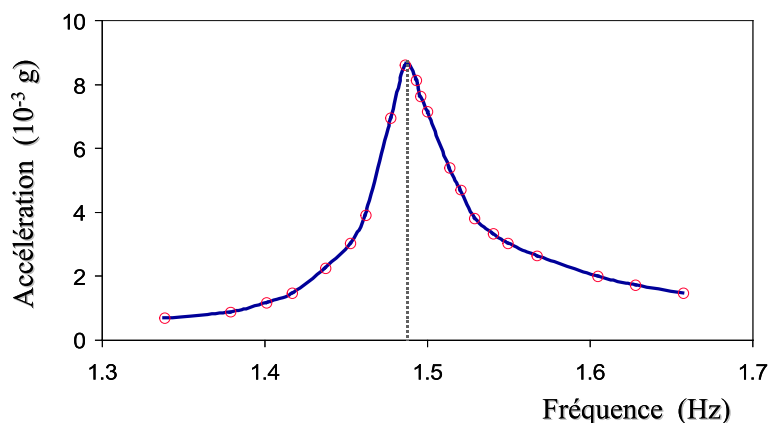


Figure 6.9 : Vibrations harmoniques forcées de la bibliothèque Millikan

La figure 6.10 présente pour le séisme de San Fernando les accélérations enregistrées à la base et au sommet de l'ouvrage, à partir desquelles le déplacement différentiel sur la hauteur peut être calculé (figure 6.10, haut). En reproduisant des résultats analogues à plusieurs niveaux, il est possible d'identifier les deux premiers modes de vibration de l'ouvrage et de calculer le pourcentage d'amortissement critique associé à chacun de ces modes. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 6.1.

Le tableau 6.1 fait apparaître des résultats importants, qui ont une portée plus générale que ceux relatifs à cet ouvrage : la période du mode fondamental croît lorsque l'amplitude de la sollicitation augmente depuis l'excitation par vibreur jusqu'au séisme le plus fort. Corrélativement l'amortissement du mode fondamental croît de 1% à 7%. On constate également que l'amortissement modal n'est pas constant et peut être plus élevé ou plus faible sur le deuxième mode que sur le premier.

Ces mesures confirment en particulier que l'amortissement dépend de l'amplitude de la déformation, par suite de non-linéarités plus prononcées se développant dans l'ouvrage.

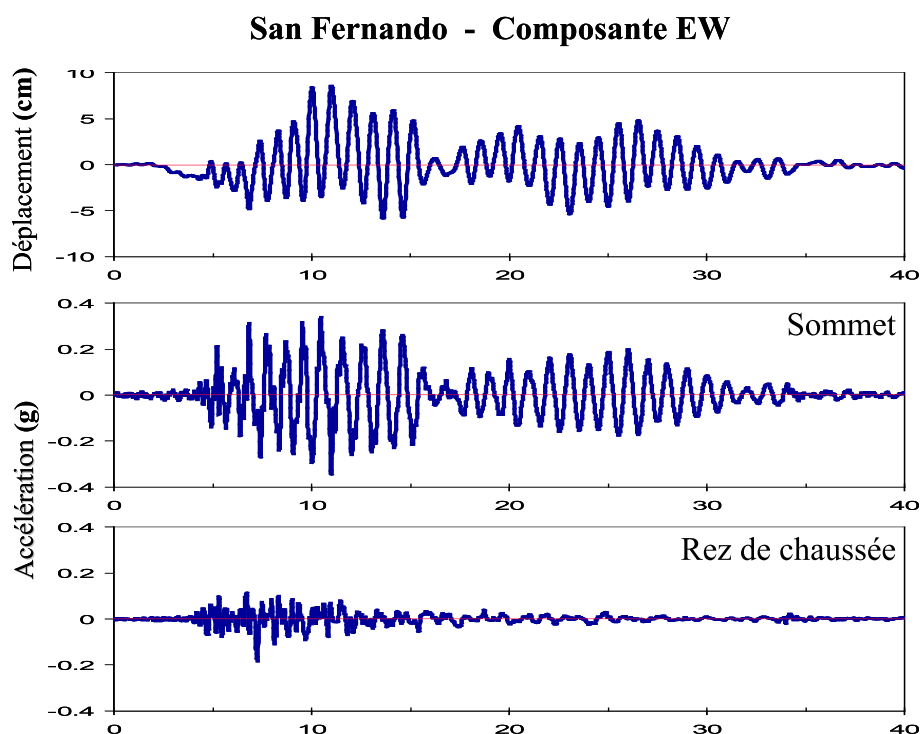


Figure 6.10 : Réponse sismique de la bibliothèque Millikan

Excitation	Accélération Toit (g)	Mode fondamental		Second mode	
		Période (s)	Amortissement (%)	Période (s)	Amortissement (%)
Générateur Vibrations	$3.10^{-3}$ à $17.10^{-3}$	0.66 - 0.68	0.7 - 1.5	-	-
Lytle Creek	0.035	0.71	2.2	0.18	3.6
San Fernando	0.348	0.98	7.0	0.20	5.9

Tableau 6.1 : Bibliothèque Millikan - Amortissements mesurés

### 6.7.2.2 VALEURS CARACTERISTIQUES D'AMORTISSEMENT

Hormis des cas exceptionnels comme celui de la bibliothèque Millikan, on ne dispose pas de mesures de l'amortissement sur l'ouvrage à l'étudier. L'analyste doit s'en remettre à son propre jugement ou à des valeurs conventionnelles publiées par voie réglementaire. Ces valeurs sont généralement rattachées à un type de matériau (béton, acier, bois...). Le tableau 6.2 présente un tel ensemble de valeurs dans lequel une distinction a été introduite en fonction du niveau de sollicitation atteint dans l'ouvrage.

Matériau \ Déformation	< 0.5 limite élastique	Voisinage limite élastique
	Béton armé	3 - 5
Béton précontraint	2 - 3	7 - 10
Acier soudé	2 - 3	5 - 7
Acier boulonné	5 - 7	10 - 15
Bois cloué	5 - 7	15 - 20

Tableau 6.2 : Valeurs caractéristiques d'amortissement (en pourcentages)

### 6.7.3 AMORTISSEMENT NON CLASSIQUE

Certains systèmes conduisent à des valeurs d'amortissement très contrastées entre les différentes parties de l'ouvrage. Cette situation se rencontre par exemple pour l'étude des phénomènes d'interaction sol-structure ou fluide-structure (figure 6.11). Généralement les structures présentent des pourcentages d'amortissement équivalents relativement faibles, de l'ordre de quelques pourcents (tableau 6.2), alors que le milieu avec lequel elles interagissent peut présenter des amortissements élevés (cas du sol où la valeur peut atteindre plusieurs dizaines de pourcents) ou du fluide dans lequel il est au contraire très faible (inférieur à 1 %).

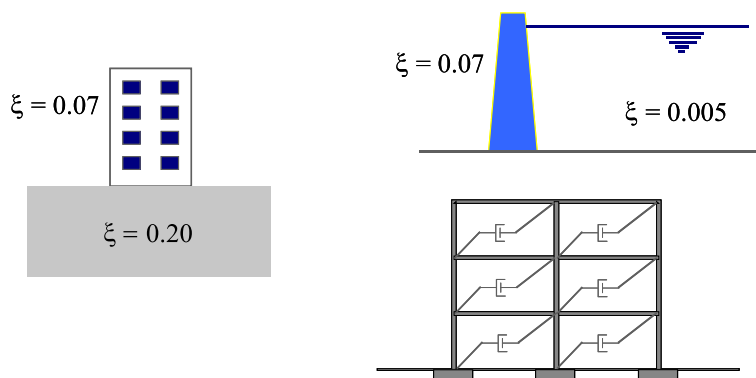


Figure 6.11 : Systèmes à amortissement contrasté

Dans le même ordre d'idée, l'utilisation d'amortisseurs concentrés conduit également à des valeurs contrastées de l'amortissement entre les différentes parties du système. Cette technique est utilisée par exemple pour l'isolation vibratoire des machines vibrantes, la conception ou le renforcement de structures en zone sismique, l'idée étant d'accroître la dissipation d'énergie et donc de limiter la part de l'énergie communiquée à l'ouvrage.

Lorsqu'une structure est composée d'un assemblage de plusieurs matériaux, l'usage veut que l'amortissement modal équivalent soit calculé au prorata de l'énergie élastique de déformation  $E_i$  emmagasinée dans chacun des matériaux.

$$(6.68) \quad \xi_{eq} = \frac{\sum \xi_i E_i}{\sum E_i}$$

Il peut cependant être nécessaire de construire une matrice d'amortissement lorsque le recours à des calculs par intégration temporelle s'avère indispensable pour la prise en compte de systèmes partiellement non linéaires.

Plusieurs techniques sont envisageables: définir a priori la forme de la matrice d'amortissement, construire cette matrice à partir de la donnée de l'amortissement modal ou, lorsque cela est possible, construire la matrice d'amortissement à partir des données géométriques et mécaniques du système (amortisseurs localisés). Les deux premières approches conduisent à un amortissement qualifié d'orthogonal car la diagonalisation de la matrice d'amortissement sur la base des modes propres est préservée. La dernière approche conduit généralement à un amortissement non classique qui nécessite le recours à des techniques de résolution spécifiques pour la résolution sur la base des modes.

## 6.7.4 CONSTRUCTION DE LA MATRICE D'AMORTISSEMENT

### 6.7.4.1 AMORTISSEMENT DE RAYLEIGH

On se donne a priori la structure de la matrice d'amortissement sous la forme d'une combinaison linéaire de la matrice de masse et de la matrice de rigidité.

$$(6.69) \quad \underline{\underline{C}} = \alpha \underline{\underline{M}} + \beta \underline{\underline{K}}$$

Il est évident que dans ce cas la propriété d'orthogonalité de la matrice d'amortissement par rapport aux modes propres est préservée. En reportant l'équation (6.69) dans l'équation générale (6.5) et en faisant usage de cette propriété, l'équation du mouvement s'écrit :

$$(6.70) \quad m_j \ddot{y}_j(t) + (\alpha m_j + \beta k_j) \dot{y}_j(t) + k_j y_j(t) = p_j(t) \quad , \quad j = 1, \dots, N$$

d'où il ressort que le pourcentage d'amortissement critique équivalent s'exprime par :

$$(6.71) \quad \xi_j = \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha}{\omega_j} + \beta \omega_j \right]$$

L'amortissement donné par l'équation (6.71) se compose de deux termes, l'un proportionnel à la pulsation et l'autre inversement proportionnel à celle-ci. Comme en général, ainsi qu'on l'a noté au chapitre 2, il est souhaitable de représenter la dissipation d'énergie dans le système par un amortissement indépendant de la fréquence, un choix approprié des valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  permet de satisfaire, de façon approximative, cette condition. La détermination de  $\alpha$  et  $\beta$  est illustrée sur la figure 6.12 pour le portique de la figure 6.5 : en se fixant deux valeurs de pulsations,  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , pour lesquelles l'amortissement donné par l'équation (6.71) prend la valeur recherchée, il s'ensuit qu'entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$  l'amortissement est sensiblement égal, quoique légèrement inférieur, à la valeur cherchée. La première pulsation  $\omega_1$  est prise égale à celle du mode fondamental du système et la seconde  $\omega_2$  à la plus grande pulsation d'intérêt pour l'analyse (dans le cas d'application de la figure 6.12,  $\omega_2$  a été choisie égale à la deuxième pulsation propre du portique).

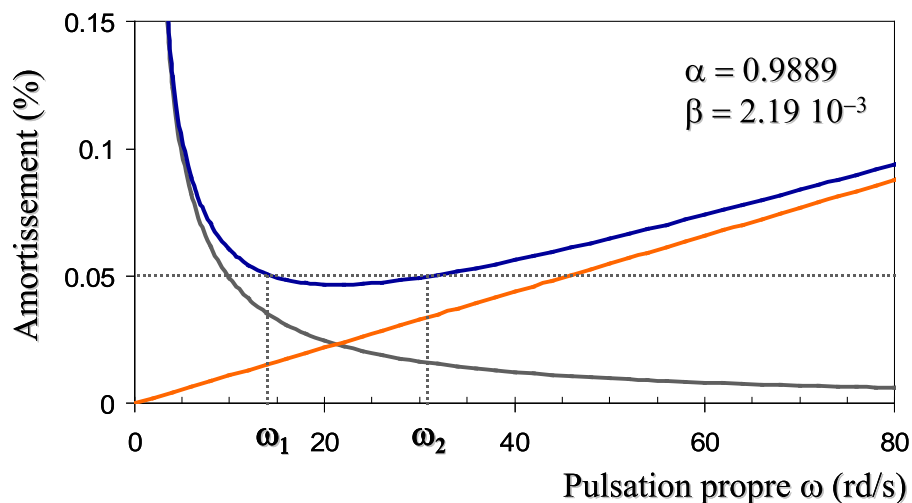


Figure 6.12 : Amortissement de Rayleigh

Cette modélisation de l'amortissement est classiquement utilisée pour la réalisation de calculs temporels sur des systèmes comportant une partie pseudo-élastique, pour laquelle il est nécessaire de spécifier un amortissement équivalent, et une partie non linéaire dans laquelle la dissipation d'énergie est directement prise en compte par la loi de comportement du matériau.

On notera que seule la combinaison linéaire de la matrice de masse et de la matrice de rigidité permet de donner naissance à un amortissement sensiblement indépendant de la

fréquence. L'utilisation d'un seul de ces termes donnerait naissance à un amortissement dépendant de la fréquence dont la réalité physique est généralement prise en défaut.

#### 6.7.4.2 AMORTISSEMENT DE CAUGHEY

Il s'agit d'une généralisation de l'amortissement de Rayleigh dans laquelle la matrice d'amortissement s'exprime comme une combinaison linéaire de  $p$  termes constitués du produit de la matrice de masse et de la matrice de rigidité.

$$(6.72) \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{M}} \sum_{b=0}^p a_b \left[ \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{K}} \right]^b$$

En procédant comme pour l'amortissement de Rayleigh, on montre que le pourcentage d'amortissement critique du mode  $j$  s'exprime par :

$$(6.73) \quad \xi_j = \frac{1}{2} \sum_{b=0}^p a_b \omega_j^{2b-1}$$

Ainsi en choisissant  $p=N-1$ , où  $N$  est le nombre de modes, il est théoriquement possible de respecter la valeur de l'amortissement modal pour chacun des modes du système. Dans la pratique en retenant un nombre de termes nettement inférieur,  $p \leq N-1$ , on obtient une approximation suffisante. La figure 6.13 illustre l'application de la formulation (6.72) au cas du portique de la figure 6.5, avec dans ce cas  $p=N-1$ .

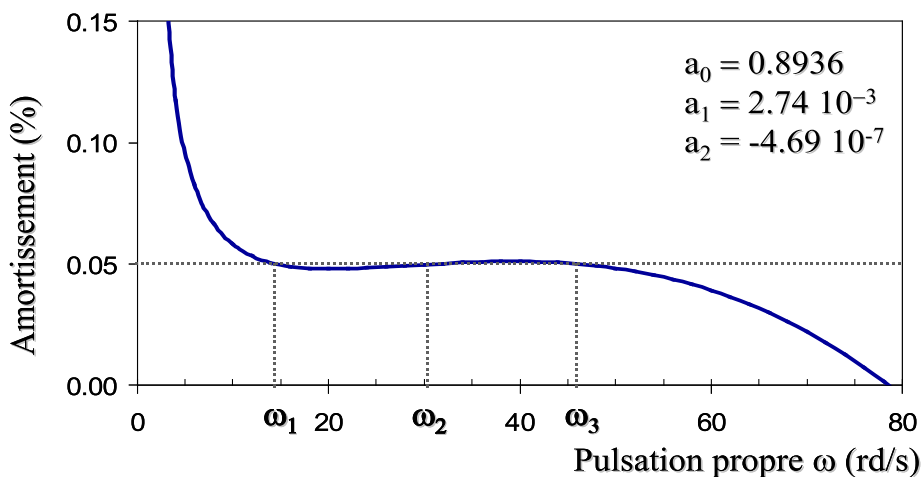


Figure 6.13 : Amortissement de Caughey

### 6.7.4.3 MATRICE D'AMORTISSEMENT MODAL

Il est également possible à partir de la donnée des amortissements modaux de construire directement la matrice d'amortissement associée. Soit  $\underline{\underline{C}}$  cette matrice et  $\underline{\underline{\Phi}}$  la matrice d'ordre N constituée des N vecteurs modaux :

$$(6.74) \quad \underline{\underline{\Phi}} = [\underline{\underline{D}}_1 \quad \underline{\underline{D}}_2 \quad \dots \underline{\underline{D}}_j \quad \dots \underline{\underline{D}}_N]$$

La matrice  $\underline{\underline{C}}$  doit satisfaire la relation :

$$(6.75) \quad \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{\Xi}}$$

dans laquelle la matrice  $\underline{\underline{\Xi}}$  a la structure suivante :

$$(6.76) \quad \underline{\underline{\Xi}} = \begin{bmatrix} c_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c_j & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & c_N \end{bmatrix}$$

avec des coefficients égaux à :

$$(6.77) \quad c_j = 2m_j \omega_j \xi_j$$

L'inversion de la relation (6.75) fournit l'expression de la matrice  $\underline{\underline{C}}$  :

$$(6.78) \quad \underline{\underline{C}} = [\underline{\underline{\Phi}}^T]^{-1} \underline{\underline{\Xi}} \underline{\underline{\Phi}}^{-1}$$

Le calcul de  $\underline{\underline{C}}$  par la relation (6.78) nécessite l'inversion de deux matrices d'ordre N et n'est pas efficace d'un point de vue numérique.

Tenant compte de la relation d'orthogonalité :

$$(6.79) \quad \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}} = \underline{\underline{m}}$$

dans laquelle la matrice  $\underline{\underline{m}}$  est diagonale avec des coefficients égaux aux masses généralisées  $m_j$ , on en déduit en prenant l'inverse de la relation (6.79) et en prémultipliant ou postmultipliant par les quantités  $\underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Phi}}$  et  $\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{M}}$ , les relations suivantes :



$$(6.80a) \quad \underline{\underline{\Phi}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{m}}}^{-1} \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{\mathbf{M}}}$$

$$(6.80b) \quad \left[ \underline{\underline{\Phi}}^T \right]^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\mathbf{m}}}^{-1}$$

En reportant les relations (6.80) dans la relation (6.78), il vient :

$$(6.81) \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \left[ \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\mathbf{m}}}^{-1} \right] \underline{\underline{\Xi}} \left[ \underline{\underline{\mathbf{m}}}^{-1} \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \right]$$

Les matrices  $\underline{\underline{\mathbf{m}}}$  et  $\underline{\underline{\Xi}}$  étant diagonales (éqs.6.75 et 6.79) le produit  $\underline{\underline{\mathbf{m}}}^{-1} \underline{\underline{\Xi}} \underline{\underline{\mathbf{m}}}^{-1}$  est immédiat; c'est une matrice diagonale  $\underline{\underline{\mathbf{k}}}$  dont les termes valent :

$$(6.82) \quad \kappa_{jj} = \frac{2\xi_j \omega_j}{m_j}$$

La matrice  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$  s'exprime alors comme le simple produit de matrices :

$$(6.83) \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\mathbf{k}}} \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{\mathbf{M}}}$$

En notant symboliquement  $\underline{\underline{\mathbf{G}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{B}}}$  la matrice carrée dont les termes  $g_{kl}$  sont les produits  $a_k b_l$  des composantes des deux vecteurs  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$  la relation (6.83) peut se développer sous la forme :

$$(6.84) \quad \underline{\underline{\mathbf{C}}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}} \left[ \sum_{j=1}^N \frac{2\xi_j \omega_j}{m_j} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_j \otimes \underline{\underline{\mathbf{D}}}_j^T \right] \underline{\underline{\mathbf{M}}}$$

Sous cette forme, le  $j^{\text{ième}}$  terme de la somme apparait comme la contribution du  $j^{\text{ième}}$  mode, d'amortissement  $\xi_j$ , à la matrice d'amortissement globale. Si ce terme est nul, alors le mode  $j$  ne contribue pas à l'amortissement global du système.

Exemple : Reprenons l'exemple du portique de la figure 6.5 et supposons les valeurs suivantes d'amortissement modal pour chacun des trois modes :

$$\text{Mode 1: } \xi = 0.05 \quad \text{mode 2: } \xi = 0.10 \quad \text{mode 3: } \xi = 0.0$$

Avec les données des modes propres de ce portique, qui ont été calculées précédemment :

$$m_1 = 1.802, \omega_1 = 14.5 \text{rd/s}, \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}_1^T = [1.0 \quad 0.644 \quad 0.300]$$

$$m_2 = 2.456, \omega_2 = 31.1 \text{rd/s}, \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}_2^T = [1.0 \quad -0.601 \quad -0.676]$$

Le calcul des matrices d'amortissement représentant les contributions de chaque mode donne :

$$\underline{\underline{C}}_1 = \begin{bmatrix} 0.8047 & 0.7773 & 0.4828 \\ & 0.7509 & 0.4664 \\ \text{Sym.} & & 0.2897 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{C}}_2 = \begin{bmatrix} 2.5326 & -2.2831 & -3.4240 \\ & 2.0582 & 3.0868 \\ \text{Sym.} & & 4.6293 \end{bmatrix}$$

La matrice d'amortissement globale est la somme  $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}_1 + \underline{\underline{C}}_2 + \underline{\underline{C}}_3$ , ce qui, compte tenu de la nullité de  $\underline{\underline{C}}_3$ , donne :

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 3.3372 & -1.5058 & -2.9412 \\ & 2.8091 & 3.5532 \\ \text{Sym.} & & 4.9190 \end{bmatrix}$$

On vérifiera que la matrice  $\underline{\underline{C}}$  est bien orthogonale par rapport aux modes propres du portique.

### 6.7.5 TRAITEMENT DE L'AMORTISSEMENT NON ORTHOGONAL

Dans tous les cas traités ci dessus, la matrice d'amortissement est orthogonale par rapport aux modes propres du système, soit par hypothèse, soit par construction. On bénéficie alors, en se plaçant sur la base des modes propres, du découplage des équations régissant le mouvement. Les méthodes de résolution correspondantes sont celles développées pour l'oscillateur à un degré de liberté, rappelées en 7.2. Dans le cas le plus général d'une matrice d'amortissement quelconque, on ne bénéficie plus de cette propriété. Il faut alors soit résoudre les équations par intégration temporelle, soit utiliser la méthode des modes complexes. On se contentera de donner ci dessous un bref aperçu de cette méthode.

Le principe consiste à réécrire les équations :

$$(6.85) \quad \underline{\underline{M}}\ddot{\underline{\underline{U}}} + \underline{\underline{C}}\dot{\underline{\underline{U}}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{0}}$$

en leur adjoignant un système complémentaire :

$$(6.86) \quad \begin{cases} \underline{\underline{M}}\dot{\underline{\underline{V}}} + \underline{\underline{C}}\underline{\underline{V}} + \underline{\underline{K}}\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{M}}\dot{\underline{\underline{U}}} = \underline{\underline{M}}\underline{\underline{V}} \end{cases}$$

La dimension du système passe alors de  $N \times N$  à  $2N \times 2N$ . Le système (6.86) peut également s'écrire :

$$(6.87) \quad \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}} \\ \underline{\underline{M}} & \underline{\underline{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{\underline{V}}} \\ \dot{\underline{\underline{U}}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\underline{\underline{M}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{V}} \\ \underline{\underline{U}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}$$

La résolution du système (6.87) se ramène à la résolution d'un problème classique aux valeurs propres :

$$(6.88) \quad \frac{1}{p} \begin{bmatrix} p\underline{\underline{\Psi}} \\ \underline{\underline{\Psi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ -\underline{\underline{K}}^{-1}\underline{\underline{M}} & -\underline{\underline{K}}^{-1}\underline{\underline{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p\underline{\underline{\Psi}} \\ \underline{\underline{\Psi}} \end{bmatrix}$$

qui peut être comparé à la formulation du problème aux valeurs propres réel qui ne fait intervenir que les matrices de masse et de rigidité :

$$(6.89) \quad \frac{1}{\omega^2} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{X}}$$

Les  $2N$  vecteurs propres solutions du problème aux valeurs propres complexes (6.88) permettent de construire la matrice modale complexe  $\underline{\underline{\Theta}}$  sous la forme :

$$(6.90) \quad \underline{\underline{\Theta}} = \begin{bmatrix} p\underline{\underline{\Psi}} & p\underline{\underline{\Psi}}^* \\ \underline{\underline{\Psi}} & \underline{\underline{\Psi}}^* \end{bmatrix}$$

où  $\underline{\underline{\Psi}}^*$  est le conjugué de  $\underline{\underline{\Psi}}$ .

La matrice modale complexe  $\underline{\underline{\Theta}}$  représente la transformation entre les coordonnées modales complexes et les coordonnées physiques :

$$(6.91) \quad \begin{bmatrix} \underline{\underline{V}} \\ \underline{\underline{U}} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\Theta}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}} \\ \underline{\underline{q}}^* \end{bmatrix}$$

Elle permet de diagonaliser le système (6.87) sous la forme :

$$(6.91) \quad \underline{\underline{\Theta}}^T \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}} \\ \underline{\underline{M}} & \underline{\underline{C}} \end{bmatrix} \underline{\underline{\Theta}} \begin{bmatrix} \dot{\underline{\underline{q}}} \\ \dot{\underline{\underline{q}}^*} \end{bmatrix} + \underline{\underline{\Theta}}^T \begin{bmatrix} -\underline{\underline{M}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{K}} \end{bmatrix} \underline{\underline{\Theta}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}} \\ \underline{\underline{q}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}$$

La diagonalisation de ces matrices conduit alors au système suivant :

$$(6.92) \quad \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_N & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{M}}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{\underline{q}}} \\ \dot{\underline{\underline{q}}^*} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\underline{\underline{M}}_N p_N & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & -\underline{\underline{M}}_N p_N^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{V}} \\ \underline{\underline{U}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}$$

La diagonale de la première matrice donne les  $N$  masses modales (réelles) du problème. Les composantes de la deuxième matrice diagonale sont à valeurs complexes.



## CHAPITRE 7

### REPONSE SISMIQUE DE L'OSCILLATEUR A N DEGRES DE LIBERTE

#### 7.1 INTRODUCTION

Le chapitre précédent a traité de la réponse de l'oscillateur à N degrés de liberté soumis à des sollicitations directement appliquées aux masses composant le système. Le mouvement du support de l'oscillateur, tel celui engendré par une sollicitation sismique, représente une autre forme de sollicitation dont l'étude constitue l'objet de ce chapitre. La démarche suivie dans ce chapitre est analogue à celle suivie pour l'oscillateur à un degré de liberté (chapitre 4).

#### 7.2 EQUATION DE L'EQUILIBRE DYNAMIQUE

La figure 7.1 schématise le système à étudier. La structure, constituée ici d'un portique à trois niveaux, est soumise à un mouvement de ses points d'appuis sur le sol. On supposera dans un premier temps que l'accélération  $\ddot{v}_s(t)$  est identique en tous les points d'appui et est représentée par un mouvement de translation.

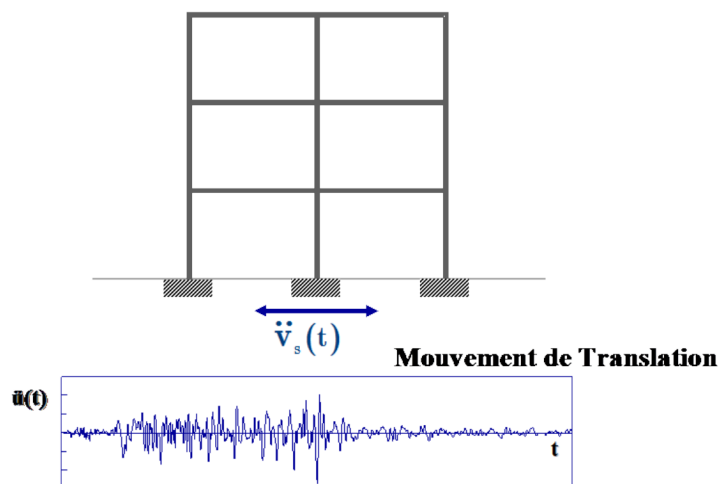


Figure 7.1 : Excitation sismique de l'oscillateur

La figure 7.2 représente, pour les besoins de la présentation et sans en diminuer la généralité, une schématisation simplifiée du système sous la forme d'un modèle brochette qui, rappelons-le, suppose que les planchers sont infiniment rigides et que leur cinématique peut être décrite par le mouvement d'un seul point.

On introduit deux référentiels, l'un fixe et l'autre lié au support du système. Les degrés de liberté (translations et rotations) des différents nœuds du modèle sont représentés dans le repère fixe par le vecteur  $\underline{V}$  de composantes  $\{V_1, V_2, \dots, V_N\}$  où  $N$  est le nombre de degrés de liberté; soit  $\underline{U}$  le vecteur donnant les mêmes quantités dans le repère mobile lié au support.

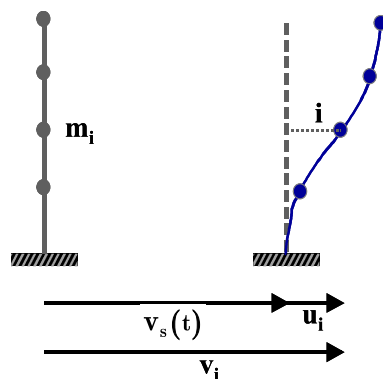


Figure 7.2 : Mouvements relatifs et absolus du système

La règle de composition des déplacements permet d'exprimer le déplacement absolu en fonction du déplacement relatif par :

$$(7.1) \quad \underline{V} = \underline{U} + \underline{\Delta} v_s(t)$$

où  $\underline{\Delta}$  est le vecteur donnant la direction de la sollicitation. Le vecteur  $\underline{\Delta}$  a pour composantes 1 dans la direction du mouvement de translation, 0 pour les autres degrés de liberté. Ainsi pour le portique de la figure 7.2, si on considère que chaque nœud possède trois degrés de liberté (deux translations dans le plan et une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure), le vecteur  $\underline{\Delta}$  s'écrira en ordonnant les degrés de liberté -translation horizontale, translation verticale et rotation d'axe horizontal- :

$$(7.2) \quad \underline{\Delta}^T = \{1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots\}$$

La loi de comportement des différents éléments de liaison reliant les masses,  $\underline{F}(\underline{U}, \underline{\dot{U}})$ , est choisie de type viscoélastique linéaire.

Dans ces conditions, les différentes forces agissant sur les masses du système sont :

forces élastiques

$$(7.3a) \quad \underline{\mathbf{F}}_S = \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{U}}$$

forces d'amortissement

$$(7.3b) \quad \underline{\mathbf{F}}_D = \underline{\mathbf{C}} \dot{\underline{\mathbf{U}}}$$

forces d'inertie

$$(7.3c) \quad \underline{\mathbf{F}}_I = \underline{\mathbf{M}} \ddot{\underline{\mathbf{V}}}$$

On notera que les forces internes, élastiques et d'amortissement, s'expriment en fonction des matrices de rigidité et d'amortissement et des déplacements et vitesses *relatives*.

Les forces d'inertie s'expriment en fonction de la matrice de masse et des accélérations *absolues*. L'équation d'équilibre dynamique du système s'obtient en écrivant la nullité de l'ensemble de ces efforts, soit :

$$(7.4) \quad \underline{\mathbf{M}} \ddot{\underline{\mathbf{V}}} + \underline{\mathbf{C}} \dot{\underline{\mathbf{U}}} + \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{0}}$$

Tenant compte de la relation (7.1), l'équation (7.4) devient :

$$(7.5) \quad \underline{\mathbf{M}} \ddot{\underline{\mathbf{U}}} + \underline{\mathbf{C}} \dot{\underline{\mathbf{U}}} + \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{U}} = -\underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{\Delta}} \ddot{v}_s(t)$$

Cette équation est analogue à l'équation (6.5) en définissant un chargement équivalent :

$$(7.6) \quad \underline{\mathbf{P}}_e(t) = -\underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{\Delta}} \ddot{v}_s(t)$$

### 7.3 DECOMPOSITION MODALE

L'équivalence de l'équation (7.5) et de l'équation (6.5) permet d'utiliser la décomposition modale explicitée au chapitre 6 pour découpler les équations (7.5) régissant l'équilibre dynamique du système. Appelant  $\underline{\Phi}$  la matrice de dimensions  $N \times N$  contenant les  $N$  vecteurs modaux  $\underline{\mathbf{D}}_j$ , sur la base modale, le vecteur  $\underline{\mathbf{U}}$  s'exprime par :

$$(7.7) \quad \underline{\mathbf{U}} = \underline{\Phi} \underline{\mathbf{Y}} = \sum_{j=1}^N \underline{\mathbf{D}}_j y_j(t)$$



Reportant dans (7.5), tenant compte des propriétés d'orthogonalité des vecteurs propres par rapport aux matrices  $\underline{\underline{K}}$  et  $\underline{\underline{M}}$ , et en faisant l'hypothèse que la matrice  $\underline{\underline{C}}$  possède la même propriété, on obtient les N équations découplées :

$$(7.8) \quad \ddot{y}_j(t) + 2\xi_j \omega_j \dot{y}_j(t) + \omega_j^2 y_j(t) = \frac{p_j(t)}{m_j}, \quad j = 1, \dots, N$$

dans laquelle on a posé avec les notations usuelles :

$$\text{masse généralisée} \quad m_j = \underline{\underline{D}}_j^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{D}}_j$$

$$\text{raideur généralisée} \quad k_j = \underline{\underline{D}}_j^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{D}}_j$$

$$\text{amortissement} \quad \xi_j = \frac{\underline{\underline{D}}_j^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{D}}_j}{2 m_j \omega_j}$$

$$\text{pulsation propre} \quad \omega_j^2 = \frac{k_j}{m_j}$$

$$\text{chargement généralisé} \quad p_j = -\underline{\underline{D}}_j^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Delta}} \ddot{v}_s(t) = -L_j \ddot{v}_s(t)$$

## 7.4 SOLUTION TEMPORELLE

Les méthodes d'analyse fréquentielle, ou temporelle, développées dans les chapitres précédents permettent alors d'obtenir les solutions des N équations découplées (7.8).

En particulier la réponse temporelle obtenue par l'intégrale de Duhamel s'écrit :

$$(7.9) \quad y_j(t) = -\frac{L_j}{m_j \omega_{Dj}} \int_0^t \ddot{v}_s(\tau) e^{-\xi_j \omega_j (t-\tau)} \sin[\omega_{Dj}(t-\tau)] d\tau$$

Posant :

$$(7.10) \quad a_j = \frac{\underline{\underline{D}}_j^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Delta}}}{\underline{\underline{D}}_j^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{D}}_j}$$

Le déplacement  $\underline{\underline{U}}_j$  dans le mode j s'écrit

$$(7.11) \quad \underline{\underline{U}}_j = \underline{\underline{D}}_j y_j(t) = a_j \underline{\underline{D}}_j q_j(t)$$

où  $q_j(t)$  est solution de l'équation différentielle

$$(7.12) \quad \ddot{q}_j(t) + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t) = -\ddot{v}_s(t) \quad , \quad j = 1, \dots, N$$

$a_j$  est appelé *facteur de participation*. L'équation (7.10) montre clairement que la valeur de  $a_j$  dépend de la norme adoptée pour le mode propre  $\underline{\mathbf{D}}_j$ . Le mode propre  $\underline{\mathbf{D}}_j$  étant défini à une constante multiplicative près, une multiplication de  $\underline{\mathbf{D}}_j$  par un coefficient  $\lambda$ , divise le facteur de participation par  $\lambda$ .

On notera la propriété remarquable relative aux facteurs de participation:

$$(7.13) \quad \sum_{j=1}^N a_j \underline{\mathbf{D}}_j = \underline{\mathbf{\Delta}}$$

qui s'obtient immédiatement en prémultipliant (7.13) par  $\underline{\mathbf{D}}_i^T \underline{\mathbf{M}}$  et en tenant compte de la propriété d'orthogonalité des modes propres et de la relation (7.10) :

$$(7.14) \quad \underline{\mathbf{D}}_i^T \underline{\mathbf{M}} \sum_{j=1}^N a_j \underline{\mathbf{D}}_j = \underline{\mathbf{D}}_i^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{D}}_i a_i = \underline{\mathbf{D}}_i^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{\Delta}}$$

Une fois la réponse de chaque mode déterminée, le déplacement total s'obtient par sommation sur l'ensemble des modes :

$$(7.15) \quad \underline{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^N \underline{\mathbf{U}}_j = \sum_{j=1}^N a_j \underline{\mathbf{D}}_j q_j(t)$$

## 7.5 CALCUL DES EFFORTS

La réponse en déplacement dans le mode  $j$  étant déterminée, l'effort élastique dans le système s'obtient par :

$$(7.16) \quad \underline{\mathbf{F}}_j = \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{U}}_j = a_j \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{D}}_j q_j(t)$$

Tenant compte du fait que  $\underline{\mathbf{D}}_j$  est un vecteur propre (éq. 6.36), il vient :

$$(7.17) \quad \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{D}}_j = \omega_j^2 \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{D}}_j \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{F}}_j = a_j \omega_j^2 \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{D}}_j q_j(t)$$

dans laquelle on reconnaît le produit de la masse du système par une quantité ayant une dimension d'accélération.

L'effort total résultant de la superposition de l'ensemble des modes s'écrit :

$$(7.18) \quad \underline{\mathbf{F}} = \sum_{j=1}^N \underline{\mathbf{F}}_j = \sum_{j=1}^N a_j \omega_j^2 \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{D}}_j q_j(t)$$

## 7.6 VALEURS MAXIMALES DE LA REPONSE

### 7.6.1 VALEUR MAXIMALE PAR MODE

Dans les équations (7.15) et (7.18),  $q_j(t)$  peut être obtenue par sa variation temporelle donnée par l'intégrale de Duhamel, solution de l'équation (7.12) :

$$(7.19) \quad q_j(t) = -\frac{1}{\omega_{Dj}} \int_0^t \ddot{v}_s(\tau) e^{-\xi_j \omega_j (t-\tau)} \sin[\omega_{Dj}(t-\tau)] d\tau$$

Pour le dimensionnement d'un système, la connaissance de la variation temporelle de l'effort  $\underline{\mathbf{F}}$ , donc des  $q_j(t)$ , n'est pas obligatoirement nécessaire et seule la valeur maximale est requise.

Par analogie avec les développements du chapitre 4 pour l'oscillateur à un degré de liberté, le *spectre de réponse* de la sollicitation  $\ddot{v}_s(t)$  permet d'accéder, pour chaque mode, à cette grandeur. On rappelle que le spectre de réponse en déplacement est pour l'ensemble des couples  $(\omega_j, \xi_j)$  la quantité :

$$(7.20) \quad S_D(\omega_j, \xi_j) = \max_t \left[ -\frac{1}{\omega_{Dj}} \int_0^t \ddot{v}_s(\tau) e^{-\xi_j \omega_j (t-\tau)} \sin[\omega_{Dj}(t-\tau)] d\tau \right]$$

Un exemple de spectre de réponse en déplacement est donné sur la figure 4.7 pour l'accélérogramme de Lake Hughes (figure 4.3).

Introduisant la *pseudo-accélération* définie par :

$$(7.21) \quad S_a(\omega_j, \xi_j) = \omega_j^2 S_D(\omega_j, \xi_j)$$

le déplacement maximal et l'effort maximal dans le mode j sont alors donnés par :

$$(7.22a) \quad \underline{\mathbf{U}}_{j\max} = a_j \underline{\mathbf{D}}_j S_D(\omega_j, \xi_j)$$

$$(7.22b) \quad \underline{\mathbf{F}}_{j\max} = a_j \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{D}}_j S_a(\omega_j, \xi_j)$$

On rappelle que la pseudo-accélération est en général différente de l'accélération absolue (voir chapitre 4); les deux quantités ne sont égales que pour un système non amorti. La force s'obtient à partir de la pseudo-accélération et non de l'accélération absolue.

Un exemple de spectres en pseudo-accélération est donné sur la figure 4.8 pour l'accélérogramme de Lake Hughes.

## 7.6.2 VALEUR MAXIMALE DE LA REPONSE TOTALE

L'utilisation du spectre de réponse ne permet d'accéder qu'à la valeur maximale de la réponse dans chaque mode. Ces maxima ne se produisent pas tous au même instant et se pose alors le problème du cumul des réponses modales.

Désignant par  $\underline{\mathbf{R}}$ , exprimé sous la forme de l'équation (7.22), le vecteur contenant les réponses modales maximales d'une quantité donnée (déplacement en un point, effort, contrainte dans un élément...), de composantes  $r_j$ , une enveloppe de la réponse maximale pour l'ensemble des modes est évidemment obtenue en effectuant la somme des valeurs maximales des réponses modales.

$$(7.23) \quad r \leq \sum_{j=1}^N |r_j|$$

Toutefois cette approche est trop conservatrice et peut conduire à une surestimation importante de la réponse. On lui préfère la règle de cumul, dite quadratique complète CQC (Complete Quadratic Combination), qui exprime la réponse maximale sous la forme :

$$(7.24) \quad R = \sqrt{\underline{\mathbf{R}}^T \underline{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{R}}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{ij} r_j r_i}$$

où  $\rho_{ij}$ , élément de la matrice  $\underline{\mathbf{P}}$ , représente le coefficient de corrélation entre les modes i et j. Il dépend des pulsations propres ( $\omega_i, \omega_j$ ) et des pourcentages d'amortissement critique ( $\xi_i, \xi_j$ ) des deux modes. La formulation de  $\rho_{ij}$  est donnée par :

$$(7.25) \quad \rho_{ij} = \frac{8 \sqrt{\xi_i \xi_j} \omega_i \omega_j (\omega_i \xi_i + \omega_j \xi_j) \omega_i \omega_j}{(\omega_i^2 - \omega_j^2)^2 + 4 \xi_i \xi_j (\omega_i^2 + \omega_j^2) \omega_i \omega_j + 4 (\xi_i^2 + \xi_j^2) \omega_i^2 \omega_j^2}$$

On notera que dans l'équation (7.24) les quantités  $r_i$  et  $r_j$  doivent être exprimées avec leur signe respectif (positif ou négatif) et que leur produit peut donc être positif ou négatif.

La figure 7.3 présente, dans le cas particulier où les amortissements des deux modes sont égaux ( $\xi = \xi_i = \xi_j$ ), la variation du coefficient de corrélation  $\rho_{ij}$  en fonction de  $\zeta_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j}$  pour différentes valeurs de  $\xi$ .

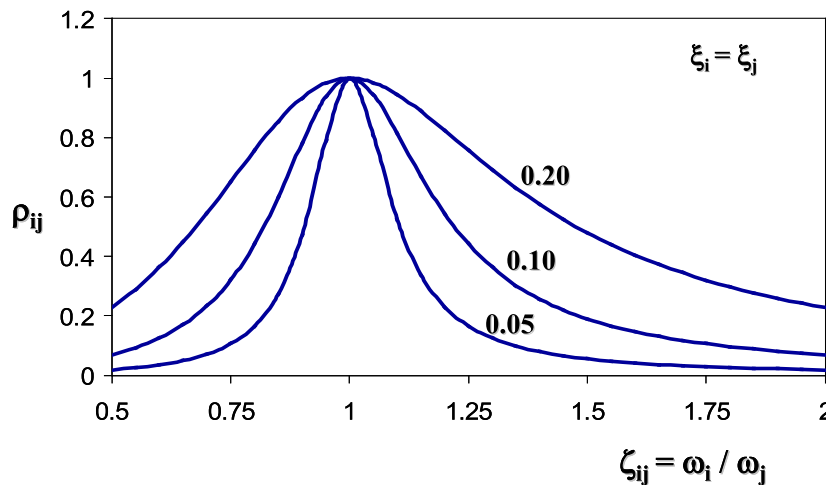


Figure 7.3 : Coefficient de corrélation entre modes

Lorsque les fréquences propres des modes sont égales ( $\zeta_{ij} = 1$ ), le coefficient de corrélation vaut 1 quelque soient  $i$  et  $j$ ; l'équation (7.24) indique que la contribution des deux modes à la réponse totale est égale à la somme des contributions maximales de chaque mode; ceci est équivalent à la formulation (7.23). Lorsque l'amortissement est faible et que les fréquences propres des deux modes sont suffisamment écartées  $\rho_{ii} = 1$  et  $\rho_{ij} \ll 1$  pour  $i \neq j$ , et on peut exprimer la contribution des deux modes comme égale à la racine carrée de la somme des carrés des contributions maximales; cette combinaison est connue sous le terme de combinaison quadratique SRSS (Square Root of the Sums of the Squares). Ainsi, si tous les modes sont suffisamment disjoints, la combinaison (7.24) se réduit à :

$$(7.26) \quad r = \sqrt{\mathbf{R}^T \mathbf{I} \mathbf{R}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N r_i^2}$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité.

Pour les valeurs d'amortissement rencontrées dans la pratique (hormis les problèmes d'interaction sol-structure qui peuvent induire des amortissements élevés), la formule (7.26) peut être considérée comme applicable dès que  $\zeta_{ij}$  n'appartient pas à l'intervalle  $[0.9, 1.1]$  :

$$(7.27) \quad \zeta_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j} \notin [0.9, 1.1]$$

Remarque importante: les combinaisons modales données par (7.24) et (7.26) sont basées sur des propriétés statistiques de la sollicitation et ne sont valables que sous ces hypothèses. La sollicitation doit, en particulier, être un bruit blanc non filtré et les modes propres ne doivent pas posséder des fréquences trop élevées. Ceci exclut en particulier tous les modes qui ne sont pas amplifiés par la sollicitation, dits modes de corps rigide. Pour le traitement de ces modes et leur prise en compte dans la réponse on se reportera au paragraphe 7.8.

## 7.7 CHOIX DU NOMBRE DE MODES

Un système réel possède un nombre élevé de degrés de liberté. La détermination de tous les modes, au nombre de  $N$ , du système n'est pas réaliste et peut donner une fausse illusion de rigueur : en effet, la discrétisation d'un système, qui par nature possède un nombre infini de degrés de liberté, en un système à  $N$  degrés de liberté introduit une erreur d'autant plus importante que la fréquence est élevée. Les fréquences élevées, si elles représentent correctement celles du système discrétisé n'ont qu'un rapport lointain avec celles du système réel.

Heureusement, l'expérience montre que la réponse d'un système est contrôlée par les premiers modes jusqu'à l'ordre  $K$  tel que  $K \ll N$ . La question posée est celle du choix du nombre  $K$  de modes à retenir dans l'analyse.

A cette fin, on introduit le paramètre  $m_j^*$ , dénommé masse modale :

$$(7.28) \quad m_j^* = \frac{L_j^2}{m_j} = \frac{\left( \underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\Delta} \right)^2}{\underline{\mathbf{D}}_j^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{D}}_j}$$

La masse modale  $m_j^*$ , contrairement au facteur de participation  $a_j$  ne dépend pas du choix adopté pour la normalisation des vecteurs propres : l'équation (7.28) montre qu'une multiplication de  $\underline{\mathbf{D}}_j$  par une constante arbitraire  $\lambda$  n'affecte pas la valeur de  $m_j^*$ .

On notera que lorsque les vecteurs propres sont normalisés par rapport à la matrice masse, alors le carré du facteur de participation est égal à la masse modale :

$$(7.29) \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}_j^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_j = 1 \quad \Rightarrow \quad a_j^2 = m_j^*$$

La masse modale  $m_j^*$  possède la propriété remarquable que la somme des masses modales est égale à la masse totale  $M_T$  de la structure sollicitée dans la direction  $\underline{\underline{\Delta}}$ .

$$(7.30) \quad M_T = \underline{\underline{\Delta}}^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\Delta}} = \sum_{j=1}^N m_j^*$$

Démonstration :

Le vecteur de direction  $\underline{\underline{\Delta}}$  peut être décomposé sur la base des modes  $\underline{\underline{\Phi}} = \{\underline{\underline{\mathbf{D}}}_1, \underline{\underline{\mathbf{D}}}_2, \dots, \underline{\underline{\mathbf{D}}}_N\}$

$$(7.31) \quad \underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\mathbf{Z}}}$$

par définition :

$$(7.32) \quad L_j = \underline{\underline{\mathbf{D}}}_j^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}_j^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\mathbf{Z}}}$$

qui compte tenu de la propriété d'orthogonalité des modes propres devient :

$$(7.33) \quad L_j = \underline{\underline{\mathbf{D}}}_j^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_j z_j = m_j z_j$$

L'équation (7.30) peut alors s'écrire :

$$(7.34) \quad M_T = [\underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\mathbf{Z}}}]^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} [\underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\mathbf{Z}}}] = \underline{\underline{\mathbf{Z}}}^T \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{\mathbf{Z}}}$$

Le produit  $\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\Phi}}$  est par suite de la propriété d'orthogonalité des modes propres égal à la matrice diagonale dont les termes représentent les masses généralisées. Il en résulte que l'équation (7.34) s'écrit :

$$(7.35) \quad M_T = \underline{\underline{\mathbf{Z}}}^T \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & m_j & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & m_N \end{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{Z}}} = \sum_{j=1}^N m_j z_j^2$$

Tenant compte de la relation (7.33), il s'ensuit :

$$(7.36) \quad M_T = \sum_{j=1}^N m_j z_j^2 = \sum_{j=1}^N \frac{L_j^2}{m_j}$$

ce qui avec (7.28) achève la démonstration de la relation (7.30).

La masse modale permet de quantifier l'erreur commise en ne retenant que K modes pour l'évaluation de la réponse. Si l'on s'intéresse par exemple à la force  $\underline{\mathbf{F}}$  dans le système, cette erreur s'exprime par :

$$(7.37) \quad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{j=K+1}^N \underline{\mathbf{F}}_j$$

soit en tenant compte de (7.16) et de (7.29)

$$(7.38) \quad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{j=K+1}^N \sqrt{m_j^*} \omega_j^2 q_j(t) \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{D}}_j$$

L'erreur commise en négligeant les modes K+1 à N dépend donc :

- des caractéristiques dynamiques de la structure par l'intermédiaire des quantités  $\omega_j$ ,  $\underline{\mathbf{D}}_j$
- des caractéristiques du chargement  $q_j(t)$
- de la masse modale  $m_j^*$

Plus la masse modale des modes négligés est faible, plus l'erreur commise est faible. On dispose ainsi à partir de l'équation (7.38) d'un critère objectif permettant de choisir le nombre de modes; cependant, la mise en oeuvre pratique nécessiterait de faire le calcul de tous les modes, d'où son manque d'intérêt. Tenant compte de la remarque précédente relative à la relation entre masse modale et erreur, on admet dans la pratique que si l'on s'intéresse à la *réponse d'ensemble* de la structure, on obtient une bonne approximation de celle-ci avec K modes dès que :

$$(7.39) \quad \sum_{j=1}^K m_j^* \geq 0.9 M_T$$

On attire cependant l'attention sur le fait que la réponse locale d'un élément du système peut nécessiter la prise en compte d'un nombre de modes plus important que celui donné par la relation (7.39).



## 7.8 MODES RIGIDES

Au delà d'une fréquence, appelée fréquence de coupure du spectre typiquement de l'ordre de 30 à 50 Hz, on observe que la réponse d'un oscillateur simple à un degré de liberté n'est plus amplifiée; dans l'équation régissant la réponse de l'oscillateur simple (éq 4.5) les termes  $\ddot{u}$  et  $\dot{u}$  peuvent être négligés et le déplacement relatif est donné par:

$$(7.40) \quad u = -\frac{\ddot{v}_s(t)}{\omega^2}$$

Tout se passe comme si l'oscillateur était rigidement lié à son support et subissait l'accélération du sol, d'où le nom de modes rigides. La réponse en termes de déplacements relatifs du système peut alors s'écrire en séparant les modes amplifiés, ( $j \leq M$ ), des modes non amplifiés, ou "rigides":

$$(7.41) \quad \underline{U} = \sum_{j=1}^M a_j \underline{D}_j q_j(t) + \sum_{j=M+1}^N a_j \underline{D}_j q_j(t)$$

Le deuxième terme de (7.41) peut s'écrire en tenant compte de (7.40)

$$(7.42) \quad \sum_{j=M+1}^N a_j \underline{D}_j q_j(t) = -\ddot{v}_s(t) \sum_{j=M+1}^N \frac{a_j}{\omega_j^2} \underline{D}_j$$

Désignant par  $\underline{W}$  la déformée statique de la structure dans un champ d'accélération unitaire, il résulte immédiatement de (7.40) et (7.41) avec  $\ddot{v}_s(t) = -1$

$$(7.43) \quad \underline{W} = \sum_{j=1}^M \frac{a_j}{\omega_j^2} \underline{D}_j + \sum_{j=M+1}^N \frac{a_j}{\omega_j^2} \underline{D}_j$$

En tenant compte de (7.42) et (7.43) il s'ensuit pour (7.41):

$$(7.44) \quad \underline{U} = \sum_{j=1}^M a_j \underline{D}_j q_j(t) - \ddot{v}_s(t) \left[ \underline{W} - \sum_{j=1}^M \frac{a_j}{\omega_j^2} \underline{D}_j \right]$$

Cette expression montre que la réponse se compose de la somme des réponses modales des modes à réponse dynamique et d'un terme complémentaire, proportionnel à l'accélération d'excitation  $\ddot{v}_s(t)$ , et dont le calcul ne fait intervenir que la déformée statique sous accélération unité et les M modes dynamiques. Les combinaisons modales du paragraphe 7.6 s'effectuent alors en assimilant le deuxième terme de (7.44) à un mode (le pseudo mode) et en le combinant quadratiquement au résultat de la combinaison CQC (ou SRSS) appliquée

aux modes amplifiés; par exemple, le déplacement du degré de liberté  $k$  du système s'écrit en désignant par  $A$  la valeur maximale de l'accélération  $\ddot{v}_s(t)$  du support:

$$(7.45) \quad U_k = \sqrt{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \rho_{ij} u_{kj} u_{ki} + A^2 \left[ w_k - \sum_{j=1}^M \frac{a_j}{\omega_j^2} D_{jk} \right]^2}$$

Lorsque la condition (7.39) relative au pourcentage de masse modale pris en compte n'est pas satisfaite après calcul de tous les modes jusqu'à la fréquence de coupure du spectre, l'addition d'un pseudo mode à la combinaison des modes calculés permet de rendre compte du déficit de masse modale.

## 7.9 EXCITATION MULTISUPPORTS

Les développements effectués dans ce chapitre ont considéré que tous les points d'appuis de la structure étaient sollicités par un mouvement unique  $\ddot{v}_s(t)$ . Cette situation est sensiblement exacte pour les ouvrages d'emprise au sol limitée comme un bâtiment.

Pour les structures linéaires, tels les ponts de grande longueur, le mouvement sismique au droit de chacun des appuis peut varier du fait de natures de sol différentes d'un appui à l'autre, des modifications intervenant, par réflexions et réfractions sur les interfaces géologiques, dans la nature du champ d'ondes incident lors de son trajet depuis le foyer du séisme .... Tous ces phénomènes sont connus sous le nom de décorrélation du mouvement sismique.

Le problème à analyser est celui de la figure 7.4 où une structure est sollicitée à chacun de ses appuis par un mouvement  $\ddot{v}_g(t)$  variable d'un appui à l'autre.

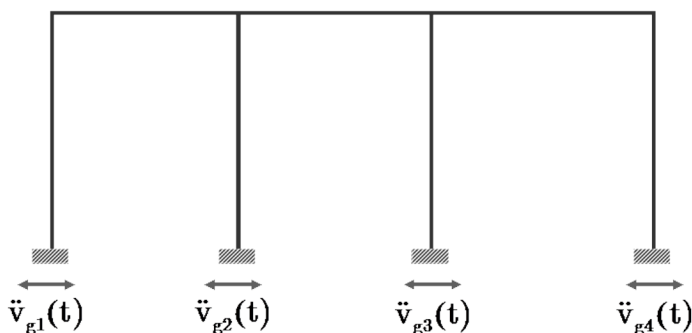


Figure 7.4 : Excitation multisupports d'une structure

Pour l'analyse du système de la figure 7.4, la formulation du paragraphe 2 est modifiée en partitionnant le vecteur des déplacements absolus (mesurés dans le référentiel fixe) en deux sous ensembles : les déplacements de la superstructure  $\underline{\mathbf{V}}$  et les déplacements des points d'appuis  $\underline{\mathbf{v}}_g$ . L'équation d'équilibre dynamique pour l'ensemble des degrés de liberté s'écrit :

$$(7.46) \quad \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{M}}} & \underline{\underline{\mathbf{M}}}_g \\ \underline{\underline{\mathbf{M}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{M}}}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\ddot{\mathbf{V}}}} \\ \underline{\underline{\ddot{\mathbf{v}}}}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}} & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_g \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\dot{\mathbf{V}}}} \\ \underline{\underline{\dot{\mathbf{v}}}}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_g \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{V}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{v}}}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{p}}}_g(t) \end{bmatrix}$$

dans laquelle  $\underline{\underline{\mathbf{p}}}_g(t)$  représente les forces appliquées aux points d'appuis pour y engendrer les déplacements  $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_g(t)$ .

La première des deux équations (7.46), en passant les termes connus au deuxième membre, prend la forme :

$$(7.47) \quad \underline{\underline{\mathbf{M}}}\underline{\underline{\ddot{\mathbf{V}}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}\underline{\underline{\dot{\mathbf{V}}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\underline{\mathbf{V}}} = -\underline{\underline{\mathbf{M}}}_g\underline{\underline{\ddot{\mathbf{v}}}}_g - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_g\underline{\underline{\dot{\mathbf{v}}}}_g - \underline{\underline{\mathbf{K}}}_g\underline{\underline{\mathbf{v}}}_g$$

Décomposons le vecteur des déplacements totaux  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$  en une composante quasi statique (mais variable dans le temps)  $\underline{\underline{\mathbf{u}}}$ <sup>s</sup>, résultant de l'application sous forme quasi statique des déplacements d'appuis  $\underline{\underline{\mathbf{v}}}_g$ , et en une composante dynamique  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$  :

$$(7.48) \quad \underline{\underline{\mathbf{V}}} = \underline{\underline{\mathbf{u}}}$$
<sup>s</sup> +  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$

Le vecteur des déplacements quasi statiques  $\underline{\underline{\mathbf{u}}}$ <sup>s</sup> s'obtient immédiatement à partir de l'équation (7.46) dans laquelle tous les termes dynamiques sont pris égaux à zéro :

$$(7.49) \quad \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_g \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}^T & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{u}}}$$
<sup>s</sup> \\ \underline{\underline{\mathbf{v}}}\_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{p}}}\_g(t) \end{bmatrix}

soit en retenant la première des deux équations :

$$(7.50) \quad \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\underline{\mathbf{u}}}$$
<sup>s</sup> +  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}_g\underline{\underline{\mathbf{v}}}_g = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$

Portant la décomposition (7.48) dans la relation (7.46) et tenant compte de (7.50) il vient :

$$(7.51) \quad \underline{\underline{\mathbf{M}}}\underline{\underline{\ddot{\mathbf{U}}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}\underline{\underline{\dot{\mathbf{U}}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\underline{\mathbf{U}}} = -\left[ \underline{\underline{\mathbf{M}}}_g\underline{\underline{\ddot{\mathbf{v}}}}_g + \underline{\underline{\mathbf{M}}}\underline{\underline{\ddot{\mathbf{u}}}}^s \right] - \left[ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_g\underline{\underline{\dot{\mathbf{v}}}}_g + \underline{\underline{\mathbf{C}}}\underline{\underline{\dot{\mathbf{u}}}}^s \right]$$

soit en introduisant la matrice d'influence  $\underline{\underline{\Lambda}} = -\underline{\underline{K}}^{-1} \underline{\underline{K}}_g$ , qui décrit l'influence des déplacements d'appuis sur les déplacements de la structure,

$$(7.52) \quad \underline{\underline{M}} \ddot{\underline{U}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{U}} + \underline{\underline{K}} \underline{U} = -(\underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Lambda}} + \underline{\underline{M}}_g) \ddot{\underline{v}}_g - (\underline{\underline{C}} \underline{\underline{\Lambda}} + \underline{\underline{C}}_g) \dot{\underline{v}}_g$$

Si le vecteur des déplacements d'appuis  $\underline{v}_g$  et ses dérivées par rapport au temps sont connus, le deuxième membre de l'équation (7.52), qui représente le chargement effectif de la structure  $\underline{P}_e(t)$ , est connu et la solution du problème s'apparente à celle de l'équation (7.5).

Le second membre de l'équation (7.52) se simplifie si l'on néglige les termes d'amortissement qui sont généralement faibles devant les termes d'inertie. Si de plus on adopte pour la modélisation de la structure une modélisation à masses concentrées, qui implique que la matrice  $\underline{\underline{M}}$  est diagonale, alors la matrice  $\underline{\underline{M}}_g$  est nulle et le chargement effectif de la structure devient :

$$(7.53) \quad \underline{P}_e(t) = -\underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Lambda}} \ddot{\underline{v}}_g$$

Les efforts dans la structure sont finalement donnés, tenant compte de (7.48) et (7.50), par:

$$(7.54) \quad \underline{F} = \underline{\underline{K}} \underline{V} + \underline{\underline{K}}_g \underline{v}_g = \underline{\underline{K}} \underline{U} + \left[ \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Lambda}} + \underline{\underline{K}}_g \right] \underline{v}_g = \underline{\underline{K}} \underline{U}$$

Comme l'indique l'équation (7.54), les efforts modaux dans la structure ne résultent que de la composante dynamique des déplacements. L'analyse de ce système diffère cependant de celle du système classique, pour lequel tous les supports sont animés d'un même mouvement, par le fait que les forces statiques équivalentes au niveau des points d'appui ne peuvent être directement calculés à partir des efforts élastiques modaux  $\underline{F}$  (ou des déplacements dynamiques  $\underline{U}$ ). Ces efforts dépendent également des déplacements relatifs entre appuis et doivent être calculés à partir des sous matrices de rigidité afférentes à ces supports. Le résultat est obtenu en utilisant la deuxième équation de (7.46)

$$(7.55) \quad \underline{p}_g = \underline{\underline{K}}_g^T \underline{V} + \underline{\underline{K}}_{gg} \underline{v}_g$$

Qui peut également s'écrire compte tenu de (7.48) et (7.50)

$$(7.56) \quad \underline{p}_g = \underline{\underline{K}}_g^T \underline{U} + \left( \underline{\underline{K}}_{gg} - \underline{\underline{K}}_g^T \underline{\underline{\Lambda}} \right) \underline{v}_g$$

Le premier terme de (7.56) représente la composante dynamique des efforts aux supports provenant de la réponse dynamique de la structure et le second les efforts pseudo statiques dus aux déplacements différentiels d'appuis. Une fois calculés les efforts dynamiques nodaux à l'aide de (7.54) et les efforts aux appuis à l'aide de (7.56), les efforts résultants

dans toute section de la structure peuvent être évalués par les méthodes usuelles de la statique des structures.

## CHAPITRE 8

### VIBRATIONS DES POUTRES DROITES

#### 8.1 INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents nous nous sommes intéressés à l'étude des vibrations libres, ou forcées, de systèmes possédant un nombre fini de degrés de liberté. On a montré que la réduction d'un système quelconque à un système possédant un nombre fini de degrés de liberté constituait une formulation pratique, tout particulièrement dans le cadre de la méthode des éléments finis, pour l'étude dynamique de structures possédant, par essence, un nombre infini de degrés de liberté. Cette modélisation ne conduit cependant qu'à une solution approchée de la réponse dynamique du système dont la précision peut être accrue en augmentant le nombre de degrés de liberté. Cependant, en toute théorie, un nombre infini de degrés de liberté est nécessaire pour la modélisation d'un système possédant des propriétés de masse ou de rigidité réparties.

La formulation mathématique de l'équation d'équilibre dynamique d'un système possédant un nombre infini de degrés de liberté conduit à des équations différentielles aux dérivées partielles, du second ordre, dont les variables indépendantes sont constituées de la position du point  $\underline{x}$ , représentée par ses coordonnées dans le référentiel choisi, et du temps  $t$ . Dans le présent chapitre on se restreindra à l'étude des milieux curvilignes, poutres et barres, pour lesquels les coordonnées se réduisent à la donnée de la position de la section repérée par son abscisse curviligne, notée  $s$ . Les inconnues du problème sont représentées par le champ de déplacements  $\underline{U} = \underline{U}(s, t)$ .

#### 8.2 EQUATION DE L'EQUILIBRE DYNAMIQUE

Pour établir les équations de l'équilibre dynamique du système, on se place dans les hypothèses suivantes:

- Le système est constitué d'une poutre droite
- Les transformations restent petites
- Les sections droites des poutres restent droites au cours de la déformation.

La mise en équation est effectuée à l'aide du Principe des Puissances Virtuelles (PPV) qui requiert le calcul de la puissance des efforts intérieurs  $\mathcal{P}_i(\hat{\underline{U}})$ , de la puissance des efforts extérieurs  $\mathcal{P}_e(\hat{\underline{U}})$  et de la puissance des quantités d'accélération  $\mathcal{A}(\hat{\underline{U}})$  dans tout champ de vitesse virtuelle  $\hat{\underline{U}}$ .

$$(8.1) \quad \mathcal{P}_i(\hat{\underline{U}}) + \mathcal{P}_e(\hat{\underline{U}}) = \mathcal{A}(\hat{\underline{U}})$$

La cinématique de la poutre est complètement décrite par une translation  $\underline{v}(s)$  d'un point de la fibre neutre et une rotation  $\underline{\omega}(s)$  de la section. Dans ces conditions les champs de vitesses virtuelles en un point M peuvent s'écrire :

$$(8.2) \quad \hat{\underline{U}}(\underline{x}) = \hat{\underline{v}}(s) + \hat{\underline{\omega}}(s) \wedge (\underline{x} - \underline{r}(s))$$

où  $\underline{x}$  désigne la position du point M,  $\underline{r}(s)$  l'abscisse curviligne de la section et  $\wedge$  le produit vectoriel de deux vecteurs.

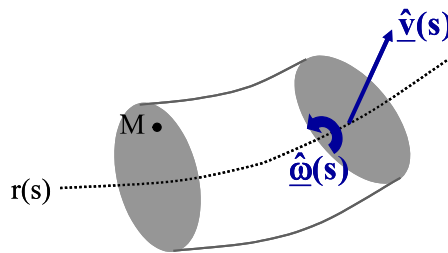


Figure 8.1 : Champ de vitesses virtuelles de la poutre

### 8.2.1 PUISSANCE DES EFFORTS INTERIEURS

Par définition la puissance élémentaire développée par les efforts intérieurs dans l'élément d'épaisseur  $ds$  est égale au travail des efforts de contact contre le gradient du champ de vitesse virtuelle. Le gradient du champ de vitesses virtuelles est obtenu à partir de l'équation (8.2) :

$$(8.3) \quad \frac{d\hat{\underline{U}}}{ds} = \frac{d\hat{\underline{v}}(s)}{ds} + \frac{d\hat{\underline{\omega}}(s)}{ds} \wedge (\underline{x} - \underline{r}(s)) - \hat{\underline{\omega}}(s) \wedge \frac{\partial \underline{r}(s)}{\partial s}$$

et les efforts de contact s'expriment à l'aide du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  et de la normale extérieure  $\underline{n}$  à la section considérée.<sup>1</sup>

(8.4)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}_1(\hat{\mathbf{U}})}{ds} &= - \int_{\Omega(s)} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \frac{d\hat{\mathbf{U}}}{ds} d\Omega(s) \\ &= - \int_{\Omega(s)} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{ds} d\Omega(s) - \int_{\Omega(s)} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \left[ \frac{d\hat{\omega}}{ds} \wedge (\underline{x} - \underline{r}(s)) \right] d\Omega(s) \\ &\quad + \int_{\Omega(s)} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \left[ \hat{\omega} \wedge \frac{\partial \underline{r}(s)}{\partial s} \right] d\Omega(s) \end{aligned}$$

Tenant compte de l'identité :

$$(8.5) \quad \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 \wedge \underline{v}_3 = [\underline{v}_3 \wedge \underline{v}_1] \cdot \underline{v}_2$$

et de la relation :

$$(8.6) \quad \frac{\partial \underline{r}(s)}{\partial s} = \underline{n}$$

l'équation (8.4) peut se réécrire sous la forme :

(8.7)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}_1(\hat{\mathbf{U}})}{ds} &= - \int_{\Omega(s)} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{ds} d\Omega(s) - \int_{\Omega(s)} [(\underline{x} - \underline{r}(s)) \wedge (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n})] \cdot \frac{d\hat{\omega}}{ds} d\Omega(s) \\ &\quad + \int_{\Omega(s)} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot [\hat{\omega} \wedge \underline{n}] d\Omega(s) \end{aligned}$$

A ce stade il est naturel d'introduire le torseur des efforts résultants agissant sur la section, représenté par la force  $\underline{T}$  et le moment  $\underline{M}$  :

$$(8.8a) \quad \underline{T} = \int_{\Omega(s)} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) d\Omega(s)$$

$$(8.8b) \quad \underline{M} = \int_{\Omega(s)} [(\underline{x} - \underline{r}(s)) \wedge (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n})] d\Omega(s)$$

---

<sup>1</sup> Note: dans la suite on utilisera le symbole "." pour désigner le produit contracté de deux tenseurs; ainsi  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \sum_j \sigma_{ij} n_j$



En introduisant ces quantités dans la relation (8.7), la puissance des efforts intérieurs entre deux sections A et B s'écrit:

$$(8.9) \quad \mathcal{P}_i(\hat{\mathbf{U}}) = - \int_A^B \left\{ \underline{\mathbf{T}} \cdot \left( \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{ds} - \hat{\boldsymbol{\omega}} \wedge \underline{\mathbf{n}} \right) + \underline{\mathbf{M}} \cdot \frac{d\hat{\boldsymbol{\omega}}}{ds} \right\} ds$$

La force  $\underline{\mathbf{T}}$  et le moment  $\underline{\mathbf{M}}$  peuvent être décomposés en une composante orientée le long de la normale  $\underline{\mathbf{n}}$  à la section et une composante dans le plan de la section :

$$(8.10) \quad \underline{\mathbf{T}} = N \underline{\mathbf{n}} + \underline{\mathbf{T}}_{\perp} \quad , \quad \underline{\mathbf{M}} = M_t \underline{\mathbf{n}} + \underline{\mathbf{M}}_{\perp}$$

Sous cette forme on reconnaît les grandeurs classiques de la théorie des poutres : l'effort normal N, l'effort tranchant  $\underline{\mathbf{T}}_{\perp}$ , le moment de torsion  $M_t$  et le moment fléchissant  $\underline{\mathbf{M}}_{\perp}$ . Effectuant la même décomposition sur les composantes du champ de vitesse virtuelle  $\hat{\mathbf{v}}(s)$  et  $\hat{\boldsymbol{\omega}}(s)$ , en reportant les relations (8.10) dans l'équation (8.9) et en tenant compte de la nullité du produit scalaire  $\underline{\mathbf{n}} \cdot \underline{\mathbf{t}}$  pour tout vecteur  $\underline{\mathbf{t}}$  situé dans le plan de la section, il vient :

$$(8.11) \quad \mathcal{P}_i(\hat{\mathbf{U}}) = \int_A^B \left\{ -N \frac{d\hat{v}_n}{ds} - \underline{\mathbf{T}}_{\perp} \cdot \left( \frac{d\hat{\mathbf{v}}_{\perp}}{ds} - \hat{\boldsymbol{\omega}}_{\perp} \wedge \underline{\mathbf{n}} \right) - M_t \frac{d\hat{\omega}_n}{ds} - \underline{\mathbf{M}}_{\perp} \cdot \frac{d\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\perp}}{ds} \right\} ds$$

Sous cette forme les termes successifs de l'équation (8.11) font apparaître les quantités connues entrant dans la théorie des poutres :

- allongement de la fibre neutre
- le cisaillement de la section
- la torsion autour de l'axe normal à la section
- la flexion autour d'un axe situé dans le plan de la section.

### 8.2.2 PUISSANCE DES EFFORTS EXTERIEURS

On suppose la poutre soumise à une densité d'efforts volumiques extérieurs  $\underline{\mathbf{f}}$ . La puissance des efforts extérieurs a pour expression :

$$(8.12) \quad \frac{d\mathcal{P}_e(\hat{\mathbf{U}})}{ds} = \int_{\Omega(s)} \underline{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{U}} \, d\Omega(s)$$

Tenant compte de l'expression du champ de vitesses virtuelles donnée par l'équation (8.2), il en résulte :

$$(8.13) \quad \underline{\underline{f}} \cdot \hat{\underline{\underline{U}}} = \underline{\underline{f}} \cdot \hat{\underline{\underline{v}}}(s) + \underline{\underline{f}} \cdot [\hat{\underline{\underline{\omega}}}(s) \wedge (\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{r}}(s))]$$

soit avec la relation (8.5) :

$$(8.14) \quad \underline{\underline{f}} \cdot \hat{\underline{\underline{U}}} = \underline{\underline{f}} \cdot \hat{\underline{\underline{v}}}(s) + [(\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{r}}(s)) \wedge \underline{\underline{f}}] \cdot \hat{\underline{\underline{\omega}}}(s)$$

En introduisant la densité linéique de résultante des efforts extérieurs :

$$(8.15) \quad \underline{\underline{f}}_l = \int_{\Omega(s)} \underline{\underline{f}} \, d\Omega(s)$$

et la densité linéique du moment résultant des efforts extérieurs :

$$(8.16) \quad \underline{\underline{m}} = \int_{\Omega(s)} [\underline{\underline{x}} - \underline{\underline{r}}(s)] \wedge \underline{\underline{f}} \, d\Omega(s)$$

La puissance des efforts extérieurs entre deux sections A et B s'écrit :

$$(8.17) \quad \mathcal{P}_e(\hat{\underline{\underline{U}}}) = \int_A^B \underline{\underline{f}}_l \cdot \hat{\underline{\underline{v}}} \, ds + \int_A^B \underline{\underline{m}} \cdot \hat{\underline{\underline{\omega}}} \, ds$$

### 8.2.3 PUISSANCE DES QUANTITES D'ACCELERATION

Pour la simplification de la présentation on négligera les termes d'inertie en rotation. Soit  $\rho$  la masse volumique de la poutre et  $S$  l'aire de la section de la poutre, la puissance des quantités d'accélération s'écrit :

$$(8.18) \quad \mathcal{A}(\hat{\underline{\underline{U}}}) = \int_A^B \rho S [\ddot{\underline{\underline{r}}}(s) \cdot \hat{\underline{\underline{v}}}(s)] \, ds$$

### 8.2.4 EQUATION D'EQUILIBRE

Le report des relations (8.11), (8.17) et (8.18) dans l'équation (8.1) fournit les équations d'équilibre dynamique de la poutre. Les différents termes intervenant dans cette équation peuvent être regroupés en isolant les termes faisant intervenir les composantes normale à la section, d'axe normal à la section et dans le plan de la section. Les champs de vitesses virtuelles étant arbitraires, il est possible de choisir des champs qui successivement ne comportent que des composantes normale à la section, d'axe normal à la section et contenues dans le plan de la section et donc d'écrire le principe des puissances virtuelles pour chacun de ces champs. On obtient ainsi les équations d'équilibre suivantes :

#### 8.2.4.1 COMPOSANTE NORMALE A LA SECTION : ALLONGEMENT

L'équation suivante est obtenue :

$$(8.19) \quad \int_A^B \left\{ -N \frac{d\hat{v}_n}{ds} + f_n \hat{v}_n - \rho S \ddot{u}_n \hat{v}_n \right\} ds = 0$$

Après intégration par parties du premier terme:

$$(8.20) \quad \int_A^B \left\{ \frac{\partial N}{\partial s} + f_n - \rho S \ddot{u}_n \right\} \hat{v}_n ds = 0$$

qui doit être valable pour toute vitesse virtuelle  $\hat{v}_n$ . Il en résulte l'équation d'équilibre :

$$(8.21) \quad \boxed{\frac{\partial N}{\partial s} + f_n - \rho S \ddot{u}_n = 0}$$

#### 8.2.4.2 COMPOSANTE D'AXE NORMAL A LA SECTION : TORSION

L'équation suivante est obtenue :

$$(8.22) \quad \int_A^B \left\{ -M_t \frac{d\hat{\omega}_t}{ds} + m_t \hat{\omega}_t \right\} ds = 0$$

Après intégration par parties du premier terme et en écrivant que la relation obtenue doit être valable pour toute vitesse virtuelle  $\hat{\omega}_t$ , il en résulte l'équation d'équilibre :

$$(8.23) \quad \frac{\partial M_t}{\partial s} + m_t = 0$$

ou en tenant compte des termes d'inertie en rotation qui ont été négligés dans l'écriture de la puissance virtuelle des quantités d'accélération :

$$(8.24) \quad \boxed{\frac{\partial M_t}{\partial s} + m_t - \rho J \ddot{\theta}_t = 0}$$

dans laquelle J désigne l'inertie géométrique en torsion de la poutre.

### 8.2.4.3 COMPOSANTE DANS LE PLAN DE LA SECTION : FLEXION-CISAILLEMENT

L'équation suivante est obtenue :

$$(8.25) \quad \int_A^B \left\{ -\underline{T}_\perp \cdot \frac{d\hat{\underline{v}}_\perp}{ds} + \underline{f}_\perp \cdot \hat{\underline{v}}_\perp - \rho S \ddot{\underline{u}}_\perp \cdot \hat{\underline{v}}_\perp \right\} ds + \int_A^B \left\{ \underline{T}_\perp \cdot (\hat{\underline{\omega}}_\perp \wedge \underline{n}) - \underline{M}_\perp \cdot \frac{d\hat{\underline{\omega}}_\perp}{ds} + \underline{m}_\perp \cdot \hat{\underline{\omega}}_\perp \right\} ds = 0$$

En écrivant que la relation précédente doit être valable pour tout champ de vitesses virtuelles  $\hat{\underline{v}}_\perp$  et  $\hat{\underline{\omega}}_\perp$ , une intégration par parties et l'identité (8.5) permettent d'écrire les deux équations d'équilibre :

$$(8.26) \quad \boxed{\frac{\partial \underline{T}_\perp}{\partial s} + \underline{f}_\perp - \rho S \ddot{\underline{u}}_\perp = \underline{0}}$$

$$(8.27) \quad \boxed{\frac{\partial \underline{M}_\perp}{\partial s} + \underline{m}_\perp - \underline{T}_\perp \wedge \underline{n} = \underline{0}}$$

Les équations vectorielles précédentes peuvent être exprimées sous forme scalaire en choisissant dans le plan de la section un système d'axes orthogonaux dans lequel les composantes des différentes grandeurs ont pour expression :

$$(8.28) \quad \underline{M}_\perp = \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \underline{T}_\perp = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \underline{m}_\perp = \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \underline{n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

L'équation (8.27) donne alors naissance aux deux équations :

$$(8.29) \quad \begin{cases} T_1 = -\frac{\partial M_2}{\partial s} - m_2 \\ T_2 = +\frac{\partial M_1}{\partial s} + m_1 \end{cases}$$

soit en reportant dans l'équation (8.26) les deux équations régissant l'équilibre des moments :

$$(8.30) \quad \begin{cases} -\frac{\partial^2 M_2}{\partial s^2} - \frac{\partial m_2}{\partial s} + f_1 - \rho S \ddot{u}_1 = 0 \\ +\frac{\partial^2 M_1}{\partial s^2} + \frac{\partial m_1}{\partial s} + f_2 - \rho S \ddot{u}_2 = 0 \end{cases}$$

### 8.3 VIBRATIONS LONGITUDINALES DES BARRES

Dans ce paragraphe on s'intéressera à la vibration longitudinale des barres, c'est à dire aux phénomènes régis par l'équation (8.21). On notera que l'équation (8.21), qui a été obtenue comme cas particulier des équations générales gouvernant la vibration des poutres, peut être dérivée également en identifiant les forces axiales s'exerçant sur un tronçon de poutre et en écrivant que leur résultante est nulle (figure 8.2).

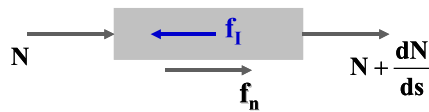


Figure 8.2 : Equilibre axial d'une poutre

Cette équation d'équilibre s'exprime :

$$(8.31) \quad N + \frac{\partial N}{\partial s} ds + f_n ds - N - f_l ds = 0$$

dans laquelle les forces d'inertie  $f_l$  ont pour expression :

$$(8.32) \quad f_l = \rho S \ddot{u}_n$$

Portant (8.32) dans (8.31) on retrouve l'équation d'équilibre (8.21) à laquelle il convient, pour l'obtention de la solution du problème, d'adjoindre la loi de comportement de la poutre pour les sollicitations axiales. Cette loi de comportement relie l'effort axial à l'allongement de la fibre neutre et s'écrit dans l'hypothèse de l'élasticité linéaire en petites déformations :

$$(8.34) \quad N = ES \frac{\partial u}{\partial s}$$

dans laquelle E désigne le module d'Young du matériau constitutif. Dans l'équation (8.34) et dans toutes celles du présent paragraphe, l'indice n est omis pour ne pas alourdir la présentation; u désigne dans ce cas le déplacement orienté suivant la normale  $\underline{n}$  à la section. Portant la relation (8.34) dans (8.21), l'équation des vibrations axiales de la poutre s'écrit :

$$(8.35) \quad \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{f}{\rho S}}$$

### 8.3.1 EQUATION HOMOGENE

Si l'on suppose la densité linéique d'efforts  $f$  nulle, l'équation homogène de vibration s'écrit :

$$(8.36) \quad \ddot{u}(s, t) - c^2 u''(s, t) = 0$$

dans laquelle on a introduit la célérité des ondes  $c$ , définie par :

$$(8.37) \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

A titre indicatif, on retiendra les valeurs de célérité des ondes dans des matériaux de construction courants :

- acier  $c = 5200$  m/s
- béton  $c = 3600$  m/s

L'équation (8.36) constitue un système différentiel hyperbolique du premier ordre dont la solution s'obtient de façon classique en introduisant les deux inconnues  $U_1$  et  $U_2$  définies par :

$$(8.38) \quad U_1 = u \quad , \quad U_2 = -\frac{\partial}{\partial s} \int_0^t u(s, \tau) d\tau$$

L'équation (8.36) est alors équivalente au système différentiel :

$$(8.39) \quad \begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial t} + c^2 \frac{\partial U_2}{\partial s} = 0 \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial s} = 0 \end{cases}$$

ou sous forme matricielle en notant  $\underline{U}^T = \{U_1, U_2\}$  :

$$(8.40) \quad \frac{\partial \underline{U}}{\partial t} + \underline{\mathbf{A}} \frac{\partial \underline{U}}{\partial s} = 0$$

L'opérateur  $\underline{\mathbf{A}}$  a pour expression :

$$(8.41) \quad \underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & c^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et ses valeurs propres valent  $+c$  et  $-c$ . La solution générale du système différentiel (8.39) s'écrit alors :

$$(8.42) \quad u(s, t) = u_1(s - ct) + u_2(s + ct)$$

La solution (8.42) représente la superposition de deux ondes, d'amplitudes  $u_1$  et  $u_2$ , qui se propagent avec la célérité  $c$ , respectivement dans la direction  $s > 0$  et dans la direction  $s < 0$ . Lors de leur propagation, ces deux trains d'ondes conservent une forme inchangée (figure 8.3); on dit que les deux ondes sont *non dispersives*.



Figure 8.3 : Propagation longitudinale dans une barre

Les quantités  $u_1$  et  $u_2$  sont déterminées par les conditions initiales. L'équation différentielle régissant la vibration axiale des poutres étant du second ordre, deux conditions initiales sont requises :

$$(8.43) \quad t = 0 \quad , \quad u(s, 0) \quad \text{et} \quad \dot{u}(s, 0)$$

Exprimant le déplacement et la vitesse à l'instant  $t=0$  à partir de la solution (8.42), il vient pour toute section d'abscisse  $s$  :

$$(8.44) \quad \begin{cases} u(s, 0) = u_1(s) + u_2(s) \\ \dot{u}(s, 0) = -c u_1'(s) + c u_2'(s) \end{cases}$$

qui permet d'exprimer  $u_1$  et  $u_2$  en fonction des conditions initiales connues :

$$(8.45) \quad \begin{cases} u_1(s) = \frac{1}{2} u(s, 0) - \frac{1}{2c} \int_0^s \dot{u}(\xi, 0) d\xi + a \\ u_2(s) = \frac{1}{2} u(s, 0) + \frac{1}{2c} \int_0^s \dot{u}(\xi, 0) d\xi - a \end{cases}$$

dans laquelle  $a$  est une constante d'intégration.

### 8.3.2 CONTRAINTES

Une fois la solution connue pour le déplacement, les contraintes dans la poutre s'obtiennent par la loi de comportement (8.34) :

$$(8.46) \quad \sigma = E \frac{\partial u}{\partial s} = E [u'_1(s - ct) + u'_2(s + ct)] = g_1(s - ct) + g_2(s + ct)$$

La contrainte axiale dans la poutre est constituée de la superposition de deux ondes, non dispersives, se propageant respectivement dans la direction des  $s > 0$  et des  $s < 0$ . Cette contrainte peut également s'exprimer en fonction des vitesses  $\dot{u}_1$  et  $\dot{u}_2$  appelées *vitesses particulières*. Tenant compte des relations :

$$(8.47) \quad \begin{cases} \dot{u}_1(s, t) = \frac{\partial u_1(s, t)}{\partial t} = -c u'_1(s - ct) \\ \dot{u}_2(s, t) = \frac{\partial u_2(s, t)}{\partial t} = +c u'_2(s + ct) \end{cases}$$

et en rappelant que  $E = \rho c^2$  la contrainte axiale s'exprime par :

$$(8.48) \quad \boxed{\sigma = -\rho c (\dot{u}_1 - \dot{u}_2)}$$

### 8.3.3 EXEMPLES D'APPLICATION

#### 8.3.3.1 EXEMPLE 1: BATTAGE D'UN PIEU

Les notions introduites dans les paragraphes précédents vont être illustrées sur l'exemple (simplifié) du battage d'un pieu.

Considérons un pieu de longueur  $L$  soumis à l'instant  $t = 0$  à un impact en tête réalisé par la chute d'une masse, communément appelée "mouton" (figure 8.4). On supposera que cet impact induit une contrainte :

$$(8.49) \quad \sigma_0(t) = -k \sin(\omega t)$$

et que le pieu n'est soumis à aucune autre force; cette hypothèse implique que les frottements engendrés par le contact avec le sol lors de l'enfoncement sont négligeables, ce qui constitue bien évidemment une simplification grossière de la réalité. On notera dans la relation précédente le signe  $-$  qui traduit le fait que la contrainte axiale est une compression.



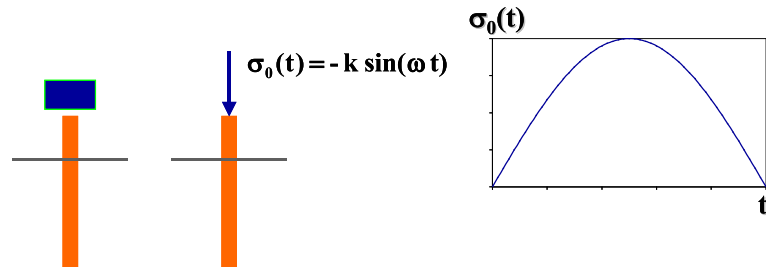


Figure 8.4 : exemple du battage d'un pieu

L'impact crée une onde incidente, se propageant vers l'extrémité du pieu ( $s > 0$ ); aucune onde ne peut bien sûr se propager dans la direction  $s < 0$  puisque le pieu ne s'étend pas dans cette direction. D'après la relation (8.46) la contrainte due à l'onde incidente s'écrit :

$$(8.50) \quad \sigma(s, t) = g_1(s - ct)$$

Dans la section d'extrémité,  $s=0$ , l'expression de la contrainte est :

$$(8.51) \quad \sigma(0, t) = \sigma_0(t) = g_1(-ct) \quad \Rightarrow \quad g_1(-ct) = -k \sin\left(\frac{\omega}{c} ct\right)$$

d'où la formulation de la contrainte dans le pieu :

$$(8.52) \quad \sigma(s, t) = -k \sin\left[\frac{\omega}{c}(ct - s)\right]$$

Au temps  $t = \pi/\omega$  l'impact est achevé (figure 8.5) et l'onde de contrainte se propage pour les temps supérieurs sans modification le long du pieu, et atteint son extrémité à l'instant  $t = L/c$ .

En atteignant l'extrémité du pieu, l'onde incidente va donner naissance à une onde réfléchie dont la nature dépend de la condition aux limites dans la section d'abscisse  $s=L$ . Considérons deux cas extrêmes :

- l'extrémité est fixe, ce qui correspond au cas où le pieu atteint un horizon très résistant, tel un rocher; la condition aux limites s'exprime par  $u(L, t) = 0$  pour tout  $t$ ;
- l'extrémité est située dans un milieu très peu résistant, tel une argile molle, et l'effort qui s'exerce dans la section  $s=L$  peut être considéré comme nul; la condition aux limites s'exprime par  $N(L, t) = 0$  pour tout  $t$ .

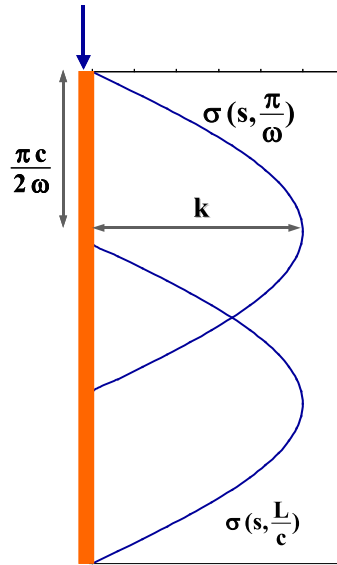


Figure 8.5: Distribution de la contrainte dans le pieu  $t \leq L/c$

Extrémité fixe :

Il vient immédiatement :

$$(8.53) \quad u(L, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1(L, t) = -u_2(L, t)$$

$$(8.54) \quad \sigma(L, t) = -\rho c (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) = -2\rho c \dot{u}_1(L, t)$$

L'onde de compression  $\sigma_1(s, t)$  est réfléchiée en une onde de compression  $\sigma_2(s, t)$  de même amplitude. Pendant toute la durée de la phase de réflexion, soit  $L/c \leq t \leq L/c + \pi/\omega$  les contributions des deux ondes s'additionnent. Pour les temps ultérieurs seule l'onde réfléchiée subsiste; elle se propage vers l'extrémité haute du pieu où elle subira une nouvelle réflexion.

Les équations suivantes fournissent la valeur de la contrainte axiale dans le pieu jusqu'à l'instant de la deuxième réflexion en tête :

$$(8.55a) \quad \sigma_1(s, t) = -k \sin \left[ \frac{\omega}{c} (ct - s) \right]$$

$$(8.55b) \quad \sigma_2(s, t) = -k \sin \left[ \frac{\omega}{c} (ct + s) - 2 \frac{\omega L}{c} \right]$$

Soit en superposant les contributions des deux ondes :

$$(8.56) \quad \begin{aligned} 0 \leq t \leq L/c & \quad \sigma(s, t) = \sigma_1(s, t) \\ L/c < t \leq L/c + \pi/\omega & \quad \sigma(s, t) = \sigma_1(s, t) + \sigma_2(s, t) \\ L/c + \pi/\omega < t \leq 2L/c & \quad \sigma(s, t) = \sigma_2(s, t) \end{aligned}$$

La figure 8.6 visualise le diagramme de contraintes obtenu pendant la phase de réflexion.

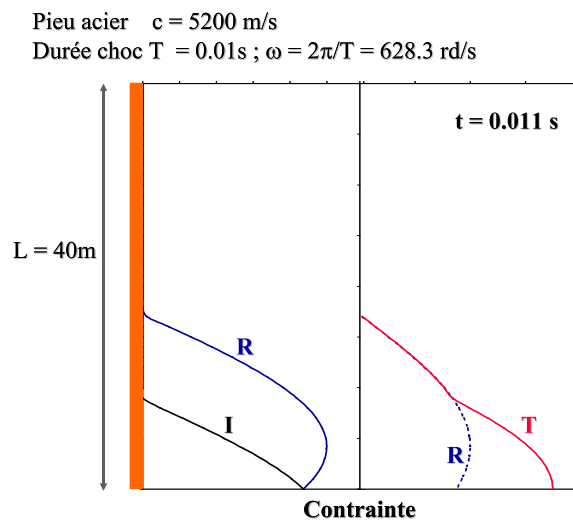


Figure 8.6 : Contraintes pendant la phase de réflexion – extrémité fixe  
I : incident – R : réfléchie – T : total

Extrémité libre :

$$(8.57) \quad \sigma(L, t) = 0 \Rightarrow \dot{u}_1(L - ct) = \dot{u}_2(L + ct) \Leftrightarrow u'_1(L - ct) = -u'_2(L + ct)$$

Soit après intégration par rapport au temps:

$$(8.58) \quad u_1(L - ct) = u_2(L + ct)$$

L'onde incidente se réfléchit donc sans changement de signe et l'onde de compression donne naissance à une onde de traction de même amplitude.

De façon analogue au cas de l'extrémité fixe, les équations suivantes fournissent la valeur de la contrainte axiale dans le pieu jusqu'à l'instant de la deuxième réflexion en tête :

$$(8.59a) \quad \sigma_1(s, t) = -k \sin \left[ \frac{\omega}{c}(ct - s) \right]$$

$$(8.59b) \quad \sigma_2(s, t) = +k \sin \left[ \frac{\omega}{c} (ct + s) - 2 \frac{\omega L}{c} \right]$$

On notera le signe + dans l'expression de l'onde réfléchie qui indique qu'il s'agit d'une traction. En superposant les contributions des deux ondes :

$$(8.60) \quad \begin{aligned} 0 \leq t \leq L/c & \quad \sigma(s, t) = \sigma_1(s, t) \\ L/c < t \leq L/c + \pi/\omega & \quad \sigma(s, t) = \sigma_1(s, t) + \sigma_2(s, t) \\ L/c + \pi/\omega < t \leq 2L/c & \quad \sigma(s, t) = \sigma_2(s, t) \end{aligned}$$

La figure 8.7 visualise le diagramme de contraintes obtenu pendant la phase de réflexion.

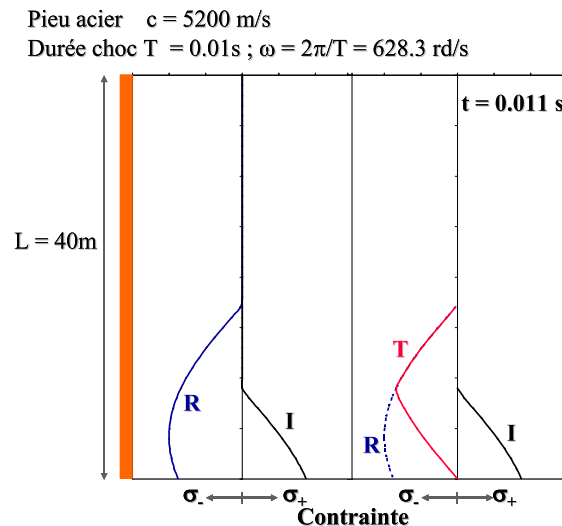


Figure 8.7 : Contraintes pendant la phase de réflexion – extrémité libre  
 I : incident – R : réfléchie – T : total

### 8.3.3.2 EXEMPLE 2 : BARRE HETEROGENE – MESURE DES CARACTERISTIQUES

On a rencontré au paragraphe précédent des exemples simples de conditions aux limites. Un exemple plus complexe est rencontré lorsque l'onde incidente heurte un interface séparant deux milieux de caractéristiques différentes (figure 8.8). On doit alors exprimer la continuité du déplacement et de l'effort dans la section d'interface. Dénotant avec l'indice 1 les variables du milieu 1 et avec l'indice 2 celles du milieu 2 :

- continuité du déplacement  $u_1 = u_2$
- continuité de l'effort  $N_1 = N_2$

Lorsque l'onde incidente heurte l'interface une partie de l'énergie qu'elle transporte est réfléchiée et transportée par l'onde réfléchiée se propageant dans le milieu 1; l'énergie complémentaire traverse l'interface et est transportée par une onde, dite *réfractée*, qui se propage dans le milieu 2. Les quantités relatives au milieu 1 peuvent par suite être décomposées en quantités incidentes, dénotées avec un indice I, et quantités réfléchiées, dénotées avec un indice R. Les quantités relatives à l'onde réfractée seront notées avec un indice T. Les deux équations de continuité s'expriment alors sous la forme :

$$(8.61a) \quad u_I + u_R = u_T$$

$$(8.61b) \quad N_I + N_R = N_T$$

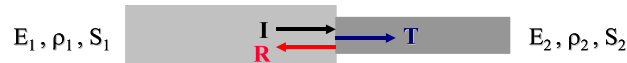


Figure 8.8 : Conditions d'interface entre deux milieux

Un exemple d'application pratique est fourni par le dispositif expérimental de la figure 8.9 connu sous le nom de barre d'Hopkinson. Un échantillon de dimensions connues, mais de caractéristiques mécaniques inconnues, est placé entre deux barres d'acier. Un impact est imposé à l'extrémité d'une des barres; la mesure du déplacement des ondes incidentes et réfractées par l'échantillon permet de déterminer la célérité des ondes dans celui-ci.

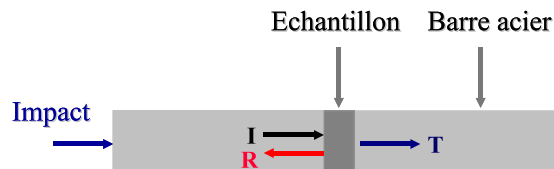


Figure 8.9 : Barre de Hopkinson

Posant  $\alpha = \rho_1 c_1 / \rho_2 c_2$  le rapport des caractéristiques entre le milieu 1 (barre d'acier) et le milieu 2 (échantillon), il vient, par application successive des formules (8.61), pour le rapport entre l'amplitude de l'onde réfractée dans la barre d'acier à droite de l'échantillon et l'amplitude de l'onde incidente dans la barre d'acier à gauche de l'échantillon :

$$(8.62) \quad \frac{u_T}{u_I} = \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2}$$

relation à partir de laquelle  $\alpha$  et par suite la célérité des ondes  $c_2$  dans l'échantillon peut être évaluée.

L'exemple donné ci-dessus n'est qu'une version simplifiée de l'essai à la barre d'Hopkinson dans le cadre de l'élasticité linéaire; cet essai est en fait beaucoup plus riche et permet éventuellement la détermination de la loi de comportement du matériau hors du cadre de l'élasticité linéaire.

### 8.3.3.3 FRONTIÈRES ABSORBANTES

Les calculs numériques de propagation d'ondes, par exemple en éléments finis, imposent de représenter une poutre par un élément de dimension finie. L'existence de frontières, qui peuvent être libres ou fixes, engendre des réflexions des ondes les heurtant. Ces réflexions sont indésirables si elles ne correspondent pas à une réalité physique et perturbent la solution. Dans le cas unidimensionnel, il existe une solution élégante permettant d'éviter ces réflexions; cette solution consiste à interposer aux extrémités du modèle des éléments particuliers, connus sous le nom de *frontières absorbantes*, dont le rôle est de rétablir les conditions exactes de contrainte dans la section d'extrémité (figure 8.10a).



Figure 8.10 : Frontière absorbante

Dans l'exemple de la figure 8.10a l'objectif est de représenter dans la section d'abscisse  $x=L$  les conditions qui existeraient si la barre était de dimension infinie. Dans cette section, du fait de la dimension finie du modèle, le déplacement (ou la contrainte) résulte de la superposition de deux ondes, l'une incidente notée avec l'indice 1 et l'autre réfléchie notée avec l'indice 2. L'objectif à réaliser est de supprimer la contribution de l'onde réfléchie, c'est à dire à satisfaire les relations suivantes :

$$(8.63) \quad \begin{cases} u(L, t) = u_1(L, t) + u_2(L, t) = u_1(L, t) \\ \sigma(L, t) = \sigma_1(L, t) + \sigma_2(L, t) = \sigma_1(L, t) \end{cases}$$

Les contraintes dans la section d'extrémité peuvent s'exprimer en fonction de la vitesse particulière, par :

onde incidente

$$(8.64) \quad \sigma_1(L, t) = -\rho c \dot{u}_1(L, t)$$

onde réfléchie avec une extrémité libre (cf. § 8.3.3.1)

$$(8.65) \quad \sigma_2(L, t) = +\rho c \dot{u}_1(L, t)$$

Pour annuler la contribution de l'onde réfléchie, il convient donc d'imposer dans cette section une contrainte égale à  $-\rho c \dot{u}_1(L, t)$ . Cette contrainte est précisément celle développée dans un amortisseur de caractéristiques  $\rho c$ . Ainsi, l'adjonction en extrémité de la poutre d'un amortisseur possédant la caractéristique indiquée permet d'annihiler la contribution de l'onde réfléchie; tout se passe comme si la poutre était de longueur infinie.

#### Démonstration

Désignons par  $u(L, t)$  le déplacement dans la section  $x=L$  du modèle de la figure 8.10b représentant la poutre de longueur finie connectée à un amortisseur.

La contrainte dans cette section s'écrit d'après la relation (8.48) :

$$(8.66) \quad \sigma(L, t) = -\rho c [\dot{u}_1(L, t) - \dot{u}_2(L, t)]$$

et est égale du fait de la présence de l'amortisseur à :

$$(8.67) \quad \sigma(L, t) = -\rho c \dot{u}(L, t)$$

Par ailleurs le déplacement  $u(L, t)$  peut également être décomposé sous la forme de la contribution de l'onde incidente et de celle de l'onde réfléchie :

$$(8.68) \quad u(L, t) = u_1(L, t) + u_2(L, t)$$

En rapprochant les équations (8.66) à (8.68), il vient :

$$(8.69) \quad \dot{u}_1(L, t) - \dot{u}_2(L, t) = \dot{u}_1(L, t) + \dot{u}_2(L, t)$$

qui conduit à  $\dot{u}_2(L, t) = 0$  et donc à  $\sigma_2(L, t) = 0$  et  $u_2(L, t) = 0$ .

### **8.3.4 MODES PROPRES DE LA BARRE**

L'exemple du battage d'un pieu a mis en évidence la difficulté à déterminer la solution lorsque des réflexions multiples interviennent lors de la propagation des ondes; très rapidement il devient impossible de calculer toutes les réflexions et d'obtenir la solution générale. Il est souvent plus avantageux de chercher à résoudre le problème en décomposant la solution sur la base des modes propres de vibration de la poutre. Les modes propres représentent les solutions périodiques de l'équation homogène (8.36). Ces solutions s'écrivent sous la forme :

$$(8.70) \quad u(s, t) = \phi(s) e^{i\omega t}$$

Introduisant cette relation dans l'équation (8.36), la fonction  $\phi(s)$  doit satisfaire l'équation :

$$(8.71) \quad c^2 \phi''(s) + \omega^2 \phi(s) = 0$$

dont la solution est de la forme :

$$(8.72) \quad \phi(s) = A \cos\left(\frac{\omega}{c}s\right) + B \sin\left(\frac{\omega}{c}s\right)$$

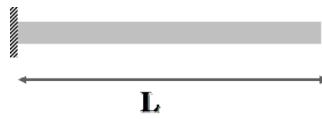


Figure 8.11 : Poutre console

Les constantes d'intégration A et B sont déterminées par les conditions aux limites. Par exemple pour la poutre console de la figure 8.11 ces conditions aux limites sont données par :

$$(8.73a) \quad \phi(0) = 0$$

$$(8.73b) \quad N(L) = ES \frac{d\phi}{ds}(L) = 0$$

Les conditions (8.73) imposent que :

$$(8.74a) \quad \phi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

$$(8.74b) \quad \phi'(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) = 0$$

Les fréquences propres sont solutions de l'équation (8.74b), soit :

$$(8.75) \quad \omega_n = (2n - 1) \frac{\pi c}{2L}$$

Les modes propres associés sont donnés par :

$$(8.76) \quad \phi_n(s) = B \sin \left[ (2n - 1) \frac{\pi s}{2L} \right]$$



Les modes propres définis par l'équation (8.76) constituent une base orthogonale, c'est à dire qu'ils vérifient la relation :

$$(8.77) \quad \int_0^L \phi_m(s) \phi_n(s) ds = 0 \quad \text{si} \quad m \neq n$$

L'équation (8.77) est une version simplifiée de la condition d'orthogonalité des modes propres lorsque la masse au mètre linéaire,  $\rho S$ , de la poutre est constante. Dans le cas le plus général la condition s'exprime sous la forme de la relation (8.148) dont la démonstration est donnée au paragraphe 8.5.3.

On notera que la solution en modes propres peut également s'exprimer sous la forme de la superposition d'une onde directe et d'une onde rétrograde. Par suite de l'identité trigonométrique, pour le mode d'ordre  $n$ , on peut écrire :

$$(8.78) \quad \begin{aligned} u_n(s, t) &= B \sin \left[ (2n-1) \frac{\pi s}{2L} \right] \cos(\omega_n t) \\ &= \frac{B}{2} \sin \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2L} (s-ct) \right] + \frac{B}{2} \sin \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2L} (s+ct) \right] \end{aligned}$$

La solution générale de l'équation des vibrations (8.35) peut alors s'obtenir par décomposition sur la base des modes propres. En procédant de façon analogue à la méthode mise en oeuvre pour les systèmes à nombre fini de degrés de liberté, on écrit que :

$$(8.79) \quad u(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(s) q_n(t)$$

En reportant l'expression (8.79) dans l'équation (8.35) et en tenant compte de l'équation (8.71) et de la propriété d'orthogonalité (8.77),  $q_n(t)$  vérifie l'équation différentielle :

$$(8.80) \quad \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = f_n(t) \quad , \quad n = 1, \dots, \infty$$

Dans laquelle  $f_n(t)$  a pour expression

$$(8.81) \quad f_n(t) = \frac{1}{\rho S} \frac{\int_0^L f(s, t) \phi_n(s) ds}{\int_0^L \phi_n^2(s) ds}$$

On notera la similarité avec l'étude des systèmes à nombre fini de degrés de liberté : la décomposition sur la base des modes propres permet de se ramener à la détermination de la solution d'équations différentielles ordinaires du deuxième ordre (éq. 8.81). La seule différence réside dans le nombre d'équations qui est infini du fait du nombre infini de degrés de liberté.

## 8.4 VIBRATIONS DE TORSION DES POUTRES

Dans ce paragraphe on s'intéressera à la vibration en torsion des poutres, c'est à dire aux phénomènes régis par l'équation (8.24). On notera que l'équation (8.24), qui a été obtenue comme cas particulier des équations générales gouvernant la vibration des poutres, peut être dérivée également en identifiant les forces axiales s'exerçant sur un tronçon de poutre et en écrivant que leur résultante est nulle (figure 8.12).

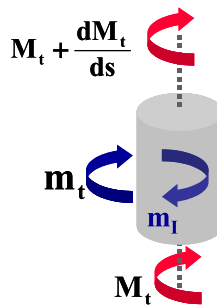


Figure 8.12 : Equilibre en torsion d'une poutre

Cette équation d'équilibre s'exprime :

$$(8.82) \quad M_t + \frac{\partial M_t}{\partial s} ds + m_t ds - M_t - m_I ds = 0$$

dans laquelle les forces d'inertie  $m_I$  ont pour expression :

$$(8.83) \quad m_I = \rho J \ddot{\theta}$$

A l'équation d'équilibre (8.82) il convient, pour l'obtention de la solution du problème, d'adjoindre la loi de comportement de la poutre pour les sollicitations de torsion. Cette loi de comportement relie le moment de torsion à la rotation de la section et s'écrit dans l'hypothèse de l'élasticité linéaire en petites déformations:

$$(8.84) \quad M_t = G J \frac{\partial \theta}{\partial s}$$

dans laquelle  $G$  désigne le module de cisaillement du matériau constitutif, également appelé module de Lamé. Dans l'équation (8.84) et dans toutes celles du présent paragraphe, l'indice  $t$  est omis pour ne pas alourdir la présentation;  $\theta$  désigne dans ce cas la rotation autour de la normale  $\underline{n}$  à la section. Portant la relation (8.84) dans (8.24), l'équation des vibrations de torsion de la poutre s'écrit :

$$(8.85) \quad \boxed{\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} = \frac{m_t}{\rho J}}$$

Les développements de ce paragraphe suivent en tous points ceux relatifs à la vibration longitudinale des poutres car les structures des équations (8.35) et (8.85) sont identiques, seuls les paramètres entrant dans ces équations ont des significations différentes.

#### 8.4.1 EQUATION HOMOGENE

Si l'on suppose la densité linéique de moment  $m_t$  nulle, l'équation homogène de vibration s'écrit :

$$(8.86) \quad \ddot{\theta}(s, t) - V_s^2 \theta''(s, t) = 0$$

dans laquelle on a introduit la célérité des ondes  $V_s$ , appelées *ondes de cisaillement*, définie par :

$$(8.87) \quad V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

A titre indicatif, on retiendra les valeurs de célérité des ondes de cisaillement dans des matériaux de construction courants :

acier  $V_s = 3100$  m/s  
béton  $V_s = 2200$  m/s

L'équation (8.86) constitue un système différentiel hyperbolique du premier ordre dont la solution générale s'écrit :

$$(8.88) \quad \theta(s, t) = \theta_1(s - V_s t) + \theta_2(s + V_s t)$$

La solution (8.88) représente la superposition de deux ondes, d'amplitudes  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , qui se propagent avec la célérité  $V_s$  respectivement dans la direction  $s > 0$  et dans la direction  $s < 0$ . Lors de leur propagation, ces deux trains d'ondes conservent une forme inchangée; les deux ondes sont *non dispersives*.

### 8.4.2 CONTRAINTES

Une fois la solution connue pour le déplacement, les contraintes dans la poutre s'obtiennent par la loi de comportement (8.84) :

(8.89)

$$\tau = G r \frac{\partial \theta}{\partial s} = G r [\dot{\theta}'_1(s - V_s t) + \dot{\theta}'_2(s + V_s t)] = g_1(s - V_s t) + g_2(s + V_s t)$$

Dans l'équation précédente on a supposé la poutre de section droite circulaire et de rayon  $r$ .

La contrainte de cisaillement dans la poutre est constituée de la superposition de deux ondes, non dispersives, se propageant respectivement dans la direction des  $s > 0$  et des  $s < 0$ . Cette contrainte peut également s'exprimer en fonction des vitesses  $\dot{\theta}_1$  et  $\dot{\theta}_2$  appelées *vitesses angulaires particulières*. Tenant compte des relations :

$$(8.90) \quad \begin{cases} \dot{\theta}_1(s, t) = \frac{\partial \theta_1(s, t)}{\partial t} = -V_s \theta'_1(s - V_s t) \\ \dot{\theta}_2(s, t) = \frac{\partial \theta_2(s, t)}{\partial t} = +V_s \theta'_2(s + V_s t) \end{cases}$$

et en rappelant que  $G = \rho V_s^2$  la contrainte de cisaillement s'exprime par :

$$(8.91) \quad \boxed{\tau = -\rho r V_s (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)}$$

### 8.4.3 MODES PROPRES DE LA POUTRE

Les modes propres représentent les solutions périodiques de l'équation homogène (8.86). Ces solutions s'écrivent sous la forme :

$$(8.92) \quad \theta(s, t) = \Theta(s) e^{i\omega t}$$

Introduisant cette relation dans l'équation (8.86), la fonction  $\Theta(s)$  doit satisfaire l'équation :

$$(8.93) \quad V_s^2 \Theta''(s) + \omega^2 \Theta(s) = 0$$

dont la solution est de la forme :

$$(8.94) \quad \Theta(s) = A \cos\left(\frac{\omega}{V_s} s\right) + B \sin\left(\frac{\omega}{V_s} s\right)$$

Les constantes d'intégration A et B sont déterminées par les conditions aux limites. Par exemple pour la poutre console de la figure 8.11 ces conditions aux limites sont données par :

$$(8.95a) \quad \Theta(0) = 0$$

$$(8.95b) \quad M_t(L) = GJ \frac{d\Theta}{ds}(L) = 0$$

Les conditions (8.95) imposent que :

$$(8.96a) \quad \Theta(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

$$(8.96b) \quad \Theta'(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\omega L}{V_s}\right) = 0$$

Les fréquences propres sont solutions de l'équation (8.96b), soit :

$$(8.97) \quad \omega_n = (2n - 1) \frac{\pi V_s}{2L}$$

Les modes propres associés sont donnés par :

$$(8.98) \quad \Theta_n(s) = B \sin \left[ (2n - 1) \frac{\pi s}{2L} \right]$$

Les modes propres définis par l'équation (8.98) constituent une base orthogonale, c'est à dire qu'ils vérifient la relation, dans le cas d'une masse au mètre linéaire constante:

$$(8.99) \quad \int_0^L \Theta_m(s) \Theta_n(s) ds = 0 \quad \text{si} \quad m \neq n$$

La solution générale de l'équation des vibrations (8.85) peut alors s'obtenir par décomposition sur la base des modes propres :

$$(8.100) \quad \theta(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(s) q_n(t)$$

En reportant les expressions (8.100) dans l'équation (8.85) et en tenant compte de la propriété d'orthogonalité (8.99),  $q_n(t)$  vérifie l'équation différentielle :

$$(8.101) \quad \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = m_{tn}(t) \quad , \quad n = 1, \dots, \infty$$

dans laquelle

$$(8.102) \quad m_{tn}(t) = \frac{1}{\rho J} \frac{\int_0^L m_t(s,t) \Theta_n(s) ds}{\int_0^L \Theta_n^2(s) ds}$$

#### 8.4.4 APPLICATION : ESSAI DE COLONNE RESONANTE

L'essai de colonne résonante est un essai permettant la mesure des caractéristiques mécaniques d'un matériau. L'essai utilise le principe de la mise en résonance en torsion d'un échantillon cylindrique. A partir des données géométriques de l'éprouvette et de la mesure de la fréquence de résonance, on en déduit la valeur de la vitesse de propagation de l'onde de cisaillement  $V_s$ .

Le montage expérimental est sommairement représenté sur la figure 8.13. L'excitation est appliquée en tête de l'éprouvette par un système de bobines électromagnétiques; la fréquence d'excitation est augmentée jusqu'à obtenir la mise en résonance suivant le mode fondamental de vibration. L'équation (8.93) régit le mouvement de l'éprouvette dont la solution est donnée par la relation (8.94). L'équation régissant le mouvement de la masse en tête à laquelle sont liées les bobines s'écrit :

$$(8.103) \quad M = J_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

où  $J_0$  représente le moment d'inertie massique en rotation de la masse et  $M$  le moment de torsion. Pour une sollicitation harmonique, l'équation (8.103) est équivalente à :

$$(8.104) \quad M = -J_0 \omega^2 \Phi$$

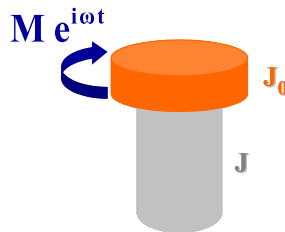


Figure 8.13 : Montage expérimental de l'essai de colonne résonante

Les conditions aux limites expriment la nullité de la rotation à la base de l'éprouvette et la continuité de la rotation et du moment entre l'éprouvette et la masse :

$$(8.105a) \quad \Theta(0) = 0$$

$$(8.105b) \quad \begin{cases} \Theta(L) = \Phi \\ M_t = GJ \frac{d\Theta}{ds}(L) = -M = J_0 \omega^2 \Phi \end{cases}$$

Portant ces conditions aux limites dans la solution (8.94), l'équation aux fréquences propres s'écrit :

$$(8.106) \quad GJ \frac{\omega}{V_s} \cos\left(\frac{\omega L}{V_s}\right) = J_0 \omega^2 \sin\left(\frac{\omega L}{V_s}\right)$$

soit :

$$(8.107) \quad \frac{\omega L}{V_s} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega L}{V_s}\right) = \frac{\rho J L}{J_0} = \frac{I}{J_0}$$

L'équation transcendante (8.107) admet une infinité de racines  $p_n$ ; la détermination de la racine du mode fondamental  $p_1$  permet, connaissant les caractéristiques du montage expérimental ( $I, J_0, L$ ) et la mesure de la pulsation  $\omega_1$ , de calculer  $V_s$  :

$$(8.108) \quad V_s = \frac{\omega_1 L}{p_1}$$

Désignant par  $\Theta_0$  l'amplitude de la rotation en tête, la déformée du mode fondamental s'obtient par :

$$(8.109) \quad \Theta(s) = B \sin\left(p_1 \frac{s}{L}\right) = \frac{\Theta_0}{\sin(p_1)} \sin\left(p_1 \frac{s}{L}\right)$$

La déformation dans toute section d'abscisse  $s$  de l'éprouvette est donnée par :

$$(8.110) \quad \gamma = r \frac{d\Theta}{ds} = \frac{r \Theta_0}{L} \frac{p_1}{\sin(p_1)} \cos\left(p_1 \frac{s}{L}\right)$$

Comme illustré sur la figure 8.14, cette déformée dépend du rapport  $\rho J L / J_0 = I / J_0$ . Lorsque ce rapport est grand, c'est à dire lorsque la masse  $M$  a une inertie massique nulle,

$$J_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{d'après (8.107)}$$

Le mode fondamental correspond à un quart de sinusoïde et la déformation varie sur la hauteur de l'éprouvette.

Lorsque le rapport est voisin de zéro, c'est à dire lorsque la masse possède une grande inertie massique vis à vis de celle de l'éprouvette,

$$J_0 \gg \rho J L \quad \Rightarrow \quad p_1 \approx \varepsilon$$

Le mode fondamental correspond à une droite et la déformation est constante sur la hauteur de l'éprouvette.

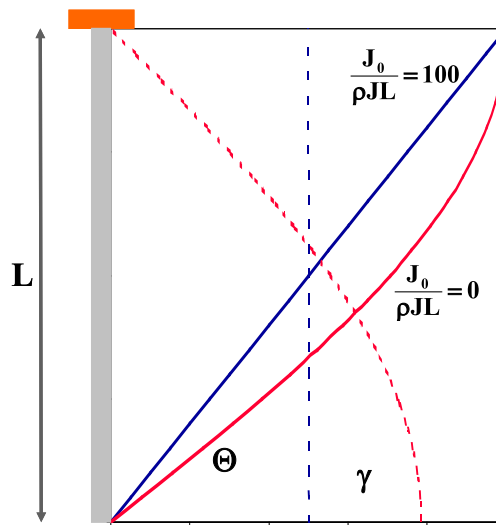


Figure 8.14 : Déformée du mode fondamental (trait plein) et déformation de l'éprouvette (trait pointillé)

La mesure de caractéristiques nécessite que la déformation dans l'éprouvette soit la plus homogène possible, ce qui conduit à concevoir des appareillages respectant la condition  $J_0 \gg \rho J L$ .

## 8.5 VIBRATION DE FLEXION - CISAILLEMENT DES POUTRES

Dans ce paragraphe on s'intéressera à la vibration de flexion – cisaillement des poutres, c'est à dire aux phénomènes régis par les équations (8.26) et (8.27). Ces vibrations correspondent à des mouvements de la fibre neutre contenus dans le plan de la section et à des rotations de la section autour d'axes situés dans le plan de la section. Les équations (8.26) et (8.27) sont des équations vectorielles qui peuvent, par un choix d'un système d'axes orthogonaux situés dans le plan de la section, être remplacées par 4 équations scalaires. Dans la suite de la présentation on se restreindra à l'étude des deux équations suivant un des deux axes (axe 1),



et on omettra les indices pour ne pas alourdir les notations. Les deux équations régissant l'équilibre dynamique s'écrivent alors :

$$(8.111) \quad \frac{\partial T}{\partial s} + f - \rho S \ddot{u} = 0$$

$$(8.112) \quad T = -\frac{\partial M}{\partial s} - m$$

dans lesquelles l'effort tranchant  $T$ , la densité linéique d'efforts transverses extérieurs  $f$  et le déplacement transverse  $u$  correspondent aux composantes suivant la direction 1; le moment fléchissant  $M$  et la densité linéique de moments extérieurs  $m$  correspondent aux composantes autour de la direction 2.

Aux équations d'équilibre (8.111) et (8.112) il convient, pour l'obtention de la solution du problème, d'adjoindre les lois de comportement de la poutre pour les sollicitations de flexion - cisaillement. Ces lois de comportement relient l'effort tranchant au cisaillement de la section et le moment fléchissant à la rotation  $\omega$  de celle-ci; elles s'écrivent dans l'hypothèse de l'élasticité linéaire en petites déformations :

$$(8.113) \quad T = GS' \left( \frac{\partial u}{\partial s} - \omega \right)$$

$$(8.114) \quad M = EI \frac{\partial \omega}{\partial s}$$

dans lesquelles  $G$  désigne le module de cisaillement du matériau constitutif,  $S'$  et  $I$  la section de cisaillement et l'inertie en flexion de la poutre. Afin d'obtenir l'équation différentielle régissant le déplacement transverse de la fibre neutre,  $u$ , il convient d'éliminer les quantités  $T$ ,  $M$  et  $\omega$  entre les relations (8.111) à (8.114).

La relation (8.111) devient par dérivation :

$$(8.115) \quad \frac{\partial^3 T}{\partial s^3} = -\frac{\partial^2}{\partial s^2} (f - \rho S \ddot{u})$$

La combinaison des équations (8.111) et (8.112) fournit la relation :

$$(8.116) \quad -\frac{\partial^2 M}{\partial s^2} - \frac{\partial m}{\partial s} + f - \rho S \ddot{u} = 0$$

Les relations (8.113) et (8.114) donnent par dérivation :

$$(8.117) \quad \frac{\partial^3 T}{\partial s^3} = GS' \left( \frac{\partial^4 u}{\partial s^4} - \frac{\partial^3 \omega}{\partial s^3} \right)$$

$$(8.118) \quad \frac{\partial^2 M}{\partial s^2} = EI \frac{\partial^3 \omega}{\partial s^3}$$

L'élimination de M, T et  $\omega$  entre ces relations donne l'équation différentielle :

$$(8.119) \quad \boxed{EI \frac{\partial^4 u}{\partial s^4} - (f - \rho S \ddot{u}) + \frac{\partial m}{\partial s} + \frac{EI}{GS'} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (f - \rho S \ddot{u}) = 0}$$

Les trois premiers termes de l'équation précédente correspondent à la flexion de la section et le dernier au cisaillement de celle-ci.

L'équation précédente est difficile à obtenir par la méthode directe d'identification des efforts agissant sur la poutre et l'annulation de la résultante de ces efforts. Le principe des puissances virtuelles montre ici toute sa généralité et sa puissance. Dans le cas où les déformations de cisaillement sont négligées, la méthode directe reste applicable. ainsi que la démonstration en est faite ci-dessous.

La figure 8.15 représente l'ensemble des efforts agissant sur un tronçon de poutre.

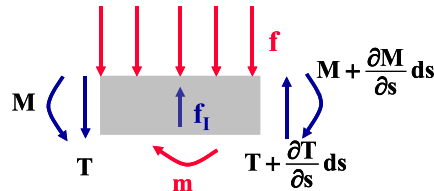


Figure 8.15 : Equilibre transverse d'une poutre

L'équilibre des efforts conduit à l'équation :

$$(8.120) \quad f ds + T - \left( T + \frac{\partial T}{\partial s} ds \right) - f_I ds = 0$$

soit tenant compte de l'expression de forces d'inertie  $f_I$  :

$$(8.121) \quad f_I = \rho S \ddot{u} ds$$

$$(8.122) \quad \frac{\partial T}{\partial s} = f - \rho S \ddot{u}$$

L'équilibre des moments conduit à l'équation :

$$(8.123) \quad M + T ds - \left( M + \frac{\partial M}{\partial s} ds \right) - m ds + (f - f_1) ds \frac{ds}{2} = 0$$

En négligeant les termes du second ordre  $(ds)^2$ , il vient :

$$(8.124) \quad T = \frac{\partial M}{\partial s} + m$$

On retrouve les relations (8.111) et (8.112) auxquelles il convient d'adjoindre les lois de comportement (8.113) et (8.114) dans lesquelles on a tenu compte du fait que le cisaillement de la section est négligé ce qui s'exprime par :

$$(8.125) \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \omega$$

L'élimination de M, T et  $\omega$  entre ces diverses relations redonne l'équation d'équilibre dynamique (8.119) dans laquelle le dernier terme, correspondant au cisaillement est négligé.

Dans la suite du paragraphe on se restreindra à l'étude des vibrations de flexion de la poutre, en négligeant, ce qui est souvent licite, les déformations de cisaillement.

### 8.5.1 EQUATION HOMOGENE

Les vibrations libres de la poutre en flexion simple sont gouvernées par l'équation (8.119) dans laquelle les termes de cisaillement et les efforts extérieurs sont pris égaux à zéro :

$$(8.126) \quad EI \frac{\partial^4 u}{\partial s^4} + \rho S \ddot{u} = 0$$

La résolution de l'équation précédente est obtenue par la technique de séparation des variables. Le déplacement  $u(s,t)$  est exprimé sous la forme :

$$(8.127) \quad u(s, t) = \phi(s) y(t)$$

En reportant dans l'équation (8.126), il vient :

$$(8.128) \quad \frac{\phi^{(iv)}(s)}{\phi(s)} = - \frac{\rho S \ddot{y}(t)}{EI y(t)} = a^4$$

dans laquelle  $a$  est une constante. Posant :

$$(8.129) \quad \omega^2 = \frac{a^4 EI}{\rho S}$$

les équations (8.128) sont équivalentes à :

$$(8.130a) \quad \ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0$$

$$(8.130b) \quad \phi^{(iv)}(s) - a^4 \phi(s) = 0$$

La fonction du temps (8.130a) est l'équation différentielle régissant l'équilibre dynamique d'un oscillateur à 1 degré de liberté; sa solution est donnée par :

$$(8.131) \quad y(t) = C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t)$$

Dans laquelle les constantes  $C$  et  $D$  sont déterminées par les conditions initiales en déplacement et vitesse.

La fonction d'espace (8.130b) est résolue classiquement en cherchant les solutions de la forme :

$$(8.132) \quad \phi(s) = C e^{rs}$$

Reportant dans (8.130b) l'équation suivante est obtenue :

$$(8.133) \quad (r^4 - a^4) C e^{rs} = 0$$

qui admet pour solution non triviale les quatre racines :

$$(8.135) \quad r = \pm a \quad , \quad r = \pm ia$$

La solution  $\phi(s)$  s'exprime alors par :

$$(8.136) \quad \phi(s) = A_1 \sin(as) + A_2 \cos(as) + A_3 \operatorname{sh}(as) + A_4 \operatorname{ch}(as)$$

Les constantes  $A_i$ ,  $i=1,4$ , dépendent des conditions aux limites du système. La détermination de ces constantes nécessite donc la spécification de quatre conditions.

## 8.5.2 EXEMPLE DE LA POUTRE CONSOLE

### 8.5.2.1 SOLUTION EXACTE

Reprenons l'exemple de la poutre console de la figure 8.11. Les conditions aux limites, au nombre de 4, sont données par la nullité du déplacement et de la rotation dans la section origine ( $s=0$ ) et par la nullité des efforts, moment et effort tranchant, dans la section d'extrémité ( $s=L$ ) qui est supposée libre. Ces conditions s'expriment à l'aide des relations suivantes :

$$(8.137) \quad \begin{cases} \phi(0) = 0 \\ \phi'(0) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} T(L) = EI\phi'''(L) = 0 \\ M(L) = EI\phi''(L) = 0 \end{cases}$$

Imposant ces conditions dans l'équation (8.136) il s'ensuit que les constantes  $A_i$  doivent satisfaire les relations suivantes :

$$(8.138a) \quad A_3 = -A_1, \quad A_4 = -A_2$$

$$(8.138b) \quad \begin{bmatrix} \sin(aL) + \operatorname{sh}(aL) & \cos(aL) + \operatorname{ch}(aL) \\ \cos(aL) + \operatorname{ch}(aL) & \operatorname{sh}(aL) - \sin(aL) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'équation (8.138b) n'admet de solution non triviale que si, et seulement si, son déterminant est nul; la relation ainsi obtenue constitue l'équation aux fréquences propres de la poutre :

$$(8.139) \quad 1 + \cos(aL)\operatorname{ch}(aL) = 0$$

On notera la similitude de la démarche avec celle utilisée pour déterminer les fréquences propres de vibration longitudinale ou de torsion de la poutre (éqs 8.74b et 8.96b). L'équation transcendante (8.139) admet une infinité de racines, comme le montre la figure 8.16, dont les trois premières sont données par :

$$(8.140) \quad aL = 1.875, \quad 4.694, \quad 7.855, \quad \dots$$

Les pulsations propres de vibration en flexion de la poutre sont alors données par :

$$(8.141) \quad \omega_1 = \left(\frac{1.875}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \quad \omega_2 = \left(\frac{4.694}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}, \quad \omega_3 = \left(\frac{7.855}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$$

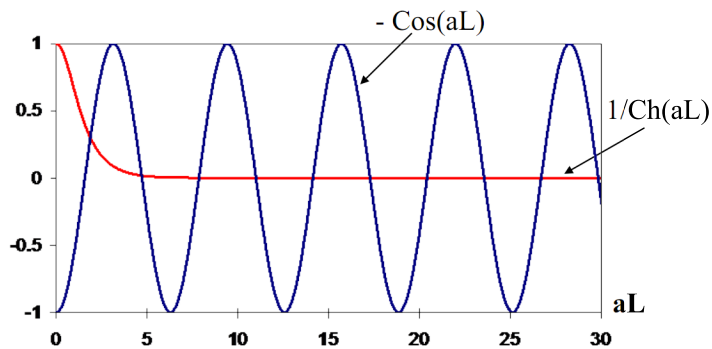


Figure 8.16 : Racines de l'équation aux fréquences propres

Lorsque  $n$  tend vers l'infini les racines deviennent asymptotiquement égales à :

$$(8.142) \quad (aL)_n \approx (2n - 1) \frac{\pi}{2}$$

Cette expression constitue en fait une très bonne approximation des racines dès que  $n \geq 3$ .

Les modes propres de vibration de la poutre sont donnés par :

$$(8.143) \quad \phi(s) = A_1 \left[ \sin(as) - \text{sh}(as) + \frac{\sin(aL) + \text{sh}(aL)}{\cos(aL) + \text{ch}(aL)} (\text{ch}(as) - \cos(as)) \right]$$

Les trois premiers modes propres de vibration sont représentés sur la figure 8.17.

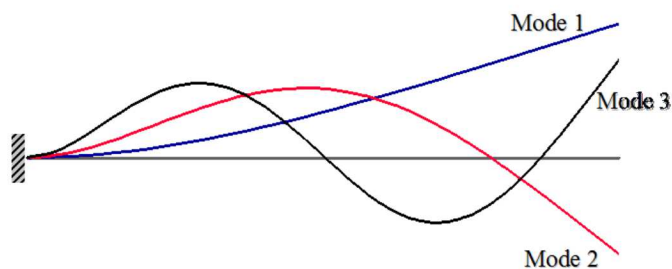


Figure 8.17 : Modes propres de vibration en flexion

Le déplacement temporel en vibration libre est alors donné par (éq. 8.127) :

$$(8.144) \quad u(s, t) = \phi(s) [C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t)]$$

Le déplacement initial est donné par  $u(s,0) = D\phi(s)$  et la vitesse initiale par  $\dot{u}(s,0) = C\phi(s)$  qui permettent la détermination des constantes d'intégration C et D.

### 8.5.2.2 SOLUTION APPROCHÉE

Revenons sur l'exemple de la poutre console tel qu'il avait été abordé au chapitre 3. Dans cet exemple on avait ramené par un choix, fait a priori, de la forme de la déformée en flexion de la poutre (éq 3.14) son étude à celle d'un oscillateur simple à un degré de liberté. On avait alors obtenu l'équation différentielle régissant le mouvement de cet oscillateur (éq 3.15) et calculé sa pulsation propre sous une forme analogue à celle de la relation (8.141). La valeur obtenue pour le produit  $aL$  était de 1.911. Cette valeur est à comparer à la valeur exacte obtenue au paragraphe précédent; l'écart est de moins de 2%. D'autres exemples traités au chapitre 3, en considérant d'autres alternatives pour la déformée de l'oscillateur simple équivalent, ou par application de la méthode de Rayleigh, conduisaient à des valeurs de  $aL$  égales à 1.89, soit différent de la valeur exacte de moins de 1%. L'excellente approximation obtenue par application de la méthode de Rayleigh s'explique par la grande similitude entre le mode propre exact (éq 8.143) et la déformée calculée par la méthode approchée (figure 8.18).

L'exemple ci dessus illustre parfaitement la puissance et la simplicité de mise en oeuvre de la méthode de Rayleigh, par opposition à la méthode exacte, pour l'obtention de la fréquence fondamentale d'un système à masse répartie.

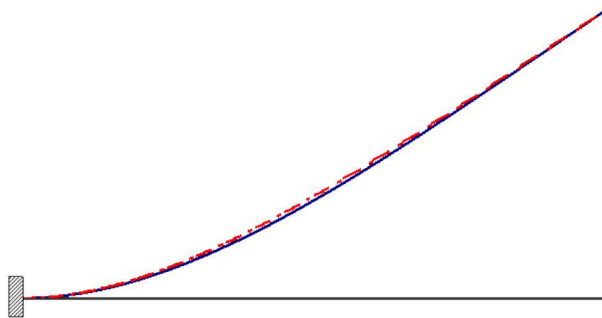


Figure 8.18 : Mode propre fondamental exact (trait plein) – méthode de Rayleigh (trait pointillé)

### 8.5.3 ORTHOGONALITE DES MODES PROPRES

Les modes propres donnés par l'équation (8.143) constituent une base orthogonale. La démonstration à partir de l'équation (8.143) est fastidieuse et il est plus élégant d'utiliser, comme cela a été mis en oeuvre pour les systèmes à nombre fini de degrés de liberté, le théorème de Betti appliqué aux forces d'inertie.

Soit  $u_m(s)$ , respectivement  $u_n(s)$ , la déformée produite par le champ de forces d'inertie  $f_{Im}$ , respectivement  $f_{In}$ , le théorème de Betti indique que :

$$(8.145) \quad \int_0^L u_m(s, t) f_{In}(s, t) ds = \int_0^L u_n(s, t) f_{Im}(s, t) ds$$

Tenant compte de l'expression (8.127) et (8.130a) les forces d'inertie s'expriment par :

$$(8.146) \quad f_I(s, t) = m(s) \ddot{u}(s, t) = -\omega^2 m(s) \phi(s) y(t)$$

dans laquelle  $m(s)$  représente la masse au mètre linéaire de la poutre. Reportant cette expression dans (8.145) on obtient :

$$(8.147) \quad \omega_n^2 y_m y_n \int_0^L \phi_m(s) m(s) \phi_n(s) ds = \omega_m^2 y_m y_n \int_0^L \phi_n(s) m(s) \phi_m(s) ds$$

soit :

$$(8.148) \quad (\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^L \phi_m(s) m(s) \phi_n(s) ds = 0$$

qui implique dès que  $\omega_m \neq \omega_n$  la relation d'orthogonalité des modes propres.

### 8.5.4 EQUATION GENERALE DES VIBRATIONS DE FLEXION

L'équation générale de la poutre en flexion soumise à une sollicitation extérieure s'écrit :

$$(8.149) \quad EI \frac{\partial^4 u}{\partial s^4} + m(s) \ddot{u} = f(s, t)$$

Sa solution est obtenue par décomposition sur la base des modes propres :

$$(8.150) \quad u(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(s) q_n(t)$$



En reportant dans l'équation (8.149) et en tenant compte de la propriété d'orthogonalité (8.148), on en déduit les équations différentielles que doivent satisfaire les  $q_n(t)$  :

$$(8.151) \quad \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = f_n(t) \quad , \quad n = 1, \dots, \infty$$

dans laquelle  $f_n(t)$  a pour expression

$$(8.152) \quad f_n(t) = \frac{\int_0^L f(s,t) \phi_n(s) ds}{\int_0^L m(s) \phi_n^2(s) ds}$$

## 8.6 FREQUENCES PROPRES DE FLEXION DES POUTRES DROITES

Le tableau 8.1 résume les fréquences propres des trois premiers modes de vibration des poutres droites à une travée en fonction des conditions d'appuis aux extrémités de la travée. Ces résultats sont établis par mise en œuvre de la méthode détaillée au paragraphe 8.5.2 pour la poutre console.

Le tableau 8.1 donne, outre les fréquences propres, les déformées des modes propres (colonne 3) avec la position des nœuds de vibration dont l'abscisse est donnée en fraction de la portée  $L$ , les conditions aux limites applicables (colonne 4), l'équation aux fréquences propres (colonne 5), les valeurs des paramètres  $A_i$  entrant dans l'équation de la déformée modale (équation (8.136)), bien évidemment exprimées à une constante multiplicative près.

Lorsque le numéro du mode devient élevé, les fréquences propres tendent vers les valeurs asymptotiques suivantes:

Conditions d'appui	Mode	Fréquences $aL$
Appuyée – Appuyée	$> 4$	$\approx n \pi$
Encastrée – Appuyée	$> 4$	$\approx (4n + 1) \pi / 4$
Encastrée – Encastrée	$> 4$	$\approx (2n + 1) \pi / 2$
Encastrée – Libre	$> 4$	$\approx (2n - 1) \pi / 2$
Libre – Libre	$> 5$	$\approx (2n - 1) \pi / 2$

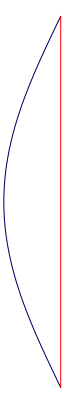
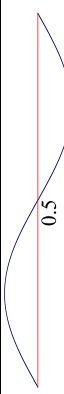

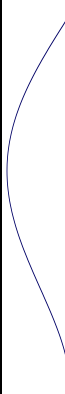
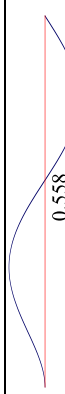


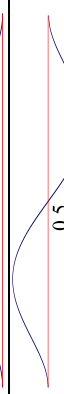


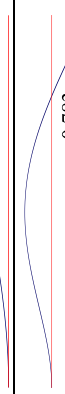
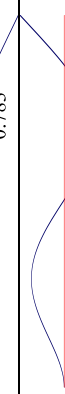
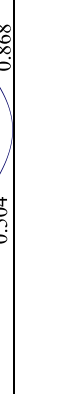
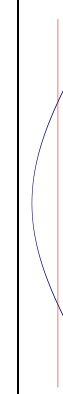

Conditions d'appui	Mode	Déformée modale	Conditions aux limites	Equation fréquences propres	Constantes $A_i/A_1$	Fréquences $aL$
Appuyée – Appuyée	1		$\phi(0) = 0$ $\phi''(0) = 0$ $\phi(L) = 0$ $\phi''(L) = 0$	$\sin(aL) = 0$	$A_2/A_1 = 0$ $A_3/A_1 = 0$ $A_4/A_1 = 0$	3.1416
	2				$A_2/A_1 = 0$ $A_3/A_1 = 0$ $A_4/A_1 = 0$	6.283
	3				$A_2/A_1 = 0$ $A_3/A_1 = 0$ $A_4/A_1 = 0$	9.425
Encastree – Appuyée	1		$\phi(0) = 0$ $\phi'(0) = 0$ $\phi(L) = 0$ $\phi''(L) = 0$	$\text{tg}(aL) - \text{th}(aL) = 0$	$A_2/A_1 = -0.9992$ $A_3/A_1 = -1$ $A_4/A_1 = 0.9992$	3.927
	2				$A_2/A_1 = -1.0000$ $A_3/A_1 = -1$ $A_4/A_1 = 1.0000$	7.069
	3				$A_2/A_1 = -1.0000$ $A_3/A_1 = -1$ $A_4/A_1 = 1.0000$	10.210
Encastree – Encastree	1		$\phi(0) = 0$ $\phi'(0) = 0$ $\phi(L) = 0$ $\phi''(L) = 0$	$\cos(aL)\text{ch}(aL) = 1$	$A_2/A_1 = -1.0178$ $A_3/A_1 = -1$ $A_4/A_1 = 1.0178$	4.730
	2				$A_2/A_1 = -0.9992$ $A_3/A_1 = -1$ $A_4/A_1 = 0.9992$	7.853
	3				$A_2/A_1 = -1.0000$ $A_3/A_1 = -1$ $A_4/A_1 = 1.0000$	10.996
Encastree – Libre	1		$\phi(0) = 0$ $\phi'(0) = 0$ $\phi''(L) = 0$ $\phi'''(L) = 0$	$\cos(aL)\text{ch}(aL) = -1$	$A_2/A_1 = -1.3622$ $A_3/A_1 = -1$ $A_4/A_1 = 1.3622$	1.875
	2				$A_2/A_1 = -0.9818$ $A_3/A_1 = -1$ $A_4/A_1 = 0.9818$	4.694
	3				$A_2/A_1 = -1.0008$ $A_3/A_1 = -1$ $A_4/A_1 = 1.0008$	7.855
Libre – Libre	1		$\phi''(0) = 0$ $\phi'''(0) = 0$ $\phi''(L) = 0$ $\phi'''(L) = 0$	$\cos(aL)\text{ch}(aL) = 1$	Mouvement de corps rigide	0.000
	2				$A_2/A_1 = -1.0178$ $A_3/A_1 = 1$ $A_4/A_1 = -1.0178$	4.730
	3				$A_2/A_1 = -0.9992$ $A_3/A_1 = 1$ $A_4/A_1 = -0.9992$	7.853

Tableau 8.1 : Fréquences propres et modes propres d'une poutre

## 8.7 VIBRATIONS DE FLEXION DES POUTRES CONTINUES

On s'intéresse dans ce paragraphe aux modes de vibrations en flexion de poutres droites continues, multi-supportées telles que représentées sur la figure 8.19.

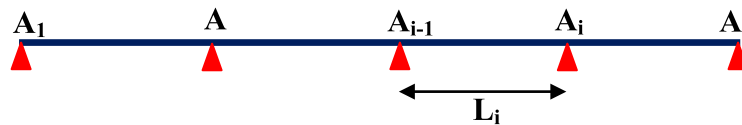


Figure 8.19 : Poutre continue sur plusieurs appuis

Pour une travée de portée  $L$ , la solution donnant les modes propre s'écrit suivant la forme (8.136).

$$(8.153) \quad \phi(s) = A \sin(as) + B \cos(as) + C \operatorname{ch}(as) + D \operatorname{sh}(as)$$

Les conditions aux extrémités de la travée s'écrivent en désignant par  $M_0$  et  $M_1$  les moments dans aux deux extrémités:

$$(8.154) \quad \phi(0) = \phi(L) = 0 \quad , \quad M_0 = EI\phi''(0) \quad , \quad M_1 = EI\phi''(L)$$

L'application des conditions en  $s = 0$  donne pour (8.153) l'expression :

$$(8.155) \quad \phi(s) = \frac{M_0}{2EIa^2} (\operatorname{ch}(as) - \cos(as)) + A \sin(as) + D \operatorname{sh}(as)$$

L'application à (8.155) des conditions en  $s = L$ , en posant  $aL = u$ , conduit à :

$$(8.156) \quad \begin{cases} \frac{M_0}{2EI} (\operatorname{ch} u - \cos u) + D a^2 \operatorname{sh} u + A a^2 \sin u = 0 \\ -\frac{M_1}{EI} + \frac{M_0}{2EI} (\operatorname{ch} u + \cos u) + D a^2 \operatorname{sh} u - A a^2 \sin u = 0 \end{cases}$$

Soit en résolvant par rapport à  $A$  et  $D$ :

$$(8.157) \quad \begin{cases} 2D a^2 \operatorname{sh} u = \frac{1}{EI} (M_1 - M_0 \operatorname{ch} u) \\ 2A a^2 \sin u = \frac{1}{EI} (M_0 \cos u - M_1) \end{cases}$$

Les rotations d'extrémité sont données par :

$$(8.158) \quad \begin{cases} EI \omega_0 = EI \phi'(0) = a (A + D) EI \\ EI \omega_1 = EI \phi'(L) = \frac{M_0}{2a} (\operatorname{sh} u + \sin u) + EI a D \operatorname{ch} u + EI a A \cos u \end{cases}$$

En tenant compte de (8.157) il vient :

$$(8.159) \quad \begin{cases} 2EI a \omega_0 = -K(u) M_0 - H(u) M_1 \\ 2EI a \omega_1 = +H(u) M_0 + K(u) M_1 \end{cases}$$

avec

$$(8.160) \quad K(u) = \frac{1}{\operatorname{th} u} - \frac{1}{\operatorname{tg} u} \quad , \quad H(u) = \frac{1}{\sin u} - \frac{1}{\operatorname{sh} u}$$

Pour une poutre continue uniforme ( $EI = \text{cst}$ ), telle celle de la figure 8.19, on écrit la continuité des rotations à chaque appui (celle des déplacements est assurée puisque  $\phi(A_i) = 0$ ). A l'appui  $A_i$  cette relation s'écrit:

$$(8.161) \quad H(a L_i) M_{i-1} + [K(a L_i) + K(a L_{i+1})] M_i + H(a L_{i+1}) M_{i+1} = 0$$

Cette formule est connue en mécanique des structures sous le nom de formule des « trois moments ».

On écrit autant de relations (8.161) qu'il y a d'appuis intermédiaires et avec les conditions de moments nuls aux appuis 0 et n, on aboutit au système linéaire

$$(8.162) \quad \underline{\underline{\mathbf{X} \mathbf{M} = 0}}$$

dont le déterminant doit être nul pour fournir une solution non identiquement nulle.

$$(8.163) \det(\underline{\underline{\mathbf{X}}}) = \begin{vmatrix} K(aL_1) + K(aL_2) & H(aL_2) & 0 & 0 & \text{---} \\ H(aL_2) & K(aL_2) + K(aL_3) & H(aL_3) & 0 & \text{---} \\ 0 & H(aL_3) & K(aL_3) + K(aL_4) & H(aL_4) & \text{---} \\ \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} \end{vmatrix} = 0$$

Dans le cas de deux travées de même portée l'équation (8.161), avec  $M_0 = M_2 = 0$ , fournit :

$$(8.164) \quad K(aL) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(aL) = \operatorname{th}(aL)$$

Et les vibrations propres sont celles d'une poutre de longueur  $L$  encastrée à une extrémité et simplement appuyée à l'autre (voir tableau 8.1).

Dans le cas de trois travées symétriques de portées  $l, L, l$ , l'équation (8.163) s'écrit

$$(8.165) \quad [K(al) + K(aL)]^2 - [H(aL)]^2 = 0$$

Soit

$$(8.166) \quad \begin{cases} K(al) + K(aL) - H(aL) = 0 \\ K(al) + K(aL) + H(aL) = 0 \end{cases}$$

Dont les racines correspondent aux modes de vibrations propres symétriques et antisymétriques. Dans le cas d'une travée centrale de longueur égale à 1.5 fois la longueur des travées de rive, les fréquences propres solution de l'équation (8.166) ont données par:

$$(8.167) \quad al = 3.556, 4.297, 6.806, 8.901, 9.948, \dots$$

## CHAPITRE 9

### PROPAGATION D'ONDES EN MILIEU ELASTIQUE TRIDIMENSIONNEL

#### 9.1 INTRODUCTION

L'étude de la vibration des poutres effectuée au chapitre 8 permet de traiter de la réponse dynamique de la plupart des structures; il conviendrait pour être complet d'y adjoindre l'étude des vibrations des plaques et coques. Une autre grande classe de problèmes concerne la propagation des ondes dans un solide élastique tridimensionnel pour lequel une des dimensions n'est pas prépondérante vis-à-vis des autres. Le cas d'application le plus évident est celui de la propagation des ondes dans le sol support des ouvrages. Cette propagation peut résulter d'une sollicitation sismique, d'un impact dans le milieu (explosion, compactage dynamique), du battage ou vibrofonçage de pieux....

Tous ces phénomènes ont en commun une source située à la surface, ou en profondeur, dans le sol qui émet des vibrations donnant naissance à des trains d'ondes se propageant dans le milieu. L'objet du présent chapitre est d'étudier la nature des ondes se propageant dans le sol ainsi que les transformations qu'elles subissent au cours de leur propagation en heurtant des obstacles. Bien que le sol soit un matériau à comportement non-linéaire, dissipatif, on se restreindra au cas du solide élastique dans l'hypothèse des petites déformations.

#### 9.2 MISE EN EQUATION

La mise en équation suit la démarche habituelle mise en œuvre dans les chapitres précédents. La première étape consiste à établir les équations d'équilibre du système; ces équations peuvent être obtenues soit directement en identifiant les efforts s'exerçant sur un volume élémentaire et en écrivant que leur résultante est nulle, soit de façon plus générale à partir du Principe des Puissances Virtuelles. Aux équations d'équilibre, on adjoint la loi de comportement du milieu pour exprimer les équations d'équilibre en fonction du vecteur déplacement  $\underline{u}(M)$  de tout point M du milieu.

### 9.2.1 EQUATION D'EQUILIBRE - METHODE DIRECTE

Considérons (figure 9.1) un volume élémentaire du milieu noté  $\Omega$  dont la surface est  $\partial\Omega$ . Les forces s'exerçant sur ce solide sont constituées :

- d'une densité volumique d'effort  $\underline{f}$
- des forces exercées au contour du solide  $\underline{t}$  par le reste du milieu
- des forces d'inertie  $\underline{f}_I$

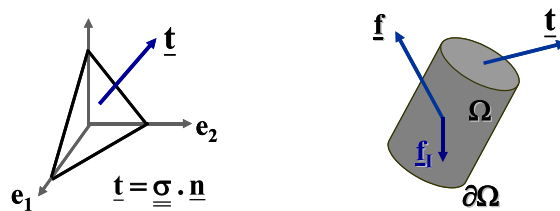


Figure 9.1 : Equilibre du solide élémentaire

L'équilibre s'exprime en écrivant que la résultante de ces efforts est nulle :

$$(9.1) \quad \int_{\Omega} (\underline{f} + \underline{f}_I) dv + \int_{\partial\Omega} \underline{t} da = 0$$

Les forces d'inertie s'expriment en fonction de la masse volumique  $\rho$  du milieu et de son accélération  $\underline{\gamma}$ .

$$(9.2) \quad \underline{f}_I = -\rho \underline{\gamma}$$

Par ailleurs, la mécanique des milieux continus et le lemme du tétraèdre (figure 9.1) permettent d'exprimer le vecteur contrainte  $\underline{t}$  en fonction du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  et de la normale  $\underline{n}$  au contour <sup>1</sup>.

$$(9.3) \quad \underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$$

Portant (9.2) et (9.3) dans (9.1), il vient :

<sup>1</sup> Dans le chapitre, on utilise la notation "." pour désigner le produit contracté une fois de 2 tenseurs , ainsi  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \sum_j \sigma_{ij} n_j$ , le symbole ":" pour désigner le produit doublement contracté.

$$(9.4) \quad \int_{\Omega} (\underline{f} - \rho \underline{\gamma}) dv + \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} da = 0$$

La deuxième intégrale de l'équation (9.4) peut être transformée en intégrale de volume à l'aide du théorème de la divergence.

$$(9.5) \quad \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} da = \int_{\Omega} \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} dv = \int_{\Omega} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) dv$$

L'équation (9.4) devient :

$$(9.6) \quad \int_{\Omega} (\underline{f} + \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} - \rho \underline{\gamma}) dv = 0$$

Cette équation est valable pour tout volume  $\Omega$ ; il en résulte que son intégrande est nulle :

$$(9.7) \quad \boxed{\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} = \rho \underline{\gamma}}$$

La relation (9.7) représente l'équation d'équilibre indéfinie du système. En termes de composantes dans le repère orthonormé d'axes, les axes ( $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$ ), la relation (9.7) s'écrit :

$$(9.8) \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad , \quad i = 1, 3$$

## 9.2.2 EQUATION D'EQUILIBRE - PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES

Les efforts extérieurs sont représentés par une densité d'efforts volumiques  $\underline{f}$  et une densité d'efforts surfaciques  $\underline{g}$  (figure 9.2). La puissance de ces efforts dans un champ de vitesses virtuelles  $\hat{\underline{U}}(\underline{x})$ , où  $\underline{x}$  désigne la position d'un point M, s'écrit :

$$(9.9a) \quad \mathcal{P}_e(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega} \underline{f}(\underline{x}, t) \cdot \hat{\underline{U}}(\underline{x}) dv + \int_{\partial\Omega} \underline{g}(\underline{x}, t) \cdot \hat{\underline{U}}(\underline{x}) da$$

En admettant que la puissance des efforts intérieurs ne dépend que du champ de vitesse virtuelle  $\hat{\underline{U}}$  et de son premier gradient, on montre que celle-ci s'exprime par :

$$(9.10) \quad \mathcal{P}_i(\hat{\underline{U}}) = - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{d}}(\hat{\underline{U}}) dv = - \int_{\Omega} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \hat{d}_{ij}(\hat{\underline{U}}) dv$$

dans laquelle



$$(9.11) \quad \underline{\hat{d}}(\hat{\underline{U}}) = \frac{1}{2}(\underline{\nabla^T \hat{U}} + \underline{\nabla \hat{U}})$$

avec

$$(9.12) \quad \underline{\nabla \hat{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \hat{U}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \hat{U}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{U}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \hat{U}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \hat{U}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{U}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \hat{U}_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

soit en termes de composantes :

$$(9.13) \quad \hat{d}_{ij}(\hat{\underline{U}}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{U}_j}{\partial x_i} \right)$$

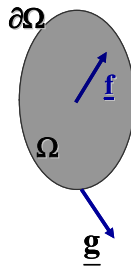


Figure 9.2 : Efforts extérieurs

La puissance des quantités d'accélération est donnée par :

$$(9.14) \quad \mathcal{A}(\hat{\underline{U}}) = \int_{\Omega} \rho \underline{\gamma}(\underline{x}, t) \cdot \hat{\underline{U}}(\underline{x}) \, dv$$

L'équation d'équilibre s'obtient en exprimant que la puissance des efforts extérieurs plus la puissance des efforts intérieurs est égale à la puissance des quantités d'accélération, soit :

$$(9.15) \quad -\int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\hat{d}}(\hat{\underline{U}}) \, dv + \int_{\Omega} \underline{f} \cdot \hat{\underline{U}} \, dv + \int_{\partial\Omega} \underline{g} \cdot \hat{\underline{U}} \, da = \int_{\Omega} \rho \underline{\gamma} \cdot \hat{\underline{U}} \, dv$$

Tenant compte de la symétrie du tenseur des contraintes il s'ensuit :

$$(9.16) \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{\underline{d}}}(\hat{\underline{\underline{U}}}) \, dv = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}} \hat{\underline{\underline{U}}} \, dv$$

et en intégrant par parties

$$(9.17) \quad - \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{\underline{d}}}(\hat{\underline{\underline{U}}}) \, dv = \int_{\Omega} (\underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}) \cdot \hat{\underline{\underline{U}}} \, dv - \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}) \cdot \hat{\underline{\underline{U}}} \, da$$

En reportant dans l'équation (9.15) et en écrivant que l'égalité obtenue est valable pour tout champ de vitesse virtuelle  $\hat{\underline{\underline{U}}}$ , on obtient les équations d'équilibre

$$(9.18a) \quad \text{sur } \Omega \quad \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{f}} = \rho \underline{\underline{\gamma}}$$

$$(9.18b) \quad \text{sur } \partial\Omega \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{g}}$$

### 9.2.3 EQUATION DE COMPORTEMENT

La loi de comportement de l'élasticité linéaire isotrope en petites déformations s'écrit :

$$(9.19) \quad \underline{\underline{\sigma}} = \lambda \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}}$$

où  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  désigne le tenseur des déformations relié au champ des déplacements  $\underline{\underline{u}}$  par :

$$(9.20) \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\nabla}}^T \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{u}})$$

soit en termes de composantes

$$(9.21) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Dans l'équation (9.19), la quantité  $\operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})$  représente la déformation volumique

$$(9.22) \quad \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont deux paramètres définissant complètement le comportement du matériau élastique linéaire isotrope; ces paramètres sont appelés coefficients de Lamé du matériau. En

mécanique des structures, il est d'usage d'utiliser, de préférence aux coefficients de Lamé, le module d'Young et le coefficient de Poisson. En mécanique des sols, les paramètres les plus utiles sont le module de cisaillement  $\mu$ , souvent noté  $G$ , et le module volumétrique  $B$ . Les relations entre ces divers paramètres sont données dans le tableau 9.1.

	$E, \nu$	$E, \mu$	$\lambda, \mu$
$\lambda$	$\frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$\frac{\mu(E - 2\mu)}{3\mu - E}$	$\lambda$
$\mu \equiv G$	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$	$\mu$	$\mu$
$E$	$E$	$E$	$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$
$B$	$\frac{E}{3(1 - 2\nu)}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu - E)}$	$\lambda + \frac{2\mu}{3}$
$\nu$	$\nu$	$\frac{E - 2\mu}{2\mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$

Tableau 9.1 : Relations entre paramètres du comportement élastique

#### 9.2.4 EQUATIONS D'EQUILIBRE POUR LES DEPLACEMENTS

Reportant l'expression de la loi de comportement (9.19) dans l'équation indéfinie de l'équilibre, et en tenant compte de la définition (9.20) du tenseur des déformations, on obtient l'équation d'équilibre indéfinie exprimée en fonction du champ de déplacement  $\underline{u}$  :

$$(9.23) \quad (\lambda + \mu)[\underline{\nabla}(\underline{\nabla} \cdot \underline{u})] + \mu \Delta \underline{u} = \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} - \underline{f}$$

où les opérations  $\underline{\nabla}$  et  $\Delta$  représentent respectivement le gradient et le Laplacien.

En termes de composantes, l'équation (9.23) s'écrit :

$$(9.24) \quad (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - f_i \quad , \quad i = 1, 3$$

### 9.3 DÉCOUPLAGE DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

D'après la décomposition de Helmholtz, il est toujours possible de décomposer un champ de vecteurs  $\underline{u}$  en la somme du gradient d'un potentiel scalaire  $\phi$  et du rotationnel d'un potentiel vecteur  $\underline{\psi}$  :

$$(9.25) \quad \underline{u} = \underline{\nabla}(\phi) + \underline{\nabla} \wedge \underline{\psi}$$

soit en termes de composantes

$$(9.26) \quad u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} \quad , \quad i = 1, 3 \quad , \text{permutation circulaire sur } i, j, k$$

L'examen de l'équation (9.25) montre que partant de trois inconnues, les composantes du vecteur  $\underline{u}$ , on a introduit par la décomposition en potentiels quatre inconnues : le potentiel scalaire et les trois composantes du potentiel vecteur. Il est donc nécessaire de spécifier une condition supplémentaire. Celle-ci est généralement obtenue en écrivant que la divergence du potentiel vecteur  $\underline{\psi}$  est nulle.

$$(9.27) \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{\psi} = 0$$

Reportant la relation (9.25) dans (9.23) en tenant compte de (9.27), on obtient les équations suivantes pour les potentiels :

$$(9.28) \quad \Delta(\phi) = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - F$$

$$(9.29) \quad \Delta(\underline{\psi}) = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \underline{\psi}}{\partial t^2} - \underline{G}$$

dans lesquelles on a posé

$$(9.30) \quad c_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

$$(9.31) \quad c_T^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

et en introduisant la décomposition de Helmholtz du vecteur  $\underline{f}$ :

$$(9.32) \quad \underline{f} = c_L^2 \underline{\nabla}(F) + c_T^2 \underline{\nabla} \wedge \underline{G}$$

En termes de composantes, les équations (9.28) et (9.29) s'écrivent :

$$(9.33) \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - F$$

$$(9.34) \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_j^2} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} - G_i \quad , \quad i = 1, 3$$

Faisant abstraction des conditions limites, les équations (9.28) et (9.29) régissent la propagation de deux ondes se propageant avec les célérités  $c_L$  et  $c_T$ . On notera la structure analogue de ces équations avec celles régissant la vibration des poutres (éqs. 8.35, 8.85), les inconnues étant ici les potentiels.

Ces ondes sont appelées *ondes de volume*. L'équation (9.28) régit la propagation de l'onde de compression ou onde primaire, également notée P. L'équation (9.29) régit la propagation de l'onde de *cisaillement*, ou onde secondaire, également notée onde S.

La comparaison des relations (9.30) et (9.31) montre que la célérité  $c_L$  de l'onde P est supérieure à celle  $c_T$  de l'onde S.

Pour fixer des ordres de grandeurs, on trouvera dans le tableau 9.2 des ordres de grandeurs des célérités  $c_L$  et  $c_T$  dans les sols. On se reportera au chapitre 8 pour les valeurs caractéristiques de l'acier et du béton.

Matériau	$c_T$ (m/s)	$c_L$ (m/s)
Argile molle	100 - 200	1 500
Sable hors nappe	200 - 400	400 - 800
Sable sous nappe	200 - 400	1 500 - 1 700
Marne	400 - 600	1 500 - 2 000
Rocher	> 800	> 2 000

Tableau 9.2 : Valeurs représentatives des célérités P et S dans les sols

## 9.4 ONDES PLANES

Si l'on fait l'hypothèse que la propagation des ondes P et S prend place dans une seule direction, que l'on considèrera sans perte de généralité comme étant la direction  $\underline{e}_1$ , les quantités intervenant dans les équations de propagation ne dépendent que de la quantité  $x_1$ . L'équation (9.25) se réduit à :

$$(9.35) \quad \underline{u} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \underline{e}_1 - \frac{\partial \psi_3}{\partial x_1} \underline{e}_2 + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \underline{e}_3$$

soit en termes de déplacements (éq. 9.23)

$$(9.36a) \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$(9.36b) \quad \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad , \quad j = 2, 3$$

Cette situation de propagation unidirectionnelle a déjà été rencontrée au chapitre 8 dans le cas des milieux curvilignes pour lesquels la géométrie du milieu n'autorise que ce mécanisme de propagation.

Ainsi l'équation (9.36a) représente l'équation de vibration longitudinale des poutres dans laquelle on a posé  $E = \rho c_L^2$  et les équations (9.36b) celle de l'équation des vibrations transversales des poutres dans laquelle on a posé  $GS' = \rho S c_T^2$  et négligé les déformations de flexion devant celles de cisaillement ( $EI \gg GS'$ ).

On peut également la rencontrer dans le cas d'un milieu bi ou tridimensionnel. Par exemple dans le cas d'un solide infini, isotrope, une source ponctuelle donnera naissance à des ondes à géométrie sphérique par raison de symétrie. En s'éloignant de la source, le front d'onde peut, par suite de son expansion, être raisonnablement assimilé à un plan (le plan tangent au front d'onde sphérique, figure 9.3).

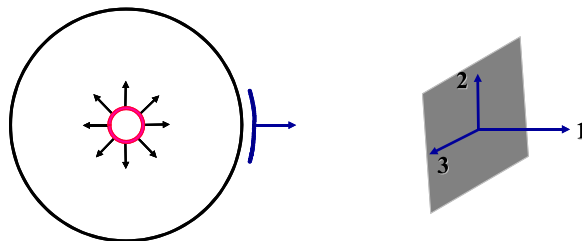


Figure 9.3 : Ondes planes

Dans le cas d'une onde plane, l'onde de compression régie par l'équation (9.36a) donne naissance à un mouvement vibratoire orienté le long de la direction de propagation (normale au plan tangent) et l'onde de cisaillement régie par l'équation (9.36b) à un mouvement vibratoire contenu dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation (plan tangent).

## 9.5 ONDES MONOCHROMATIQUES PLANES

L'expression des potentiels  $\phi$  et  $\underline{\psi}$  pour une onde monochromatique plane de pulsation  $\omega$ , s'obtient comme solutions des équations (9.28) et (9.29) en recherchant des solutions de la forme  $\mathbf{H}(\mathbf{M})e^{i\omega t}$  sous la contrainte que le point M reste contenu dans un plan de direction fixe.

$$(9.37) \quad \phi = \underline{A} \exp \left[ \frac{i\omega}{c_L} (\ell_x x + \ell_y y + \ell_z z - c_L t) \right]$$

$$(9.38) \quad \underline{\psi} = \underline{B} \exp \left[ \frac{i\omega}{c_T} (\ell_x x + \ell_y y + \ell_z z - c_T t) \right]$$

avec

$$(9.39) \quad \|\underline{\ell}\| = 1 \quad , \quad \underline{\ell} \cdot \underline{B} = 0$$

Lorsque les composantes du vecteur  $\underline{\ell}$  sont toutes réelles, celui-ci représente le vecteur des cosinus directeurs de la direction de propagation pour les *ondes de volume* de célérité  $c_L$  et  $c_T$ .

Lorsqu'une des composantes, par exemple  $\ell_z$ , est imaginaire pure, les autres composantes étant réelles, les équations (9.37) et (9.38) représentent une onde se propageant dans le plan (x-y) dont l'amplitude décroît exponentiellement avec z. Ces ondes sont appelées *ondes de surface*.

Les déplacements associés aux potentiels  $\phi$  et  $\underline{\psi}$  s'obtiennent par la relation (9.25). Posant :

$$(9.40) \quad \underline{f}_L = \exp \left[ \frac{i\omega}{c_L} (\ell_x x + \ell_y y + \ell_z z - c_L t) \right]$$

$$(9.41) \quad \underline{f}_T = \exp \left[ \frac{i\omega}{c_T} (\ell_x x + \ell_y y + \ell_z z - c_T t) \right]$$

Ceux-ci s'écrivent :

$$(9.42) \quad \underline{u} = \frac{i\omega}{c_L} \underline{f}_L A \underline{\ell} - \frac{i\omega}{c_T} \underline{f}_T \underline{B} \wedge \underline{\ell}$$

Sous cette forme, on reconnaît que l'onde P, de célérité  $c_L$ , donne naissance à un déplacement dans la direction de propagation  $\underline{\ell}$ ; l'onde S de célérité  $c_T$  donne naissance à un déplacement dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. Ce dernier mouvement peut être décomposé en un mouvement contenu dans un plan horizontal et un mouvement contenu dans un plan vertical. Soient  $A_{SH}$  et  $A_{SV}$  les amplitudes des déplacements correspondants, il résulte de (9.42) que :

$$(9.43a) \quad \underline{u}_{SH} = A_{SH} \underline{f}_T$$

$$(9.43b) \quad \underline{u}_{SV} = A_{SV} \underline{f}_T$$

avec

$$(9.44) \quad A_{SH} = \frac{i\omega}{c_T} \frac{B_z}{\sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2}}$$

$$(9.45) \quad A_{SV} = \frac{i\omega}{c_T} \frac{\ell_x B_y - \ell_y B_x}{\sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2}}$$

### Démonstration

Le vecteur déplacement pour les ondes transverses est donné par le deuxième terme de l'équation (9.42). Pour les ondes SH on cherche la composante horizontale de  $\underline{u}$ . On désigne par  $\underline{t}$  le vecteur unitaire horizontal dans le plan perpendiculaire à  $\underline{\ell}$ .

Si  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  désigne le repère orthonormé général, on a les relations suivantes:

$$(9.46) \quad \underline{t} \cdot \underline{e}_3 = 0 \quad , \quad \underline{t} \cdot \underline{\ell} = 0 \quad , \quad \|\underline{t}\| = 1$$

La composante horizontale de  $\underline{u}$ , en négligeant les termes scalaires multiplicateurs vaut:

$$(9.47) \quad A = (\underline{B} \wedge \underline{\ell}) \cdot \underline{t}$$

soit en développant et en tenant compte des relations donnant  $t_1$  et  $t_2$  obtenues à partir de (9.46)



$$(9.47) \quad t_1 = \frac{-\ell_y}{\sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2}}, \quad t_2 = \frac{-\ell_x}{\sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2}}$$

$$(9.48) \quad A = \frac{-(B_y \ell_z - B_z \ell_y) \ell_y + (B_z \ell_x - B_x \ell_z) \ell_x}{\sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2}}$$

Tenant compte de  $\underline{\ell} \cdot \underline{B} = 0$ , il vient  $-B_y \ell_z \ell_y - B_x \ell_z \ell_x = B_z \ell_z^2$  et en reportant dans (9.48), on obtient la relation

$$(9.49) \quad A = \frac{B_z}{\sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2}}$$

d'où découle l'expression (9.44). Le même type de démonstration s'applique pour le calcul de  $A_{SV}$  en choisissant dans le plan de projeter  $\underline{U}$  sur le vecteur  $\underline{n}$  défini par  $\underline{n} = \underline{\ell} \wedge \underline{z}$ .

Sans diminuer aucunement la généralité des relations précédentes, il est loisible de choisir le repère global afin que la direction de propagation soit contenue dans le plan (x-z); il en résulte que  $\ell_y = 0$  (figure 9.4) et que les relations (9.42) et (9.43) s'écrivent :

$$(9.50) \quad \begin{cases} u_x = A_L f_L \ell_x + A_{SV} f_T \ell_z \\ u_y = A_{SH} f_T \\ u_z = A_L f_L \ell_z - A_{SV} f_T \ell_x \end{cases}$$

Les équations (9.50) montrent que dans le cas d'ondes planes, le déplacement suivant Oy est découplé des déplacements suivants Ox et Oz; il ne résulte que de la propagation d'ondes de cisaillement à polarité horizontale, appelées ondes SH. Les déplacements dans les directions x et z résultent de la propagation d'ondes P et d'ondes S à polarité verticale, appelées ondes SV.

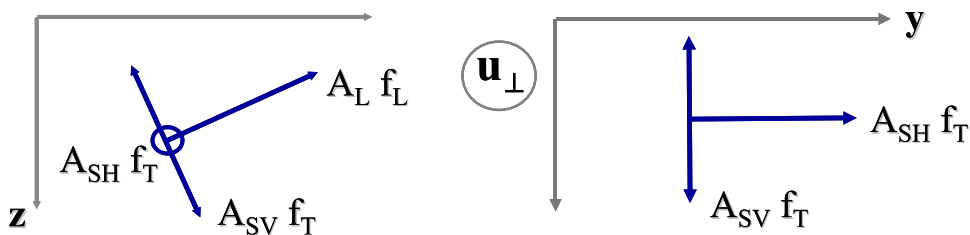


Figure 9.4 : Propagation dans le plan x-z

Si de plus la direction de propagation est verticale, parallèle à l'axe Oz ( $\ell_x = \ell_y = 0, \ell_z = 1$ ), le problème devient unidimensionnel : chacune des composantes du mouvement est découplée des autres :

$$(9.51) \quad \begin{cases} u_x = A_{SV} f_T \\ u_y = A_{SH} f_T \\ u_z = A_L f_L \end{cases}$$

## 9.6 RÉFLEXION - RÉFRACTION DES ONDES PLANES À UN INTERFACE

Considérons (figure 9.5) une onde plane incidente heurtant un interface séparant deux milieux de caractéristiques  $(\lambda_1, \mu_1, \rho_1)$  et  $(\lambda_2, \mu_2, \rho_2)$ . Cette onde incidente va donner naissance à des ondes *réfléchies* se propageant dans le milieu dont est issue l'onde incidente, et à des ondes *réfractées* traversant l'interface et se propageant dans le deuxième milieu.

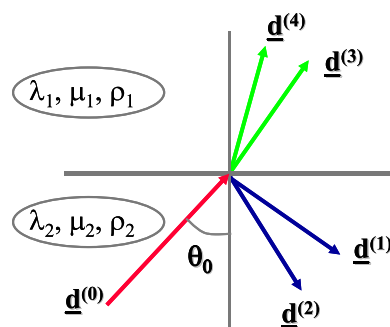


Figure 9.5 : Réflexion - réfraction des ondes planes

On montre qu'une onde incidente donne en général naissance à :

- deux ondes réfléchies,
- deux ondes réfractées.

L'amplitude, l'incidence et la nature des ondes réfléchies et réfractées s'obtiennent tout naturellement en écrivant la continuité du vecteur déplacement  $\underline{u}$  et du vecteur contrainte  $\underline{t}$  à l'interface.

Dans la suite du paragraphe, on étudie en détails le cas de la réflexion-réfraction d'une onde SH et on se contentera d'énoncer les résultats significatifs relatifs à l'onde P ou l'onde SV.

On notera avec un exposant (0) les grandeurs relatives à l'onde incidente, (1) et (2) celles relatives aux ondes réfléchies et (3) et (4) celles relatives aux ondes réfractées.

Les déplacements des ondes incidentes et des ondes réfléchies peuvent s'écrire de façon générale :

$$(9.52) \quad \underline{u}_n = A_n \underline{d}^{(n)} \exp \left[ \frac{i\omega}{c_n} (x \ell_x^{(n)} + z \ell_z^{(n)} - c_n t) \right]$$

relation dans laquelle l'indice (n) sert à identifier les différents types d'ondes,  $(\ell_x, \ell_z)$  sont les cosinus directeurs de la direction de propagation. Le vecteur  $\underline{d}$  est le vecteur unitaire donnant la direction du déplacement. Ces différentes grandeurs sont explicitées ci-dessous pour les différentes ondes.

- Onde incidente  $\ell_x^{(0)} = \sin \theta_0$  ,  $\ell_z^{(0)} = \cos \theta_0$
- . onde P  $c_0 = c_{L2}$   
 $\underline{d}^{(0)T} = \{\sin \theta_0, 0, \cos \theta_0\}$
- . onde SH  $c_0 = c_{T2}$   
 $\underline{d}^{(0)T} = \{0, 1, 0\}$
- . Onde SV  $c_0 = c_{T2}$   
 $\underline{d}^{(0)T} = \{\cos \theta_0, 0, -\sin \theta_0\}$
- Onde P réfléchie  $c_1 = c_{L2}$   
 $\underline{d}^{(1)T} = \{\sin \theta_1, 0, -\cos \theta_1\}$   
 $\underline{\ell}^{(1)} = \underline{d}^{(1)}$
- Onde SH réfléchie  $c_2 = c_{T2}$   
 $\underline{d}^{(2)T} = \{0, 1, 0\}$   
 $\underline{\ell}^{(2)} = \{\sin \theta_2, 0, -\cos \theta_2\}$
- Onde SV réfléchie  $c_2 = c_{T2}$   
 $\underline{d}^{(2)T} = \{-\cos \theta_2, 0, -\sin \theta_2\}$   
 $\underline{\ell}^{(2)} = \{\sin \theta_2, 0, -\cos \theta_2\}$
- Onde P réfractée  $c_3 = c_{L1}$   
 $\underline{d}^{(3)T} = \{\sin \theta_3, 0, \cos \theta_3\}$   
 $\underline{\ell}^{(3)} = \underline{d}^{(3)}$

- Onde SH réfractée
 
$$c_4 = c_{T1}$$

$$\underline{d}^{(4)T} = \{0, 1, 0\}$$

$$\underline{\ell}^{(2)} = \{\sin \theta_4, 0, \cos \theta_4\}$$
- Onde SV réfractée
 
$$c_4 = c_{T1}$$

$$\underline{d}^{(4)T} = \{\cos \theta_4, 0, -\sin \theta_4\}$$

$$\underline{\ell}^{(2)} = \{\sin \theta_4, 0, \cos \theta_4\}$$

### 9.6.1 REFLEXION D'UNE ONDE SH A UNE SURFACE LIBRE

Ce cas est typiquement celui d'une onde sismique heurtant la surface du sol. Le déplacement de l'onde incidente s'écrit (éq. 9.52) :

$$(9.53) \quad \begin{cases} u_y^{(0)} = A_{SH} \exp \left[ \frac{i\omega}{c_T} (x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0 - c_T t) \right] \\ u_x^{(0)} = u_z^{(0)} = 0 \end{cases}$$

Compte tenu du découplage des ondes SH, il est naturel de rechercher, pour l'onde réfléchie, une solution sous la forme d'une onde SH dont le déplacement est donné par :

$$(9.54) \quad u_y^{(2)} = A'_{SH} \exp \left[ \frac{i\omega}{c_T} (x \sin \theta_2 - z \cos \theta_2 - c_T t) \right]$$

La condition de surface libre traduit le fait que pour  $z=0$ , le vecteur contrainte est nul.

$$(9.55) \quad \underline{t} = \underline{t}^{(0)} + \underline{t}^{(2)}$$

A la surface  $z=0$ , le vecteur contrainte  $\underline{t} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}$  a pour composantes  $\{\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}\}$  qui compte tenu de la loi de comportement (9.19) et de l'expression du champ de déplacement se réduit à  $\{0, \sigma_{yz}, 0\}$

avec

$$(9.56) \quad \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

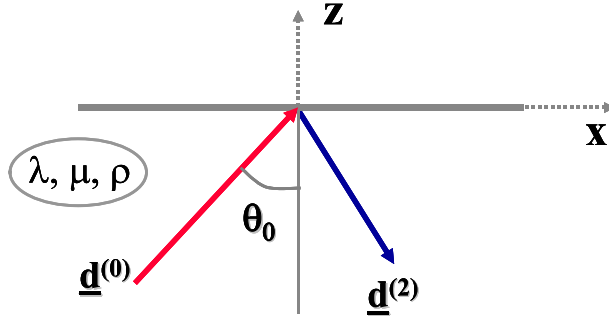


Figure 9.6 : Réflexion d'une onde SH à une surface libre

Des relations (9.53) et (9.54) on en déduit à la surface  $z=0$

$$(9.57a) \quad \underline{t}^{(0)} = \mu A_{SH} \frac{i\omega}{c_T} \cos \theta_0 \exp \left[ \frac{i\omega}{c_T} (x \sin \theta_0 - c_T t) \right]$$

$$(9.57b) \quad \underline{t}^{(2)} = -\mu A'_{SH} \frac{i\omega}{c_T} \cos \theta_2 \exp \left[ \frac{i\omega}{c_T} (x \sin \theta_2 - c_T t) \right]$$

Reportant dans (9.55) et écrivant que la relation doit être vérifiée à tout instant  $t$  et pour toute position  $x$ , on en déduit :

$$(9.58) \quad \theta_2 = \theta_0 \quad , \quad A_{SH} = A'_{SH}$$

Le déplacement résultant de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie a pour expression :

$$(9.59) \quad u_y = u_y^{(0)} + u_y^{(2)} = 2 A_{SH} \cos \left( \frac{\omega z \cos \theta_0}{c_T} \right) \exp \left[ \frac{i\omega}{c_T} (x \sin \theta_0 - c_T t) \right]$$

L'onde réfléchie a même amplitude que l'onde incidente et l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence. A une profondeur  $z$ , l'amplitude totale du mouvement vaut :

$$(9.60) \quad |u_y| = 2 A_{SH} \cos \left( \frac{\omega z \cos \theta_0}{c_T} \right)$$

### 9.6.2 REFLEXION-REFRACTION D'UNE ONDE SH ENTRE DEUX MILIEUX

De la même façon que pour le cas de la surface libre, on recherche une solution sous la forme d'une onde SH réfléchi et d'une onde SH réfractée (figure 9.7).

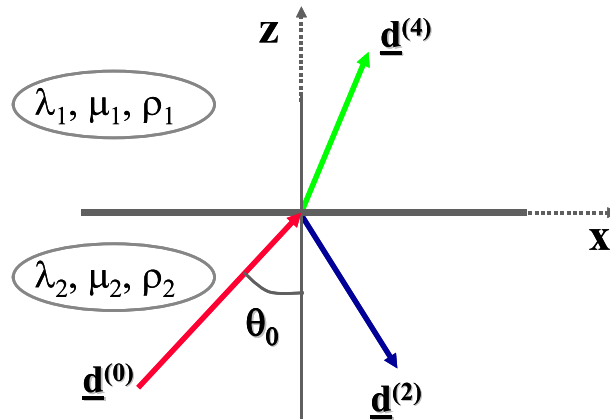


Figure 9.7 : Réflexion-réfraction d'une onde SH

Les déplacements liés à l'onde incidente, à l'onde réfléchi et à l'onde réfractée sont donnés par l'équation (9.52) avec les grandeurs relatives aux ondes SH indiquées au paragraphe 6.

En prenant l'origine  $z=0$  sur l'interface, les équations de continuité du déplacement et du vecteur contrainte imposent :

$$(9.61) \quad u_y^{(0)} + u_y^{(2)} = u_y^{(4)}$$

$$(9.62) \quad \sigma_{yz}^{(0)} + \sigma_{yz}^{(2)} = \sigma_{yz}^{(4)}$$

D'après l'équation (9.56), (9.62) peut également s'écrire

$$(9.63) \quad \mu_2 \left( \frac{\partial u_y^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial u_y^{(2)}}{\partial z} \right) = \mu_1 \frac{\partial u_y^{(4)}}{\partial z}$$

Reportant les relations (9.52) dans les relations (9.61) et (9.63) et écrivant que les identités sont valables pour toute valeur de  $x$  et de  $t$ , on obtient les relations suivantes auxquelles doivent satisfaire  $\theta_i$  et  $c_{Ti}$ .

$$(9.64) \quad \frac{\sin \theta_0}{c_{T2}} = \frac{\sin \theta_2}{c_{T2}} = \frac{\sin \theta_4}{c_{T1}}$$

On reconnaît dans les relations (9.64) les lois de Snell-Descartes, classiques en optique.

Les amplitudes des ondes réfléchie et réfractée sont liées à l'amplitude de l'onde incidente par :

$$(9.65a) \quad \frac{A_2}{A_0} = \frac{c_{T1} \mu_2 \cos \theta_0 - c_{T2} \mu_1 \cos \theta_4}{c_{T1} \mu_2 \cos \theta_0 + c_{T2} \mu_1 \cos \theta_4}$$

$$(9.65b) \quad \frac{A_4}{A_0} = \frac{2 \mu_2 c_{T1} \cos \theta_0}{c_{T1} \mu_2 \cos \theta_0 + c_{T2} \mu_1 \cos \theta_4}$$

On rappelle que  $\mu$  et  $c_T$  sont liés par la relation (9.31).

Les amplitudes normalisées  $A_2/A_0$  et  $A_4/A_0$  sont présentées sur la figure 9.8 en fonction de l'angle d'incidence  $\theta_0$  pour une valeur du rapport  $c_{T1}/c_{T2}=0.8$ .

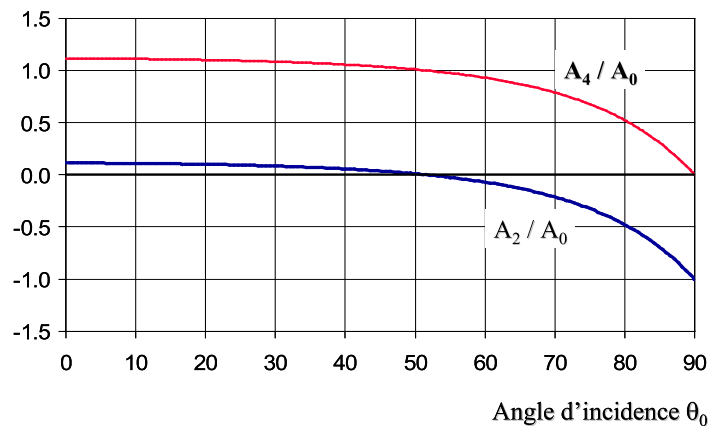


Figure 9.8 : Amplitude des ondes réfléchie et réfractée à un interface -  $c_{T1}/c_{T2}=0.8$

Les équations (9.65) appellent les remarques suivantes :

- l'onde incidente SH est totalement réfractée ( $A_2=0$ ) lorsque la condition suivante est satisfaite

$$(9.66) \quad c_{T1} \mu_2 \cos \theta_0 = c_{T2} \mu_1 \cos \theta_4$$

Il existe donc une combinaison des propriétés mécaniques des deux milieux et de l'angle d'incidence telle qu'aucune onde ne soit réfléchi. Après élimination de  $\theta_4$  entre les relations (9.66) et (9.64), cette relation s'écrit :

$$(9.67) \quad \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 \cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0 = \left( \frac{c_{T2}}{c_{T1}} \right)^2$$

- si la quantité  $(c_{T1}/c_{T2}) \sin \theta_0$  est supérieure à l'unité,  $\cos \theta_4$  est alors un imaginaire pur et l'onde réfractée s'écrit :

$$(9.68) \quad u_y^{(4)} = A_4 e^{-bz} \exp \left[ \frac{i\omega}{c_{T1}} (x \sin \theta_4 - c_{T1} t) \right]$$

dans laquelle b a pour expression

$$(9.69) \quad b = \frac{\omega}{c_{T2}} \left[ \left( \frac{c_{T1}}{c_{T2}} \right)^2 \sin^2 \theta_0 - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

L'onde réfractée est une *onde de surface* dont l'amplitude décroît exponentiellement en s'éloignant de l'interface. Par ailleurs, l'équation (9.65a) montre que le rapport  $A_2/A_0$  est celui de deux nombres complexes conjugués, puisque  $\cos \theta_4$  est imaginaire pur; l'amplitude de l'onde réfléchi est égale à l'amplitude de l'onde incidente avec un changement de phase de  $\pi/2$ .

- Si  $\mu_1=c_{T1}=0$ , on retrouve le cas examiné au paragraphe précédent de la réflexion à une surface libre.

### 9.6.3 REFLEXION-REFRACTION D'UNE ONDE P A UN INTERFACE

On peut anticiper le fait qu'une onde P incidente donnera généralement naissance (figure 9.5) à la réflexion et à la réfraction d'ondes P et d'ondes SV. Les équations des déplacements associés aux différents types d'onde sont donnés par les relations (9.52) avec le choix approprié des paramètres. Les équations de continuité s'écrivent :

$$(9.70) \quad \begin{cases} u_j^{(0)} + u_j^{(1)} + u_j^{(2)} = u_j^{(3)} + u_j^{(4)} \\ \sigma_{zj}^{(0)} + \sigma_{zj}^{(1)} + \sigma_{zj}^{(2)} = \sigma_{zj}^{(3)} + \sigma_{zj}^{(4)} \end{cases} \quad j = x, z$$



Ces relations doivent être valables pour toute valeur de  $x$  et de  $t$ . Il en résulte que :

$$(9.71) \quad \frac{\sin \theta_0}{c_{L2}} = \frac{\sin \theta_1}{c_{L2}} = \frac{\sin \theta_2}{c_{T2}} = \frac{\sin \theta_3}{c_{L1}} = \frac{\sin \theta_4}{c_{T1}}$$

Les amplitudes  $A_i$ ,  $i=1,4$  des ondes sont obtenues en fonction de  $A_0$  à partir du système d'équations (9.70).

Dans le cas le plus simple de l'incidence normale à l'interface ( $\theta_0=0$ ), on montre aisément en tenant compte des relations (9.30) et (9.31) :

$$(9.72a) \quad A_2=A_4=0$$

$$(9.72b) \quad \frac{A_1}{A_0} = \frac{\rho_1 c_{L1} - \rho_2 c_{L2}}{\rho_1 c_{L1} + \rho_2 c_{L2}}$$

$$(9.72c) \quad \frac{A_3}{A_0} = \frac{2\rho_2 c_{L2}}{\rho_1 c_{L1} + \rho_2 c_{L2}}$$

L'équation (9.72b) montre que lorsque les deux milieux en contact ont la même *impédance mécanique* ( $=\rho c_L$ ) aucune onde n'est réfléchiée pour l'incidence normale, ce que l'intuition laissait prévoir.

#### 9.6.4 REFLEXION-REFRACTION D'UNE ONDE SV A UN INTERFACE

La même démarche que celle suivie au paragraphe précédent permet d'établir les relations :

$$(9.73) \quad \frac{\sin \theta_0}{c_{T2}} = \frac{\sin \theta_1}{c_{L2}} = \frac{\sin \theta_2}{c_{T2}} = \frac{\sin \theta_3}{c_{L1}} = \frac{\sin \theta_4}{c_{T1}}$$

### 9.7 PROPAGATION D'UNE ONDE MONOCHROMATIQUE SH PLANE

On a montré au paragraphe 5 que dans le cas d'ondes monochromatiques planes le déplacement horizontal dans la direction perpendiculaire au plan de propagation était découplé des autres composantes du déplacement et pouvait s'écrire :

$$(9.74) \quad u = A \exp \left[ \frac{i\omega}{c_T} (x \sin \theta + z \cos \theta - c_T t) \right]$$

Pour alléger les notations on a omis les indices; le déplacement  $u$  représente la composante  $u_y$  du déplacement, (pour une propagation dans le plan  $x$ - $z$ ), et  $A$  est l'amplitude de l'onde SH.

Considérons (figure 9.9) une couche d'épaisseur limitée surmontant un semi espace et calculons à titre d'illustration du paragraphe 6 le mouvement dans la couche supérieure et dans le semi espace. On notera que la solution correspondant à cette configuration ne peut être obtenue directement par application des résultats du paragraphe 6.2 car l'onde totale réfléchie dans le semi espace résulte de la superposition de l'onde réfléchie  $A^{(2)}$  liée à la composante incidente  $A^{(0)}$  et d'une onde réfractée générée à l'interface par l'onde réfléchie à la surface libre et se propageant dans la direction des  $z$  négatifs. Toutefois, la même méthodologie consistant à écrire la continuité du déplacement et du vecteur contrainte  $\underline{t}$  à l'interface reste applicable.

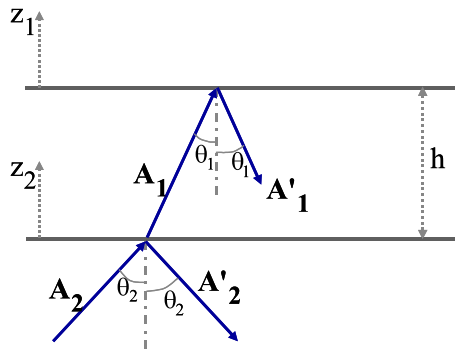


Figure 9.9 : Onde SH dans un semi espace surmonté d'une couche d'épaisseur  $h$

Dans chacune des deux couches le mouvement total résultant de la superposition de l'onde se propageant dans la direction des  $z$  positifs et de celle se propageant dans la direction des  $z$  négatifs s'écrit en prenant l'origine des axes  $z$  au toit de chaque couche :

$$(9.75) \quad u_n = [A_n \exp(ip_n z_n) + A'_n \exp(-ip_n z_n)] f_n(x, t)$$

avec

$$(9.76) \quad p_n = \frac{\omega \cos \theta_n}{c_{Tn}}$$

$$(9.77) \quad f_n(x, t) = \exp \left[ \frac{i\omega}{c_{Tn}} (x \sin \theta_n - c_{Tn} t) \right]$$

L'indice  $n$  sert à identifier la couche; il vaut 1 pour la couche supérieure et 2 pour le semi espace.  $A_n$  et  $A'_n$  sont respectivement les amplitudes des ondes se propageant dans les direction  $z>0$  et  $z<0$ .

La condition de surface libre (paragraphe 6.1) donne immédiatement :

$$(9.78) \quad A_1 = A'_1$$

Les conditions de compatibilité à l'interface permettent d'écrire :

- continuité du déplacement  $u_1(z=-h) = u_2(z=0)$

$$(9.79) \quad A_1 \left( e^{-ip_1 h} + e^{+ip_1 h} \right) f_1(x, t) = (A_2 + A'_2) f_2(x, t)$$

d'où il résulte immédiatement, la relation devant être valable pour tout  $x$  et tout  $t$  :

$$(9.80) \quad \frac{\sin \theta_1}{c_{T1}} = \frac{\sin \theta_2}{c_{T2}}$$

$$(9.81) \quad A_1 \left( e^{-ip_1 h} + e^{+ip_1 h} \right) = (A_2 + A'_2)$$

- continuité du vecteur contrainte  $\sigma_{yz1}(z = -h) = \sigma_{yz2}(z = 0)$

$$(9.82) \quad A_1 \mu_1 p_1 \left( e^{-ip_1 h} - e^{+ip_1 h} \right) = \mu_2 p_2 (A_2 - A'_2)$$

Introduisant le rapport des impédances mécaniques des deux milieux :

$$(9.83) \quad q = \sqrt{\frac{\mu_1 \rho_1}{\mu_2 \rho_2}} \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2}$$

les relations (9.81) et (9.82) permettent de déterminer les amplitudes des différentes ondes :

$$(9.84a) \quad A_2 = \frac{1}{2} A_1 \left[ (1+q) e^{-ip_1 h} + (1-q) e^{+ip_1 h} \right]$$

$$(9.84b) \quad A'_2 = \frac{1}{2} A_1 \left[ (1-q) e^{-ip_1 h} + (1+q) e^{+ip_1 h} \right]$$

Les équations (9.84) sont établies en supposant connue l'amplitude du mouvement à la surface ( $=2A_1$ ), ce qui constitue généralement une donnée d'entrée dans l'étude des phénomènes sismiques.

Lorsque le mouvement à la surface n'est pas représenté par une onde monochromatique mais par une variation temporelle quelconque du déplacement, les techniques de résolution par transformation de Fourier, utilisées dans l'étude des systèmes discrets, permettent de se ramener, pour les systèmes linéaires, à la résolution de problèmes de propagation d'ondes monochromatiques. Il est alors avantageux de calculer la *fonction de transfert* du système.

Par définition, la fonction de transfert entre deux points du système est le rapport de l'amplitude des mouvements de ces deux points exprimée dans le domaine fréquentiel. Si l'un des points est choisi comme étant le point où le déplacement est connu, alors le produit de la fonction de transfert par la transformée de Fourier de ce déplacement représente la réponse fréquentielle au deuxième point; une transformation de Fourier inverse permet d'obtenir la réponse temporelle.

Ainsi, pour le système de la figure 9.9 la fonction de transfert entre la surface du sol et l'interface avec le semi espace est égale à :

$$(9.85) \quad \mathfrak{T} = \left| \frac{u_A}{u_B} \right| = \frac{2A_1}{A_2 + A'_2}$$

Tenant compte des relations (9.84) :

$$(9.86) \quad \mathfrak{T} = \frac{1}{\cos(p_1 h)}$$

Cette fonction est infinie pour les valeurs :

$$(9.87) \quad \omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} \frac{c_{T1}}{h \cos \theta_1}$$

Les pulsations propres données par l'équation (9.87) représentent les pulsations propres de la couche de sol d'épaisseur h. On vérifiera aisément cette proposition en recherchant, de façon classique, les solutions périodiques de l'équation (9.36b, j=2) sous les conditions aux limites – déplacement nul à la base et vecteur contrainte nul à la surface.

La figure 9.10 présente la fonction de transfert d'une couche d'épaisseur 20m, de célérité des ondes S égale à  $c_T = 200$  m/s, de masse volumique  $\rho = 2$ . t/m<sup>3</sup> pour une onde incidente normale ( $\theta_0=0$ ). Comme indiqué par l'équation (9.86) les caractéristiques du semi espace sous jacent n'interviennent pas dans la fonction de transfert pour cette valeur de l'angle d'incidence.

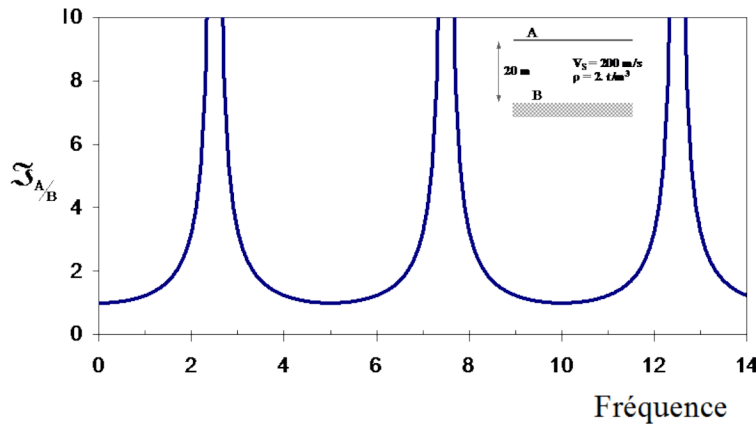


Figure 9.10 : Fonction de transfert d'une couche de sol élastique

## 9.8 ONDES DE SURFACE

On a noté précédemment (paragraphe 5) que d'autres types d'ondes planes que les ondes de volume pouvaient se propager dans un milieu semi infini. Ces ondes, appelées ondes de surface, correspondent au cas où l'une des composantes du vecteur  $\underline{\ell}$  des cosinus directeurs de la direction de propagation devient imaginaire. Ces ondes sont caractérisées par une décroissance exponentielle du déplacement lorsqu'on s'éloigne de la surface.

Considérons le cas d'une onde plane se propageant dans le plan x-z, telle que  $\ell_z$  soit imaginaire pur. Dans ces conditions les potentiels  $\phi$  et  $\underline{\psi}$  s'écrivent :

$$(9.88) \quad \phi = A e^{az} \exp\left[\frac{i\omega}{c}(x - ct)\right]$$

$$(9.89) \quad \underline{\psi} = \underline{B} e^{bz} \exp\left[\frac{i\omega}{c}(x - ct)\right]$$

où c est la célérité de l'onde de surface. Les potentiels donnés par les équations précédentes doivent satisfaire les équations différentielles (9.28) et (9.29). Il en résulte que les constantes a, b, c doivent vérifier les relations (a, b < 0; c > 0) :

$$(9.90) \quad a^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_L^2}$$

$$(9.91) \quad b^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_T^2}$$

Les déplacements sont donnés par (éq. 9.25) :

$$(9.92a) \quad u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = \left[ \frac{i\omega}{c} A e^{az} - bB_2 e^{bz} \right] \exp \left[ \frac{i\omega}{c} (x - ct) \right]$$

$$(9.92b) \quad u_y = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x} = \left[ bB_1 - \frac{i\omega}{c} B_3 \right] e^{bz} \exp \left[ \frac{i\omega}{c} (x - ct) \right]$$

$$(9.92c) \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = \left[ aA e^{az} + \frac{i\omega}{c} B_2 e^{bz} \right] \exp \left[ \frac{i\omega}{c} (x - ct) \right]$$

La condition de surface libre impose l'annulation du vecteur contrainte sur le plan  $z=0$ . Il s'ensuit immédiatement ( $\sigma_{yz}=0$ ) que le déplacement  $u_y$  est identiquement nul.

L'annulation du vecteur contrainte, de composantes  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{zz}$ , fournit, tenant compte de la loi de comportement (9.19), les relations :

$$(9.93) \quad \sigma_{zz}(0) = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} = A \left[ (\lambda + 2\mu) a^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \lambda \right] + 2i\mu \frac{\omega}{c} b B_2 = 0$$

$$(9.94) \quad \sigma_{xz}(0) = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 2iA a \frac{\omega}{c} - \left( b^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) B_2 = 0$$

Les relations précédentes n'admettent une solution non triviale en  $A$  et  $B_2$  que si, et seulement si, le déterminant du système linéaire est nul. Posant  $\alpha^2 = \mu/(\lambda + 2\mu)$  et  $\eta = c/c_T$ , on obtient l'équation suivante :

$$(9.95) \quad \eta^6 - 8\eta^4 + (24 - 16\alpha^2)\eta^2 + 16(\alpha^2 - 1) = 0$$

Cette équation est connue sous le nom d'équation de Rayleigh. On montre qu'elle a une solution  $c_R$  satisfaisant l'inégalité  $0 < c_R < c_T$ . Cette solution dépend du rapport  $\alpha$ , donc du coefficient de Poisson du milieu puisque, d'après les relations du tableau 9.1,  $\alpha^2 = (1 - 2\nu)/(2 - 2\nu)$ . Le tableau 9.3 donne les valeurs du rapport  $c_R/c_T$  pour des valeurs du coefficient de Poisson comprises entre 0 et 0.5.

On notera que la célérité  $c_R$  dans un semi espace homogène ne dépend pas de la pulsation  $\omega$ ; les ondes de Rayleigh sont *non dispersives*. Cette propriété ne reste pas vraie dans un milieu stratifié.

Coefficient de Poisson $\nu$	$c_R/c_T$
0.00	0.862
0.25	0.919
0.33	0.932
0.50	0.955

Tableau 9.3 : Célérité des ondes de Rayleigh

Une approximation utile pour la valeur de la célérité  $c_R$  est donnée par l'équation :

$$(9.96) \quad c_R = \frac{0.862 + 1.14 \nu}{1 + \nu} c_T$$

Compte tenu des relations (9.93) et (9.94), les déplacements (9.92) prennent la forme :

$$(9.96a) \quad u_x = \frac{i\omega}{c_R} A \left[ e^{az} - \frac{2ab}{b^2 + \omega^2/c_R^2} e^{bz} \right] \exp \left[ \frac{i\omega}{c_R} (x - ct) \right]$$

$$(9.96b) \quad u_z = a A \left[ e^{az} - \frac{2\omega^2/c_R^2}{b^2 + \omega^2/c_R^2} e^{bz} \right] \exp \left[ \frac{i\omega}{c_R} (x - ct) \right]$$

Les ondes satisfaisant les relations ci dessus sont appelées *ondes de Rayleigh*, du nom de Lord Rayleigh qui fut le premier à les mettre en évidence. La présence du terme  $i$  dans l'expression du déplacement horizontal montre que cette composante est déphasée de  $90^\circ$  par rapport au déplacement vertical. Les trajectoires des points matériels sont des ellipses rétrogrades dans le plan  $x$ - $z$ . On notera que l'amplitude du déplacement décroît d'autant plus rapidement avec la profondeur que la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi c_R / \omega$  est courte.

La figure 9.11 donne pour le cas  $\nu=0.25$  la variation avec la profondeur des déplacements horizontal et vertical; dans cette figure le déplacement horizontal à la surface a été normé à l'unité.

La propagation d'ondes dont le déplacement décroît exponentiellement en s'éloignant de la surface n'existe pas seulement au voisinage d'une surface libre, mais également à l'interface entre deux milieux de caractéristiques différentes. Il peut donc y avoir existence d'ondes de surface à l'interface entre un solide et un liquide, à l'interface entre deux solides. Ces dernières ondes portent le nom d'ondes de Stoneley lorsque le mouvement prend place dans le plan de propagation ( $u_x \neq 0, u_y = 0, u_z \neq 0$ ). Lorsque le mouvement est perpendiculaire au plan de propagation ( $u_x = u_z = 0, u_y \neq 0$ ) elles portent le nom d'ondes de Love. Ce dernier cas a déjà été rencontré en étudiant la réflexion-réfraction d'une onde SH à un interface (éq. 9.68); la célérité de l'onde de Love est égale à  $c_T$ .

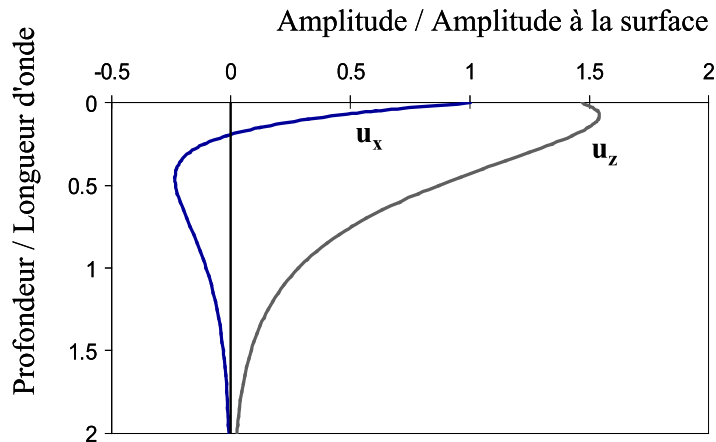


Figure 9.11 : Déplacements dus aux ondes de Rayleigh en milieu élastique ( $\nu=0.25$ )

## 9.9 ONDES SPHERIQUES

Le cas des ondes planes étudiées aux paragraphes précédents présentent un grand intérêt pour les applications pratiques car loin de la source on a vu qu'il était possible d'assimiler le front d'onde à un plan. Cependant, lorsqu'on est amené à étudier la propagation des ondes au voisinage de la source cette approximation cesse d'être vérifiée. La solution dépend de la nature du champ de déplacement (ou de contraintes) induit par la source. Dans ce paragraphe, on se bornera à donner des indications sur le cas simple où les ondes émises possèdent une symétrie sphérique.

Sous cette hypothèse le seul déplacement est, par raison de symétrie, le déplacement radial noté  $u_r$ . Les équations de propagation (éq. 9.23) se réduisent en coordonnées sphériques à :

$$(9.97) \quad \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2u_r}{r^2} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

L'équation régissant le potentiel s'exprime de façon analogue par :

$$(9.98) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

En prenant comme variable le produit  $\varphi = r \phi$ , l'équation (9.98) se simplifie en :

$$(9.99) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$



On reconnaît l'équation de propagation des ondes longitudinales dans une barre dont la solution générale s'écrit :

$$(9.100) \quad \phi(r, t) = \frac{\varphi(r, t)}{r} = \frac{1}{r} [f(r - c_L t) + g(r + c_L t)]$$

Les deux termes de l'équation précédente correspondent respectivement à des ondes s'éloignant de la source et à des ondes convergeant vers la source. Dans un milieu infini aucune réflexion d'ondes ne prend place et il ne peut y avoir d'ondes convergeant vers la source; le terme  $g(r+c_L t)$  est donc nul. Cette condition est connue sous le nom de condition de radiation de Sommerfeld. Le déplacement est alors donné par :

$$(9.101) \quad u_r(r, t) = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} f(r - c_L t) + \frac{1}{r} f'(r - c_L t)$$

Dans le cas d'une onde monochromatique, l'équivalent des équations (9.100) et (9.101) est donné par :

$$(9.102) \quad \phi(r, \omega) = \frac{A}{r} \exp \left[ \frac{i\omega}{c_L} (r - c_L t) \right]$$

$$(9.103) \quad u_r(r, \omega) = A \left[ -\frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{r c_L} \right] \exp \left[ \frac{i\omega}{c_L} (r - c_L t) \right]$$

Les quantités  $f(\cdot)$ , ou  $A$ , sont déterminées par les conditions initiales et aux limites du problème. Ainsi, dans le cas d'une cavité sphérique de rayon  $R$  soumise à une variation de pression radiale,  $p(t)$ , on écrira que  $\sigma_{rr}(R, t) = -p(t)$ . La connaissance du champ de déplacement permet de calculer les contraintes développées dans le milieu par l'intermédiaire de la loi de comportement de celui-ci. On rappelle qu'en symétrie sphérique les seules composantes non nulles du tenseur des contraintes sont  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\phi\phi}$  et  $\sigma_{\theta\theta}$ . Ces grandeurs ont pour expression :

$$(9.104) \quad \sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2\lambda \frac{u_r}{r}$$

$$(9.105) \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2(\lambda + \mu) \frac{u_r}{r}$$

Les équations (9.102) et (9.103) montrent que le front d'onde, lieu des points pour lequel  $\phi$  est constant, est constitué par une sphère centrée à la source. En se propageant le front d'onde se dilate et l'amplitude du déplacement décroît. L'expansion du front d'onde introduit une atténuation du mouvement; cette atténuation, qui s'apparente à un amortissement, est appelé *amortissement géométrique*. Il est important de noter que cet amortissement n'a aucun lien

avec l'amortissement qui serait introduit par les propriétés dissipatives du matériau. Dans le cadre de ce chapitre le milieu ne possède pas de propriétés dissipatives, puisque son comportement est élastique linéaire, mais l'amortissement géométrique est présent.



## CHAPITRE 10

### INTERACTION SOL STRUCTURE

#### 10.1 INTRODUCTION

Les chapitres précédents ont permis d'évaluer les efforts, provenant des forces d'inertie développées dans la structure lorsqu'elle est soumise à un mouvement de son support, qui sont exercés par la structure sur sa fondation. On a également étudié les mouvements du sol support lorsque les ondes sismiques se propagent dans celui-ci avant d'atteindre l'ouvrage dont on cherche à étudier la réponse. La question se pose de savoir comment ces deux phénomènes interagissent et dans quelle mesure le mouvement du support est affecté par la réponse de la structure, dont la réponse sera elle même modifiée par le mouvement du support. Le terme générique regroupant l'étude de ces phénomènes est désigné dans la littérature sous le nom d'*interaction sol-structure*.

La figure 10.1 illustre l'aspect fondamental de l'interaction; cet aspect est présenté ici dans le cas d'une fondation sur pieux, partiellement enterrée dans le sol, mais les conclusions restent applicables à tout type de fondation. Loin de la fondation, dans une région dénommée le *champ libre*, les couches de sol sont traversées par des ondes sismiques dont la nature peut être complexe comme on l'a vu au chapitre 9: on y rencontre des ondes de volume, compression (P) et cisaillement (S), des ondes de surface (Rayleigh, Love, Stoneley). La nature des ondes est dictée par les caractéristiques de la source sismique mais également par la géométrie et les caractéristiques mécaniques des terrains traversés. Si l'on s'intéresse au mouvement de la fondation, les déformations du sol sont transmises à celle-ci et engendrent un mouvement de la superstructure; même en l'absence de superstructure le mouvement de la fondation est différent du mouvement du champ libre du fait des différences de rigidité entre la fondation et le sol encaissant: le champ d'ondes incident est réfléchi et diffracté par la fondation et donc modifie le mouvement total du sol au voisinage de celle-ci. Ce phénomène est connu sous le nom d'*interaction cinématique*. Par ailleurs, le mouvement induit sur la fondation développe des oscillations de la superstructure et donc donne naissance à des forces d'inertie qui sont retransmises à la fondation sous forme de forces et de moments. Ce phénomène est connu sous le nom d'*interaction inertielle*. De toute évidence, le dimensionnement de la fondation doit tenir compte de ces deux composantes de l'interaction. Généralement, à tort, le terme interaction sol-structure ne désigne dans l'esprit des ingénieurs que la part inertielle; il convient de garder à l'esprit que l'interaction cinématique peut dans certaines configurations être significative, même si parfois elle peut être négligée.

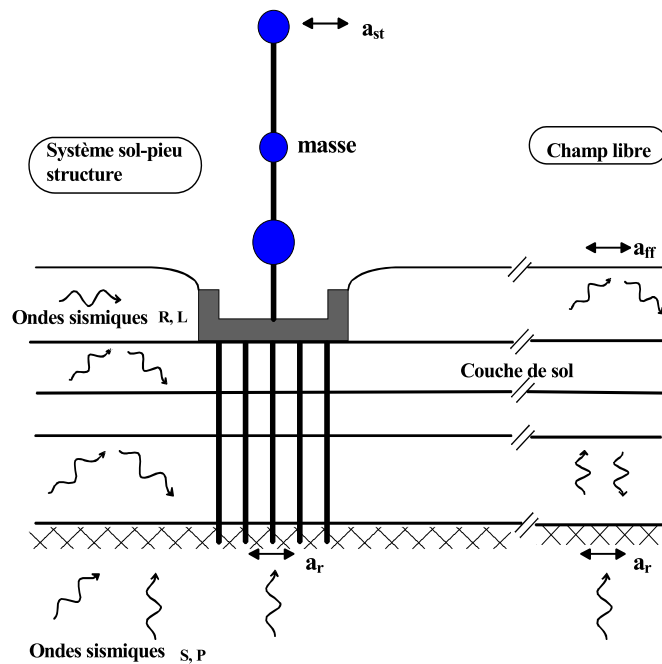


Figure 10.1: Effet de l'interaction sol-structure sur un ouvrage

## 10.2 ILLUSTRATION DE L'EFFET DE L'INTERACTION SOL-STRUCTURE

### 10.2.1 MODELE ANALOGIQUE SIMPLIFIE

L'influence de l'interaction sol-structure sur la réponse d'un ouvrage peut être illustrée à l'aide du modèle analogique de la figure 10.2. La structure est assimilée à une masse et un ressort, placés à une hauteur  $h$  au-dessus de la fondation. La liaison entre la structure et la fondation est réalisée par une barre rigide. La fondation repose sur le sol et son interaction avec celui-ci est modélisée par le biais des fonctions d'impédance qui seront définies au paragraphe 5. On admettra pour l'instant que les fonctions d'impédance, c'est à dire les réactions exercées par le sol sur la fondation, peuvent être représentées par un ensemble de ressorts et d'amortisseurs indépendants de la fréquence; l'amortisseur rend théoriquement compte à la fois de l'amortissement radiatif tel que défini au chapitre 9, c'est à dire de la dissipation d'énergie par les ondes s'éloignant de la fondation, et de l'amortissement propre du matériau "sol", appelé amortissement matériel. Dans un souci de simplification de la présentation, on supposera que l'amortissement matériel est négligeable devant l'amortissement radiatif (comportement élastique du sol), ce qui est valide pour un milieu homogène et des sollicitations sismiques d'amplitudes faibles à moyennes.

Le système de la figure 10.2 possède 3 degrés de liberté :

- le déplacement horizontal  $u$  de la masse  $m$ ,
- le déplacement horizontal  $u_0$  de la fondation,
- la rotation  $\theta$  de la fondation autour d'un axe horizontal.

Il est soumis à un déplacement horizontal du sol support, harmonique de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $u_g$ .

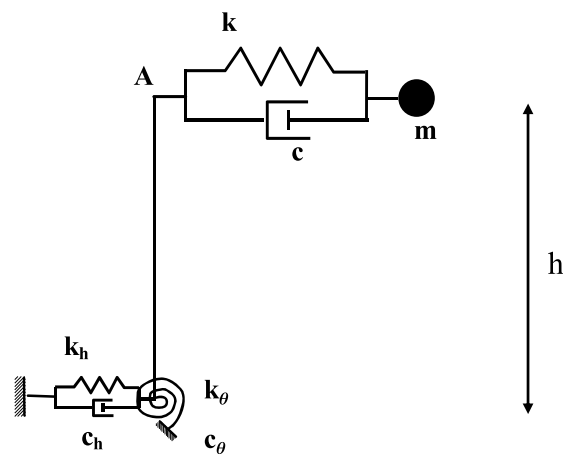


Figure 10.2 : Modèle simplifié d'interaction sol-structure

Les équations d'équilibre dynamique du système s'obtiennent aisément à partir des équations de Lagrange en prenant comme variables généralisées  $q_i$  :

- $q_1 = u$  , le déplacement relatif de la masse par rapport à  $A$   
 $q_2 = u_0$  , le déplacement de la fondation  
 $q_3 = \theta$  , la rotation de la fondation

On a la relation évidente entre le déplacement absolu  $u^t$  de la masse  $m$  et les variables précédentes :

$$(10.1) \quad u^t = u_g + u_0 + u + h\theta$$

Désignant par  $T$  l'énergie cinétique totale :

$$(10.2) \quad T = \frac{1}{2} m (\dot{u}_g + \dot{u}_0 + \dot{u} + h\dot{\theta})^2$$

par  $V$  l'énergie potentielle :

$$(10.3) \quad V = \frac{1}{2} (k u^2 + k_h u_0^2 + k_\theta \theta^2)$$

et par  $\delta W$  le travail des forces non conservatives (forces d'amortissement) :

$$(10.4) \quad \delta W = - (C \dot{u} \delta u + C_h \dot{u}_0 \delta u_0 + C_\theta \dot{\theta} \delta \theta)$$

les équations de Lagrange s'écrivent :

$$(10.5) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) + \left( \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) = \frac{\delta W}{\delta q_i}$$

soit avec les notations précédentes en tenant compte des relations entre accélération, vitesse et déplacement

$$(10.6) \quad \dot{x} = i \omega x \quad , \quad \ddot{x} = -\omega^2 x$$

et en introduisant les pourcentages d'amortissement critique :

$$(10.7) \quad \xi = \frac{\omega C}{2k} \quad , \quad \xi_h = \frac{\omega C_h}{2k_h} \quad \xi_\theta = \frac{\omega C_\theta}{2k_\theta}$$

$$(10.8) \quad \begin{cases} -m \omega^2 (u_0 + u + h\theta) + k (1 + 2i\xi) u = m \omega^2 u_g \\ -m \omega^2 (u_0 + u + h\theta) + k_h (1 + 2i\xi_h) u_0 = m \omega^2 u_g \\ -m h \omega^2 (u_0 + u + h\theta) + k_\theta (1 + 2i\xi_\theta) \theta = m h \omega^2 u_g \end{cases}$$

En introduisant les notations suivantes :

$$(10.9) \quad m \omega_s^2 = k \quad , \quad m \omega_h^2 = k_h \quad , \quad m h^2 \omega_\theta^2 = k_\theta$$

et en éliminant  $u_0$  et  $\theta$  entre les trois équations précédentes, il vient :

$$(10.10) \quad \left[ 1 + 2i\xi - \frac{\omega^2}{\omega_s^2} - \frac{\omega^2}{\omega_h^2} \frac{1 + 2i\xi}{1 + 2i\xi_h} - \frac{\omega^2}{\omega_\theta^2} \frac{1 + 2i\xi}{1 + 2i\xi_\theta} \right] u = \frac{\omega^2}{\omega_s^2} u_g$$

Tenant compte du fait que  $\xi, \xi_h, \xi_\theta \ll 1$ , l'équation précédente devient :

$$(10.11) \quad \left[ 1 + 2i\xi - \frac{\omega^2}{\omega_s^2} - \frac{\omega^2}{\omega_h^2} (1 + 2i\xi - 2i\xi_h) - \frac{\omega^2}{\omega_\theta^2} (1 + 2i\xi - 2i\xi_\theta) \right] u = \frac{\omega^2}{\omega_s^2} u_g$$

Considérons maintenant un oscillateur simple à 1 degré de liberté de même masse  $m$ , de pulsation propre  $\tilde{\omega}$  et d'amortissement  $\tilde{\xi}$  soumis à un déplacement harmonique  $\tilde{u}_g$  de pulsation  $\omega$  à sa base (cas de la structure encastree à sa base). La réponse harmonique de cet oscillateur est :

$$(10.12) \quad \left(1 + 2i\tilde{\xi} - \frac{\omega^2}{\tilde{\omega}^2}\right)\mathbf{u} = \frac{\omega^2}{\tilde{\omega}^2}\tilde{u}_g$$

L'oscillateur équivalent aura même réponse que la structure de la figure 10.2 si les équations suivantes sont vérifiées :

$$(10.13a) \quad \frac{1}{\tilde{\omega}^2} = \frac{1}{\omega_s^2} + \frac{1}{\omega_h^2} + \frac{1}{\omega_\theta^2}$$

$$(10.13b) \quad \tilde{\xi} = \frac{\tilde{\omega}^2}{\omega_s^2}\xi + \frac{\tilde{\omega}^2}{\omega_h^2}\xi_h + \frac{\tilde{\omega}^2}{\omega_\theta^2}\xi_\theta$$

$$(10.13c) \quad \tilde{u}_g = \frac{\tilde{\omega}^2}{\omega_s^2}u_g$$

Les équations précédentes sont obtenues en égalant partie réelle et partie imaginaire des équations (10.11) et (10.12) et pour (10.13c) en se plaçant à résonance ( $\omega = \tilde{\omega}$ ).

Il résulte des équations (10.13) que l'interaction sol-structure a pour effet :

- de diminuer la pulsation propre  $\omega_s$  de la structure base encastree ( $\tilde{\omega} < \omega_s$ ).
- d'augmenter l'amortissement du système ( $\tilde{\xi} > \xi$ ) par rapport à la structure base encastree
- de diminuer la sollicitation incidente effective à la base de la structure ( $\tilde{u}_g < u_g$ ).

Les conclusions précédentes sont visualisées sur la figure 10.3 qui présente pour une fondation circulaire reposant sur un semi espace élastique homogène, les variations relatives  $\tilde{\omega}/\omega_s$ ,  $\tilde{\xi}$ ,  $\tilde{u}_g/u_g$  en fonction des paramètres adimensionnels :

$$(10.14) \quad \bar{h} = \frac{h}{r} = 1, \quad s = \frac{\omega_s h}{V_s}, \quad \bar{m} = \frac{m}{\rho r^3}$$

où  $r$  est le rayon de la fondation et  $\rho$ ,  $V_s$  la masse volumique et la célérité des ondes S dans le sol.

La figure 10.3 met clairement en évidence que l'influence de l'interaction sol-structure est d'autant plus prononcée que le sol de fondation est mou ( $s$  croissant) ou que la structure est massive ( $m$  croissant).



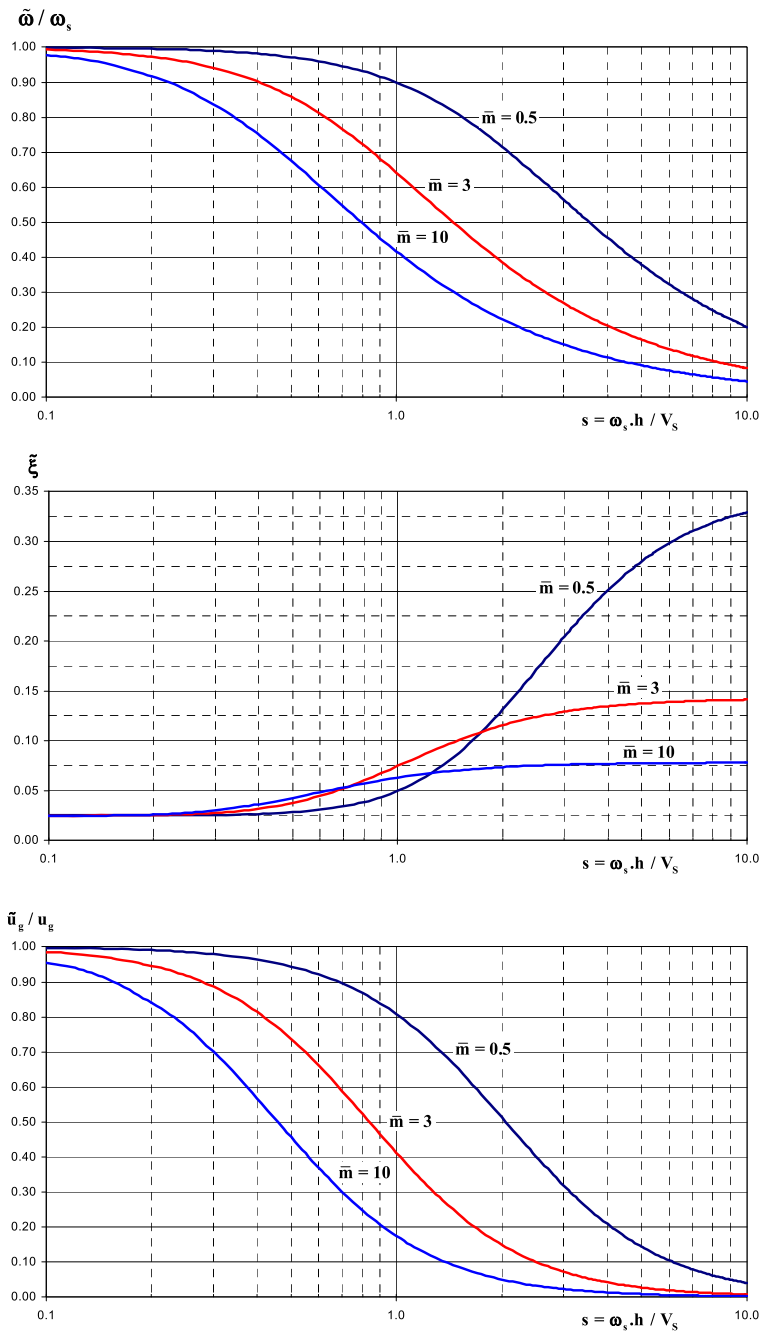


Figure 10.3 : Influence de l'interaction sol – structure

### 10.2.2 EXEMPLE

L'exemple présenté ci dessous est celui de la centrale d'Humbolt Bay en Californie qui a subi en 1977 un séisme important au cours duquel les accélérations en champ libre et en quelques points de l'ouvrage ont été enregistrées. La figure 10.4 montre les spectres de réponse calculés à partir des enregistrements en champ libre et dans la structure à la même cote. L'interaction sol structure est particulièrement marquée pour cet ouvrage partiellement enterré dans le sol comme le montre la forte atténuation des accélérations spectrales pour les fréquences supérieures au Hertz.

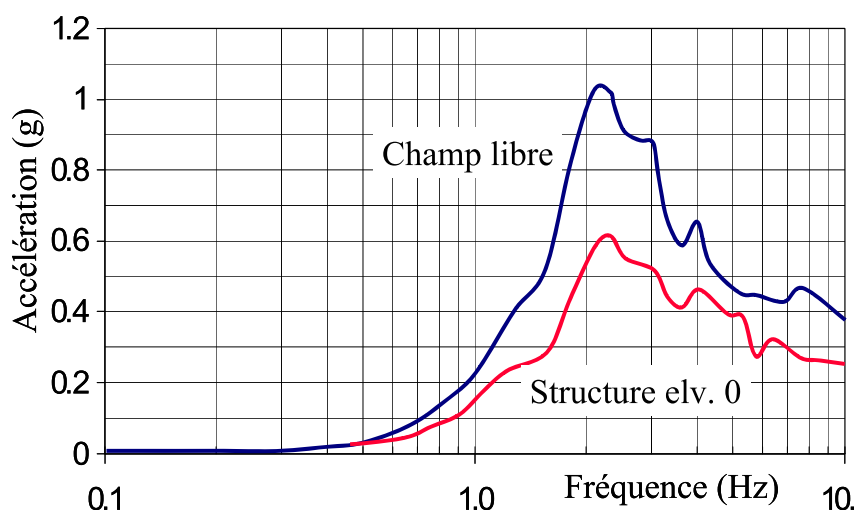


Figure 10.4 : Spectres de réponse de la centrale d'Humbolt Bay

### 10.3 FORMULATION DE L'INTERACTION SOL STRUCTURE

Avant d'examiner les différentes méthodes de prise en compte de l'interaction sol-structure, il est utile de formuler de façon générale le problème. Cette formulation est orientée vers un traitement par éléments finis du phénomène d'interaction. En effet, la complexité du problème est telle que le recours aux méthodes numériques est pratiquement inévitable. Les équations du mouvement sont obtenues par référence à la figure 10.5 qui schématise un ensemble sol-structure.

Désignant par,  $\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{C}}, \underline{\underline{K}}$  les matrices de masse, amortissement et rigidité du système, l'équation du mouvement s'écrit :

$$(10.15) \quad \underline{\underline{M}}\ddot{\underline{U}} + \underline{\underline{C}}\dot{\underline{U}} + \underline{\underline{K}}\underline{U} = \underline{\underline{Q}}_f$$

Comme la source du mouvement (foyer du séisme) n'est généralement pas incluse dans le modèle, le vecteur de charge  $\underline{\underline{Q}}_f$  n'a de valeurs non nulles que sur la frontière extérieure du modèle.

En l'absence de structure, l'équation du mouvement du champ libre est analogue de par sa forme à l'équation (10.15); les indices f désignant les matrices masses, amortissement et rigidité relative au seul champ libre, cette équation s'écrit :

$$(10.16) \quad \underline{\underline{M}}_f \ddot{\underline{U}}_f + \underline{\underline{C}}_f \dot{\underline{U}}_f + \underline{\underline{K}}_f \underline{U}_f = \underline{\underline{Q}}_f$$

Posant :

$$(10.17) \quad \underline{U} = \underline{U}_i + \underline{U}_f$$

l'équation (10.17) définit le déplacement d'interaction  $\underline{U}_i$  qui satisfait l'équation :

$$(10.18) \quad \underline{\underline{M}} \ddot{\underline{U}}_i + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{U}}_i + \underline{\underline{K}} \underline{U}_i = -\underline{\underline{Q}}_i$$

avec :

$$(10.19) \quad \underline{\underline{Q}}_i = [\underline{\underline{M}} - \underline{\underline{M}}_f] \ddot{\underline{U}}_f + [\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{C}}_f] \dot{\underline{U}}_f + [\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{K}}_f] \underline{U}_f$$

Le vecteur de charge  $\underline{\underline{Q}}_i$  est déterminé à partir des déplacements en champ libre. Pour les systèmes linéaires, on a alors le théorème de superposition illustré sur la figure 10.5: le problème d'interaction est décomposé en la somme d'un problème de réponse du sol en champ libre (éq 10.16) et d'un problème source (éq 10.18) où les forces appliquées  $\underline{\underline{Q}}_i$  n'ont de composantes non nulles qu'aux nœuds communs à la structure et au sol. Ce dernier problème est, par essence, analogue à un problème de vibration de machine. Le déplacement total pour le problème d'interaction est alors donné par l'équation (10.17).

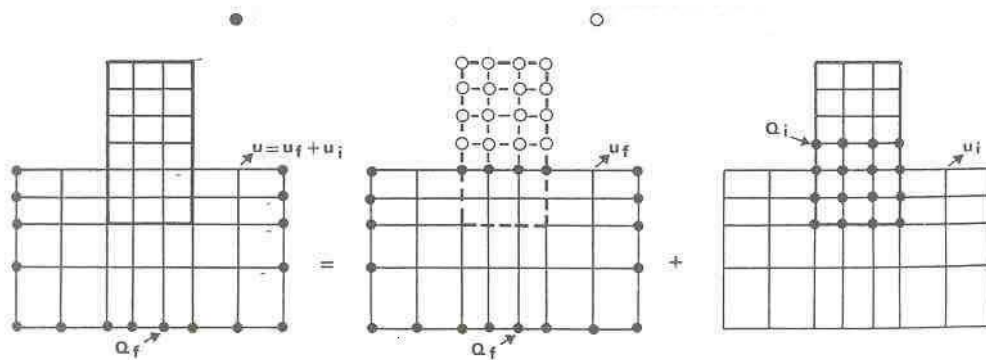


Figure 10.5 : Décomposition du problème d'interaction sol-structure

L'équation (10.19) met clairement en évidence le fait qu'il y a interaction dès qu'il y a une différence de masse ou de raideur entre le sol et la structure. Supprimons pour simplifier le terme d'amortissement dans cette équation et restreignons le problème à celui d'une structure posée à la surface du sol et soumise à la propagation verticale d'ondes de volume (cisaillement ou compression). Dans ces conditions, en champ libre, tous les points de la surface du sol sont animés d'un même mouvement. Si la fondation de l'ouvrage est infiniment rigide, le dernier terme de l'équation (10.19) s'annule; le vecteur de charge  $\underline{Q}_i$  se réduit à :

$$(10.20) \quad \underline{Q}_i = [\underline{\underline{M}} - \underline{\underline{M}}_f] \ddot{\underline{U}}_f$$

Les forces  $\underline{Q}_i$  appliquées à la base de la structure engendrent un mouvement du support, équivalent à un champ de forces d'inertie dans la structure. Par suite, l'interaction ne résulte que des forces d'inertie développées dans cette structure. On lui donne le nom *d'interaction inertielle*, dont l'effet a été illustré sur l'exemple du paragraphe 2.1.

A l'opposé, considérons une structure enterrée dont la masse est nulle hors du sol et égale (en valeur et répartition) à celle du sol pour la partie en terre. Les forces  $\underline{Q}_i$  ont alors pour expression :

$$(10.21) \quad \underline{Q}_i = [\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{K}}_f] \underline{U}_f$$

Elles ne résultent que de la différence de raideur pour la partie en terre, entre le sol et la structure. Même sans différence de masse, il y a interaction; on lui donne le nom *d'interaction cinématique*. Elle résulte de la raideur de la fondation qui l'empêche de suivre les mouvements imposés par le sol. On a vu précédemment qu'elle était rigoureusement nulle pour certains cas; elle peut être faible dans d'autres cas (fondations sur pieux souples) ou très importante (structure raide fortement contreventée enterrée dans le sol).

Dans le cas le plus général, l'interaction résulte d'une interaction inertielle et d'une interaction cinématique.

La figure 10.5 et les raisonnements précédents illustrent les deux grandes méthodes d'approche de l'interaction sol-structure. La figure 10.5a correspond aux méthodes globales dont la solution est obtenue par résolution directe de l'équation (10.15). Elles ne font intervenir aucune notion de superposition et sont donc théoriquement adaptées aux problèmes non linéaires. Alternativement, les méthodes de sous-structures s'appuient sur la décomposition des figures 10.5b-10.5c, ou sur des décompositions analogues, pour résoudre le problème par étapes. Ces méthodes ne sont bien entendu applicables qu'aux problèmes linéaires, justifiables de superposition.

### 10.3.1 EXEMPLE D'INTERACTION CINEMATIQUE

On a signalé au paragraphe précédent qu'il existe des situations pour lesquelles l'interaction cinématique est rigoureusement nulle et l'interaction sol-structure se réduit à sa part inertielle. Cette situation est exceptionnelle; il existe par contre d'autres situations plus courantes pour lesquelles l'interaction cinématique, sans être rigoureusement nulle, est négligeable. Prenons l'exemple d'un pieu de fondation dans une couche de sol; si la raideur du pieu vis à vis du sol encaissant est faible (cas d'un "spaghetti" dans un sol raide), on comprend que la raideur du pieu ne modifie en rien le mouvement du sol par rapport à celui du champ libre. Pour illustrer ces propos, considérons l'exemple de la figure 10.6.

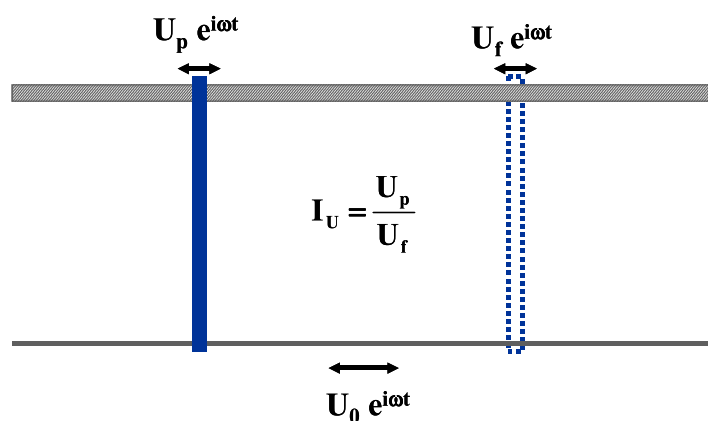


Figure 10.6 : Exemple d'interaction cinématique

La couche de sol est soumise à un mouvement harmonique à sa base, d'amplitude  $U_0$  et de pulsation  $\omega$ . On s'intéresse au mouvement résultant de la tête du pieu,  $U_p$ , et plus exactement au rapport de ce mouvement au mouvement du sol en champ libre,  $U_f$ : soit  $I_u$  ce rapport. La figure 10.7 présente la variation de  $I_u$  en fonction d'un paramètre adimensionnel, proportionnel au rapport des raideurs du pieu et du sol et inversement proportionnel à l'élanement du pieu. Plus ce rapport est grand plus le pieu est raide vis à vis du sol encaissant.

L'examen de la figure 10.7 montre que pour des raideurs faibles du pieu, l'interaction cinématique est effectivement nulle: le coefficient  $I_u$  est égal à 1.0 et le pieu suit le mouvement du sol sans le modifier. Lorsque la raideur augmente, la présence du pieu se ressent et le coefficient  $I_u$  devient différent de 1.0: le pieu ne suit plus le mouvement du sol.

On notera qu'il existe des valeurs du paramètre  $F_C$  pour lesquelles le coefficient  $I_u$  est supérieur à 1.0 : le pieu amplifie le mouvement du sol en champ libre par suite de sa mise en résonance.

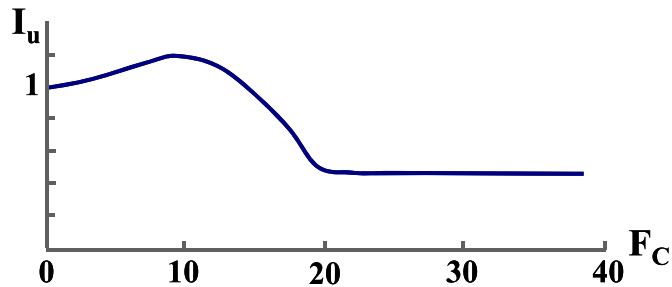


Figure 10.7 : Interaction cinématique pour un pieu isolé

## 10.4 METHODES DE PRISE EN COMPTE DE L'INTERACTION SOL STRUCTURE

Parmi les méthodes de prise en compte de l'interaction sol structure on peut distinguer les méthodes globales, qui résolvent, comme leur nom l'indique, le problème global de la figure 10.5a, et celles qui s'appuient sur une décomposition du système en sous systèmes, dans l'esprit de la figure 10.5b-10.5c; ces méthodes sont désignées sous le nom générique de méthodes de sous structure.

### 10.4.1 METHODE GLOBALE

La méthode consiste à résoudre en une seule étape l'équation dynamique :

$$(10.22) \quad \underline{\underline{M}}\ddot{\underline{U}} + \underline{\underline{C}}\dot{\underline{U}} + \underline{\underline{K}}\underline{U} = -\underline{\underline{M}}\underline{I} \ddot{u}_g$$

où

$\underline{U}$  représente le vecteur des déplacements relatifs du système par rapport à l'assise

$\underline{I}$  un vecteur unité, donnant la direction de la sollicitation  $\ddot{u}_g$

$\underline{\underline{M}}$  ,  $\underline{\underline{K}}$  ,  $\underline{\underline{C}}$  les matrices de masse, de rigidité et d'amortissement du système.

Généralement la technique de résolution est basée sur la méthode des éléments finis qui présente la plus grande flexibilité et permet en outre la prise en compte de phénomènes non linéaires, tel le comportement anélastique des matériaux, le décollement ou le glissement des fondations. La problématique de la résolution par une méthode globale est illustrée sur la figure 10.8 :

- Le mouvement sismique de dimensionnement est connu (spécifié) à la surface du sol, en champ libre;
- Le mouvement est calculé à la base inférieure du modèle, choisie à une profondeur suffisante pour que la présence d'une structure en surface n'affecte pas ce mouvement; cette étape est connue sous le nom de déconvolution du mouvement sismique;
- Le mouvement déconvolué est imposé uniformément à la base du système sol structure et la réponse est calculée par résolution de l'équation (10.22).

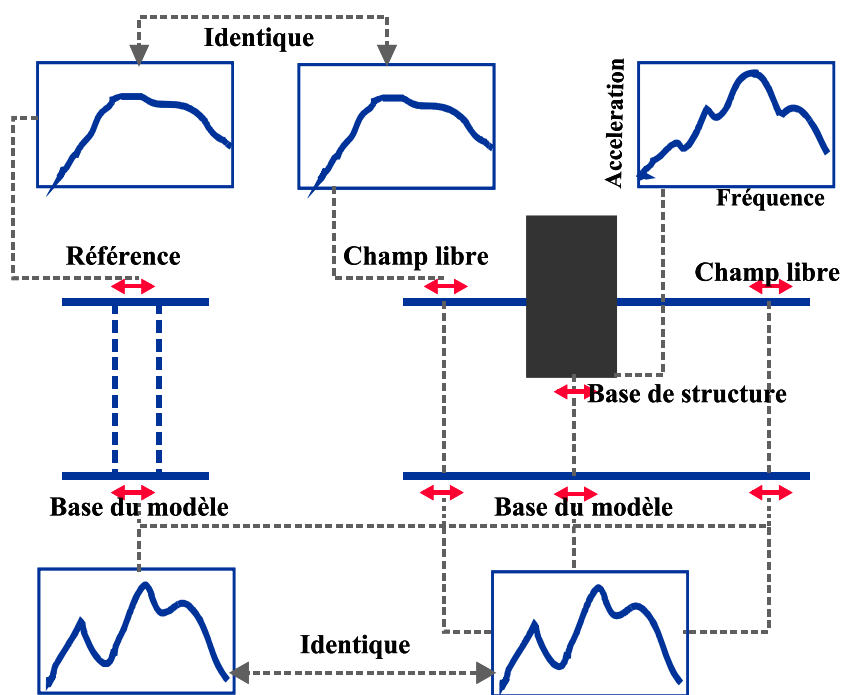


Figure 10.8 : Schématisation d'un problème d'interaction sol structure en éléments finis

La difficulté de la résolution par éléments finis des problèmes dynamiques d'interaction sol structure réside dans le traitement des conditions aux limites. On a vu au chapitre 9 qu'une onde heurtant une surface libre était totalement réfléchi. Dans le cas présent, les limites du modèle sont introduites de manière artificielle dans celui-ci et la réflexion des ondes à ces interfaces contribue à maintenir l'énergie qu'elles transportent à l'intérieur du modèle, alors que dans la réalité elles la transportent à l'infini (au moins partiellement si d'autres réflexions interviennent) : ce transport d'énergie a été désigné au chapitre 9. (paragraphe 9.9) sous le vocable *amortissement géométrique*. On a vu au chapitre 8 qu'il était possible d'annihiler ce phénomène en introduisant des frontières absorbantes dont le rôle est de rétablir les conditions de contraintes et de déplacements à la frontière; dans le cas des poutres ces frontières sont représentées par des amortisseurs dont les caractéristiques sont fonction de

celles du milieu extérieur au modèle. Pour le milieu tridimensionnel des frontières analogues ont été développées; ces éléments ne constituent une solution exacte au problème que dans le domaine fréquentiel; dans le domaine temporel elles ne représentent qu'une solution approchée.

#### 10.4.2 METHODE DE SOUS STRUCTURE

Cette catégorie de méthodes fait appel au principe de superposition. L'idée consiste à analyser le problème d'interaction sol structure en plusieurs étapes successives, chacune des étapes étant réputée plus facile à résoudre que le problème global. Pour des raisons évidentes, les sous structures envisagées sont constituées d'une part par le sol et d'autre part par la structure, comme indiqué sur la figure 10.9. On écrit les équations d'équilibre de chaque sous système, puis les conditions de compatibilité à l'interface : continuité du déplacement et du vecteur contrainte.

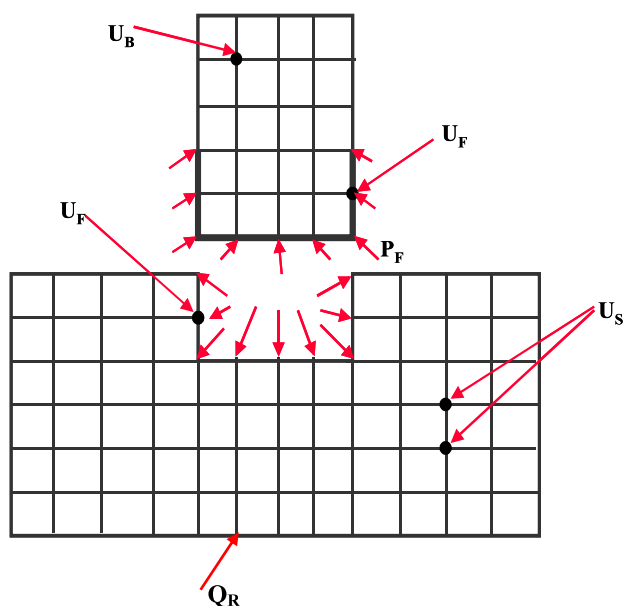


Figure 10.9 : Schématisation d'une méthode de sous structure

Pour des raisons qui apparaîtront naturelles dans la suite, le problème est traité ci dessous dans le domaine fréquentiel; par ailleurs pour ne pas alourdir la présentation, on omettra les termes d'amortissement dans les équations d'équilibre. Il s'ensuit que les grandeurs, par exemple le déplacement  $\underline{U}$ , s'expriment sous la forme de leur transformée de Fourier :

$$(10.23) \quad \underline{U} = \sum_n \tilde{\underline{u}}(\omega_n) e^{i\omega_n t}$$



Dans la suite on notera les transformées de Fourier avec le symbole  $\tilde{\cdot}$  au dessus de la variable et on omettra l'indice n. Chaque équation écrite ci après s'applique donc à toute harmonique de la décomposition de Fourier.

Dans ces conditions les équations des différents sous systèmes s'écrivent :

- Structure

$$(10.24) \quad -\omega^2 \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{m}}}_B & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{m}}}_{FB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_B \\ \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{BB} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{BF} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{FB} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_B \\ \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \tilde{\underline{\mathbf{P}}}_F \end{bmatrix}$$

$$(10.25) \quad -\omega^2 \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{m}}}_{FS} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{m}}}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_F \\ \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{FF} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{FS} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{SF} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_F \\ \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{\underline{\mathbf{P}}}_F \\ \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_R \end{bmatrix}$$

Dans les équations ci dessus, comme indiqué sur la figure 10.9, on a désigné par l'indice B les déplacements de la structure, l'indice F ceux de l'interface sol-structure, et l'indice S ceux du sol. Les vecteurs chargement sont désignés avec l'indice F pour l'interface sol-fondation et l'indice R pour les frontières du modèle (inférieure et latérales); le vecteur  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_R$  ne comporte de valeurs non nulles qu'à ces nœuds. De plus, les équations ont été partitionnées de façon à isoler dans chaque sous système les équations faisant intervenir les degrés de liberté communs: ces équations sont repérées par les indices FB lorsqu'elles appartiennent au sous système structure et par les indices FS lorsqu'elles appartiennent au sous système sol. Enfin on a tenu compte des conditions de compatibilité exprimées ci dessus.

Considérons maintenant le cas du sous système sol en l'absence de la structure; son équation d'équilibre s'écrit de façon analogue à l'équation (10.25) :

$$(10.26) \quad -\omega^2 \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{m}}}_{FS} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{m}}}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_F^* \\ \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_S^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{FF} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{FS} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{SF} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_F^* \\ \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_S^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_R \end{bmatrix}$$

Dans l'expression (10.26)  $\underline{\underline{\mathbf{u}}}^*$  représente le déplacement d'interaction cinématique. Appelant  $\underline{\underline{\mathbf{u}}}^i$  le déplacement d'interaction défini par :

$$(10.27) \quad \underline{\underline{\mathbf{u}}}^i = \underline{\underline{\mathbf{u}}} - \underline{\underline{\mathbf{u}}}^*$$

par soustraction des équations (10.25) et (10.26) il vient :

$$(10.28) \quad -\omega^2 \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{m}}}_{FS} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{m}}}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_F^i \\ \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_S^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{FF} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{FS} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{SF} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_F^i \\ \tilde{\underline{\mathbf{u}}}_S^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{\underline{\mathbf{P}}}_F \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{bmatrix}$$

Le système d'équations (10.28) peut être utilisé pour éliminer tous les degrés de liberté qui n'appartiennent pas à l'interface sol-structure. Ce processus appelé condensation permet de relier les déplacements de l'interface aux réactions en ces nœuds :

$$(10.29) \quad \boxed{\underline{\underline{\tilde{\mathbf{S}}}}_{\underline{\underline{F}}}(\omega) \underline{\underline{\tilde{\mathbf{u}}}}_F^i(\omega) = -\underline{\underline{\tilde{\mathbf{P}}}}_F(\omega)}$$

Dans l'équation (10.29) la matrice  $\underline{\underline{\tilde{\mathbf{S}}}}_{\underline{\underline{F}}}$  s'appelle la *matrice d'impédance* de la fondation. On notera que les quantités intervenant dans (10.29), et en particulier  $\underline{\underline{\tilde{\mathbf{S}}}}_{\underline{\underline{F}}}$ , dépendent de la fréquence.

A ce stade, la réaction du sol  $\underline{\underline{\tilde{\mathbf{P}}}}_F(\omega)$  est inconnue; on élimine cette grandeur en reportant (10.29) dans (10.24) et en tenant compte de (10.27); l'équation d'équilibre de la structure devient :

$$(10.30) \quad -\omega^2 \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{m}}}_{\underline{\underline{B}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{m}}}_{\underline{\underline{FB}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\tilde{\mathbf{u}}}}_B \\ \underline{\underline{\tilde{\mathbf{u}}}}_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\underline{\underline{BB}}} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\underline{\underline{BF}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\underline{\underline{FB}}} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\underline{\underline{FF}}} + \underline{\underline{\tilde{\mathbf{S}}}}_{\underline{\underline{F}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\tilde{\mathbf{u}}}}_B \\ \underline{\underline{\tilde{\mathbf{u}}}}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\tilde{\mathbf{S}}}}_{\underline{\underline{F}}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}_F^* \end{bmatrix}$$

Si la fondation est rigide le champ des déplacements de celle-ci peut s'exprimer en termes d'un mouvement de corps rigide défini par rapport à un point quelconque, par exemple son centre :

$$(10.31) \quad \underline{\underline{\tilde{\mathbf{u}}}}_F = \underline{\underline{\mathbf{T}}} \underline{\underline{\tilde{\mathbf{u}}}}_0$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$  est la matrice de transformation et  $\underline{\underline{\tilde{\mathbf{u}}}}_0$  le vecteur des déplacements et rotations du centre de la fondation. De même, les forces nodales  $\underline{\underline{\tilde{\mathbf{P}}}}_F$  sont reliées aux forces et moments  $\underline{\underline{\tilde{\mathbf{P}}}}_0$  appliqués à la fondation en son centre:

$$(10.32) \quad \underline{\underline{\tilde{\mathbf{P}}}}_0 = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T \underline{\underline{\tilde{\mathbf{P}}}}_F$$

Avec ces définitions l'équation (10.30) prend la forme :

$$(10.33) \quad -\omega^2 \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{m}}}_{\underline{\underline{B}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T \underline{\underline{\mathbf{m}}}_{\underline{\underline{FB}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\tilde{\mathbf{u}}}}_B \\ \underline{\underline{\tilde{\mathbf{u}}}}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\underline{\underline{BB}}} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\underline{\underline{BF}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\underline{\underline{FB}}} & \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T (\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\underline{\underline{FF}}} + \underline{\underline{\tilde{\mathbf{S}}}}_{\underline{\underline{F}}}) \underline{\underline{\mathbf{T}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\tilde{\mathbf{u}}}}_B \\ \underline{\underline{\tilde{\mathbf{u}}}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T \underline{\underline{\tilde{\mathbf{S}}}}_{\underline{\underline{F}}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}_F^* \end{bmatrix}$$

La matrice  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^* = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T \underline{\underline{\tilde{\mathbf{S}}}}_{\underline{\underline{F}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}}$  représente la matrice d'impédance de la fondation rigide. Notant que  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^T \underline{\underline{\tilde{\mathbf{S}}}}_{\underline{\underline{F}}} \underline{\underline{\tilde{\mathbf{u}}}}_F^* = \underline{\underline{\mathbf{K}}}^* \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T \underline{\underline{\tilde{\mathbf{u}}}}_F^*$  l'équation précédente représente le mouvement d'une structure

reliée à un support par la matrice d'impédance  $\underline{\underline{K}}^*$  et soumise à un mouvement de ce support défini par  $\underline{\underline{T}}^T \tilde{\underline{\underline{u}}}_F^*$ , qui rappelons le représente le mouvement d'interaction cinématique.

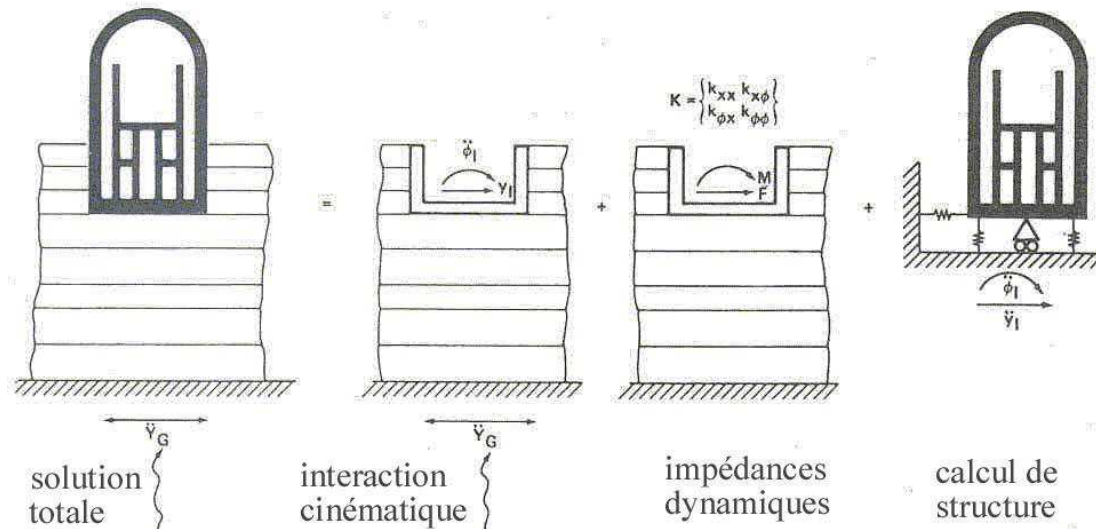


Figure 10.10 : Théorème de superposition

Ainsi, dans l'hypothèse d'une fondation rigide, il est pertinent de scinder le problème global en trois sous-problèmes :

- détermination du mouvement d'une fondation rigide sans masse soumise à la sollicitation sismique; cette étape représente la solution de l'équation (10.26);
- détermination de la matrice d'impédance de la fondation (éq 10.28);
- calcul de la réponse dynamique de la structure reliée à la matrice d'impédance et soumise à son support au mouvement d'interaction cinématique (éq 10.33).

Dans la mesure où la fondation est parfaitement rigide, cette démarche est rigoureusement identique à celle conduisant à la résolution du système global en une étape (éq 10.22). Cette décomposition est connue sous le nom de théorème de superposition de Kausel et est illustrée sur la figure 10.10. Son intérêt apparaît clairement s'il est possible de simplifier une des trois étapes du calcul.

Le problème de diffraction (étape a)) existe toujours sauf pour une structure fondée en surface et soumise à la propagation verticale d'ondes de volume; dans ce cas, la résolution de l'étape a) est identique à celle de la réponse d'un profil de sol en champ libre puisque l'interaction cinématique est nulle. La solution à la deuxième étape peut être évitée, pour certaines configurations, en utilisant les résultats de fonctions d'impédances publiés dans la littérature. La troisième étape est, en tout état de cause, indispensable; elle est cependant plus simple et plus familière aux ingénieurs car elle procède de l'analyse dynamique classique des structures.

## 10.5 IMPEDANCE D'UNE FONDATION SUPERFICIELLE

Pour illustrer la notion d'impédance d'une fondation, grandeur essentielle pour le calcul sismique d'une structure par une méthode de sous structure, considérons le cas simple d'une fondation circulaire rigide reposant à la surface d'un semi espace élastique, homogène et isotrope (figure 10.11).

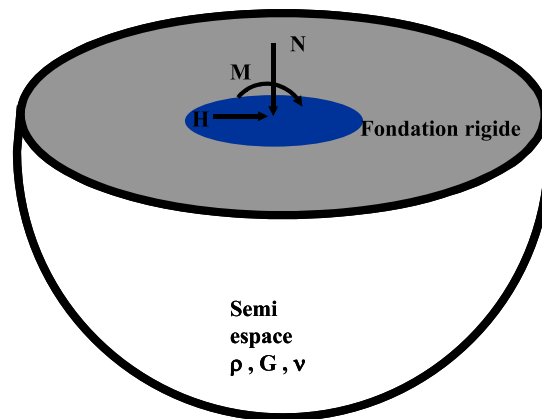


Figure 10.11 : Impédance d'une fondation superficielle circulaire

La fondation est caractérisée par son rayon  $r_0$ , et le semi espace par sa masse volumique  $\rho$  et deux paramètres de comportement, par exemple le module de cisaillement  $G$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ ; on utilisera également la célérité des ondes de cisaillement  $V_s (= \sqrt{G/\rho})$  pour définir le semi espace.

Par définition (éq. 10.29), l'impédance de la fondation est égale à la réaction exercée sur la fondation sans masse lorsqu'elle est soumise à des déplacements harmoniques unitaires dirigés suivant l'un quelconque de ses degrés de liberté. La fondation étant sans masse l'impédance représente également le quotient d'une force directement appliquée à la fondation (qui est égale à la réaction du sol) par le déplacement résultant. Une fondation rigide possédant six degrés de liberté, la matrice d'impédance  $\tilde{\mathbf{S}}_F(\omega)$  a pour dimension 6x6; si la fondation est de forme quelconque, les différents degrés de liberté sont couplés et la matrice d'impédance est pleine. Si la fondation possède des symétries, certains des termes de couplage (termes hors diagonale) disparaissent. Dans le cas de la fondation circulaire, il existe 4 degrés de liberté: les translations horizontale et verticale, la rotation autour d'un axe horizontal et la rotation autour d'un axe vertical. La translation verticale et la rotation autour d'un axe vertical sont totalement découplés des autres degrés de liberté; par contre, en toute théorie, le déplacement horizontal et la rotation autour d'un axe horizontal sont couplés entre eux; cependant, pour la fondation superficielle le terme de couplage est négligeable et il est licite de considérer que la matrice d'impédance est une matrice diagonale de dimension 4x4. Chaque terme de la matrice représente donc le quotient de la force appliquée par le

déplacement résultant suivant le même degré de liberté. Dans la suite du paragraphe on raisonnera donc sur un des termes de la matrice que l'on notera  $K$ , par exemple celui correspondant au déplacement vertical, sachant que les considérations qui sont développées sont également applicables aux autres termes; on dénommera ce terme par le vocable générique impédance.

Avant d'étudier l'impédance de la fondation, il est utile de faire le parallèle avec l'oscillateur à un degré de liberté pour mieux comprendre la structure de l'impédance. Considérons un tel oscillateur soumis à une force harmonique  $Pe^{i\omega t}$ . Le déplacement résultant a été calculé au chapitre 2 et vaut :

$$(10.34) \quad z(t) = \frac{Pe^{i\omega t}}{(k - m\omega^2) + i\omega c}$$

Par définition l'impédance de l'oscillateur simple s'écrit :

$$(10.35) \quad K = (k - m\omega^2) + i\omega c = k \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2i\xi \frac{\omega}{\omega_n} \right]$$

dans laquelle on a utilisé les notations usuelles de l'oscillateur simple :  $\omega_n$  et  $\xi$  désigne la pulsation propre et le pourcentage d'amortissement critique.

L'examen de la relation (10.35) montre que l'impédance est le produit :

- d'un terme correspondant à la raideur statique  $k$ ;
- d'un terme qui représente la partie dynamique; ce terme comporte une partie réelle et une partie imaginaire qui provient du fait que le déplacement est déphasé par rapport à la force appliquée. Ce déphasage est lié à la dissipation d'énergie du système.

On notera également que la partie réelle de l'impédance peut devenir négative à haute fréquence.

Par analogie avec l'équation (10.35) on montre que l'impédance de la fondation peut s'écrire sous la forme générale :

$$(10.36) \quad \boxed{K = K_S [k_1(\omega) + ia_0c_1(\omega)]}$$

avec

$$(10.37) \quad a_0 = \frac{\omega r_0}{V_S}$$

Elle se compose d'un terme multiplicatif qui est la raideur statique (raideur à fréquence nulle) de la fondation  $K_S$  et d'une partie représentant la contribution dynamique. Cette contribution

dynamique comporte une partie réelle et une partie imaginaire. Les coefficients  $a_0$ ,  $k_1$  et  $c_1$  sont sans dimension et dépendent de la pulsation  $\omega$ .

Il est instructif de donner une interprétation physique à la notion d'impédance. Par définition l'équation (10.36) donne la réaction  $R$  du sol exercée sur la fondation, soit :

$$(10.38) \quad R = K_s [k_1(\omega) + ia_0 c_1(\omega)] z$$

Tenant compte du fait que pour une sollicitation harmonique :

$$(10.39) \quad \dot{z} = i \omega z$$

l'équation (10.38) peut s'écrire :

$$(10.40) \quad R = K_s k_1(\omega) z + \frac{K_s r_0 c_1(\omega)}{V_s} \dot{z}$$

La réaction du sol se compose donc de deux termes, proportionnels au déplacement et à la vitesse de la fondation. On peut donner à ces termes la signification physique d'un ressort et d'un amortisseur de caractéristiques :

$$(10.41) \quad \bar{K} = K_s k_1(\omega) \quad , \quad \bar{C} = \frac{K_s r_0 c_1(\omega)}{V_s}$$

qui dépendent de la pulsation  $\omega$ . Par ailleurs on notera qu'il existe une dissipation d'énergie dans le système, représentée par l'amortisseur, bien que le milieu sur lequel repose la fondation soit élastique, donc non dissipatif. Cette dissipation provient du transport de l'énergie dans le milieu par les ondes issues du mouvement de la fondation: il s'agit de *l'amortissement géométrique*, déjà évoqué au paragraphe 4.1.

La figure 10.12 présente les fonctions d'impédance de la fondation superficielle circulaire sur le semi espace élastique, homogène, isotrope. Seules sont présentées les parties dynamiques de l'impédance pour chacun des degrés de liberté de la fondation. On vérifie comme indiqué par les relations (10.41) que les termes  $k_1$  et  $c_1$  dépendent plus ou moins fortement de  $\omega$  et, comme on l'a signalé pour l'oscillateur simple, qu'ils peuvent devenir négatifs.

Si les termes de l'impédance étaient constants la modélisation de celle ci dans le calcul dynamique de la structure, dernière étape du théorème de superposition de la figure 10.10, serait immédiate: on la représenterait pour chaque degré de liberté par un ressort et un amortisseur (éq 10.41). Dans le cas général cette représentation n'est pas possible et oblige pour la résolution des problèmes d'interaction sol structure à se placer dans le domaine fréquentiel, comme cela a été fait pour l'établissement du théorème de superposition.

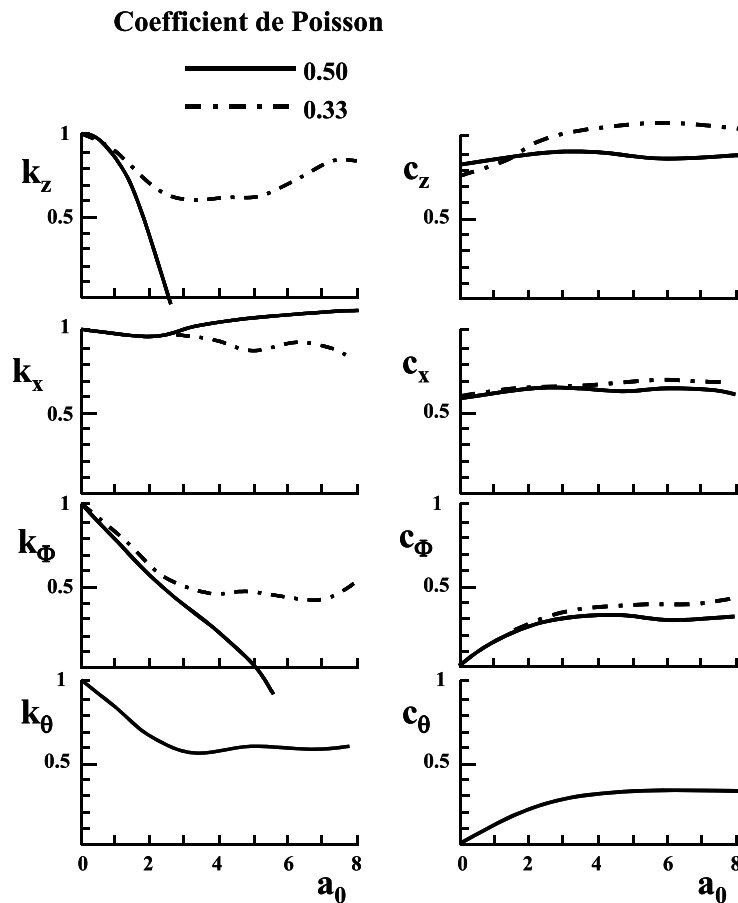


Figure 10.12 : Impédance de la fondation circulaire superficielle

Il existe cependant des configurations pour lesquelles l'approximation par un ressort et un amortisseur (un pour chaque degré de liberté) indépendants de la fréquence est possible: c'est le cas en particulier pour la fondation circulaire étudiée dans ce paragraphe. En comparant la réponse "exacte" de cette fondation à celle d'une fondation sur ressort et amortisseur, il est possible de reproduire de façon satisfaisante le réponse de la fondation par un choix approprié des caractéristiques du ressort et de l'amortisseur. A titre d'exemple le tableau 10.1 donne un choix possible des paramètres et la figure 10.13 compare la solution exacte à la réponse obtenue avec le modèle simplifié dans le cas de la sollicitation verticale.

Dans les expressions du tableau 10.1 les quantités  $I$  désignent les moments d'inertie massiques en rotation de la fondation autour des axes vertical et horizontal.

La simplification ci dessus ne doit pas faire perdre de vue que pour des configurations plus complexes, soit en termes de stratification du sol, soit de géométrie de la fondation, l'approximation par des ressorts et amortisseurs indépendants de la fréquence n'est plus possible. La figure 10.14 illustre ces propos en montrant la variation des parties réelle et

imaginaire de l'impédance verticale d'une fondation circulaire superficielle fondée en surface d'une couche d'épaisseur limitée surmontant un substratum infiniment rigide.

MODE DE VIBRATION	COEFFICIENTS D'IMPEDANCE EQUIVALENTS	
	Partie réelle $k_1$	Partie imaginaire $c_1$
Vertical	1.0	0.850
Horizontal	1.0	0.576
Balancement	1.0	$\frac{0.30}{1 + \frac{3(1-\nu)I_x}{8\rho r_0^5}}$
Torsion	1.0	$\frac{V_s \sqrt{\frac{I_z}{K_\theta}}}{r_0 \sqrt{1 + \frac{2I_z}{\rho r_0^5}}}$

Tableau 10.1 : Coefficients d'impédance pour la fondation superficielle circulaire

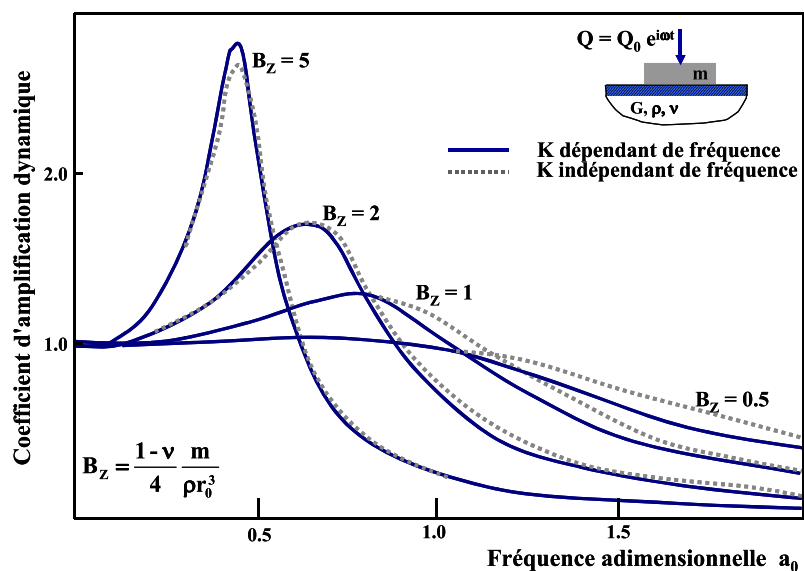


Figure 10.13 : Réponse d'une fondation circulaire à une force verticale



On note la variation très erratique des deux termes avec la fréquence et surtout le fait que pour des fréquences faibles, inférieures à une valeur  $f_0$ ,  $c_1$  est nulle: il n'existe aucune dissipation d'énergie dans le système. Ce phénomène s'explique en notant que les ondes diffractées par la fondation sont totalement réfléchies lorsqu'elles heurtent le substratum rigide; l'énergie n'est pas transportée à l'infini dans le semi espace mais est renvoyée vers la fondation. Ce n'est que lorsque  $f$  devient supérieure à  $f_0$  que la dissipation d'énergie prend place; on peut montrer que  $f_0$  correspond à la fréquence propre de vibration de la couche ( $V_p/4H$  pour le mode vertical,  $V_s/4H$  pour le mode horizontal) et qu'il y a alors création d'ondes de surface se propageant horizontalement dans la couche de sol supérieure.

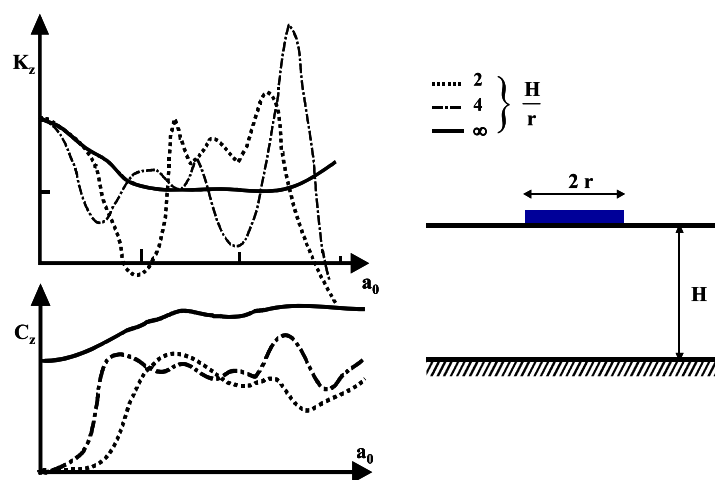


Figure 10.14 : Impédance d'une fondation circulaire sur un mono-couche

Il est bien évident que des variations telles que celles de la figure 10.14 ne peuvent être prises en compte par des ressorts et amortisseurs indépendants de la fréquence. Il est cependant possible, au prix d'une légère complication, de rendre compte de ces variations avec des modèles rhéologiques simples. En reprenant l'exemple de l'oscillateur à un degré de liberté on note que la variation avec la fréquence de la partie réelle de l'impédance est induite par la présence de la masse de l'oscillateur. L'idée est donc d'adjoindre au modèle de ressort et amortisseur une masse additionnelle dont le rôle est de traduire cette variation. Certains auteurs ont justifié l'introduction d'une masse additionnelle en arguant d'une masse de sol "attachée" à la fondation et vibrant en phase avec elle; il ne s'agit en fait que d'un artifice mathématique permettant de mieux traduire le comportement global de la fondation. La figure 10.15 présente deux exemples de modèles rhéologiques simples avec masses additionnelles donnant naissance à des termes d'impédance variables avec la fréquence. Les paramètres de divers éléments entrant dans le modèle sont calés de façon à reproduire la variation exacte de l'impédance. La figure 10.16 montre un tel exemple dans le cas d'une fondation réelle d'un ouvrage: la courbe en trait continu représente la solution exacte et les symboles les prédictions du modèle. On notera en particulier que le modèle permet de représenter la valeur négative de la partie réelle de l'impédance au delà de la fréquence de 1.5 Hz.

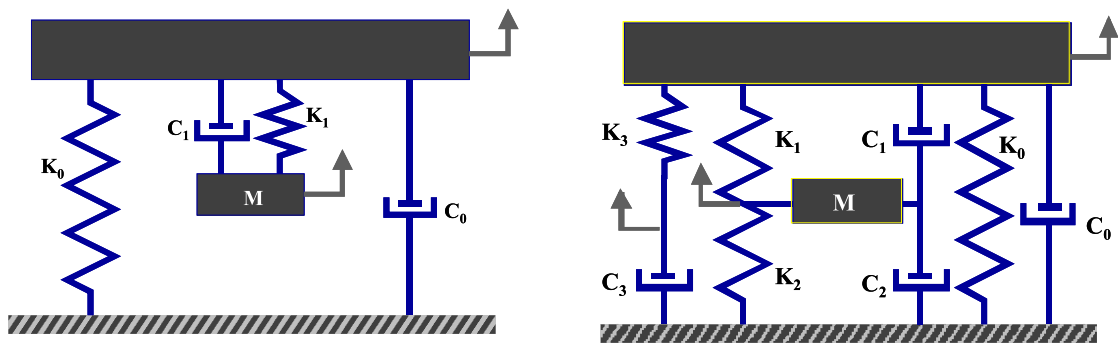


Figure 10.15 : Modèles rhéologiques simplifiés pour l'impédance

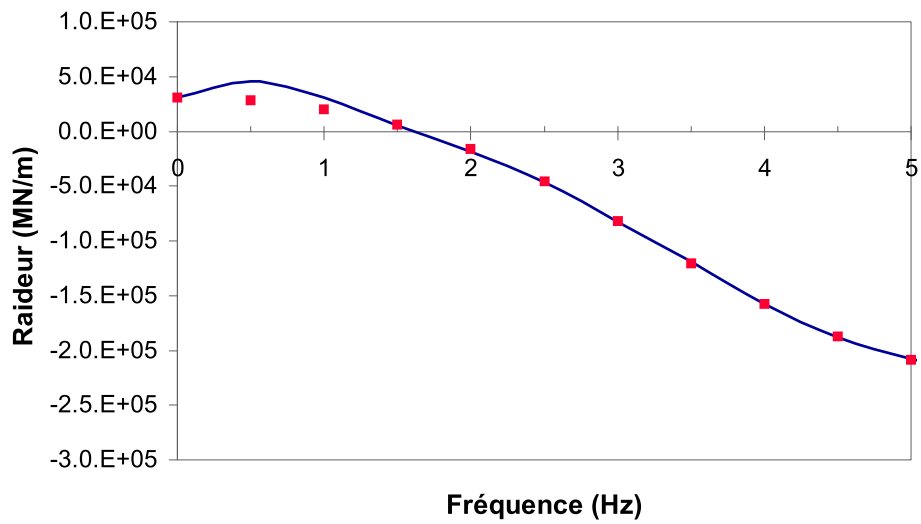


Figure 10.16 : Exemple d'application du modèle de la figure 10.15  
Partie réelle de l'impédance verticale



## BIBLIOGRAPHIE

- Achenbach, J.D. (1980). Wave propagation in elastic solids. *North Holland Publishing Company*.
- Betbeder-Matibet, J. (2003). Génie Parasismique. 3 volumes. *Hermès-Lavoisier*.
- Dormieux, L. (2000). Mécanique des milieux continus. *Cours ENPC*
- Chopra, A.K. (2012). Dynamics of Structures: Theory and Application to Earthquake Engineering. 4<sup>th</sup> edition, *Prentice Hall*
- Clough, R.W., Penzien, J. (2010). Dynamics of Structures. Second edition (revised) *Mc Graw Hill*.
- Fardis, M.N., Carvalho, E., Fajfar, P., Pecker, A. (2015). Seismic design of concrete buildings to Eurocode 8. *CRC Press, Taylor and Francis group*, London.
- Gibert, R.J. (1988). Vibrations des Structures: Interactions avec les Fluides; Sources d'Excitation Aléatoires. *Collection EDF-DER, Eyrolles*.
- De Langre, E. (2001). Fluides et Solides. *Edition de l'Ecole Polytechnique*.
- Le Tallec, P. (2000). Introduction à la Dynamique des Structures. *Edition Ellipses*.
- Salençon, J. (2002). Mécanique des milieux continus, 3 volumes. *Edition de l'Ecole Polytechnique*.
- Wolf, J.P (1985). Dynamic Soil Structure Interaction. *Prentice Hall*.