

# Chapitre I Effort tranchant

## I.1 Introduction à l'effort tranchant

### I.1.1 Effort de glissement

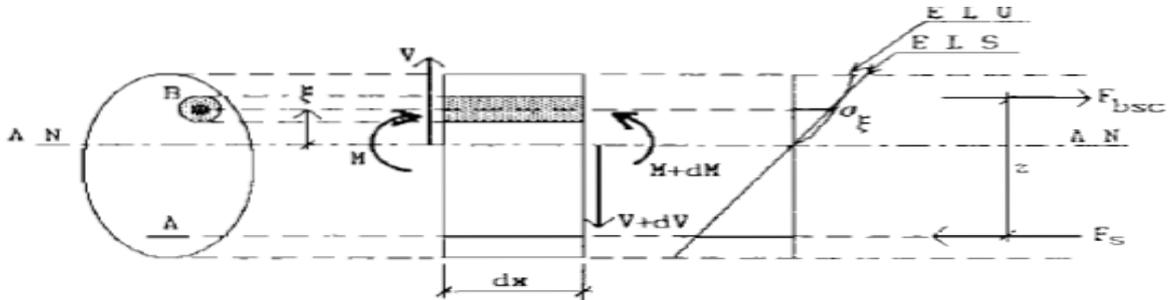


Figure I-1 section quelconque sollicitée à la flexion [1]

Contrainte normale à l'E.L.S à la distance  $\xi$  de l'axe neutre :  $\sigma_\xi = \frac{M}{I_1} \xi$

$I_1$  = moment d'inertie par rapport à l'axe neutre de la section réduite homogène (béton comprimé seul et avec des armatures multipliées par 15)

Résultante des forces élastiques agissant sur l'aire homogène B idéalement découpé dans la section droite : [1]

$$F_B = \int_B \sigma_\xi dB = \frac{M}{I_1} \int_B \xi dB = \frac{M}{I_1} S_B$$

$S_B$  = moment statique par rapport à l'axe neutre de l'aire homogène B.

On appelle EFFORT DE GLISSEMENT PAR UNITE DE LONGUEUR DE POUTRE la quantité:

$$g = \frac{dF_B}{dx} = \frac{dM}{dx} * \frac{S_B}{I_1} \quad \text{Or: } V = \frac{dM}{dx}$$

$$\text{D'où : } g = \frac{V}{I_1} * S_B$$

### I.1.2 Contrainte tangente

Sous l'effet de  $g$ , le prisme Bdx a tendance à se déplacer par rapport à la poutre, le long d'une surface de glissement dont la trace sur le plan de la section a pour longueur  $u$ . L'équilibre du prisme de base  $B$  et de longueur  $dx$  est assuré par des CONTRAINTE TANGENTES qui se développent sur la surface de glissement du prisme Bdx par rapport à la poutre. [1]

$\tau$  = valeur supposée constante de la contrainte tangente en tout point de la surface latérale du prisme.

$u$  = longueur de la trace de la surface de glissement sur le plan de section.

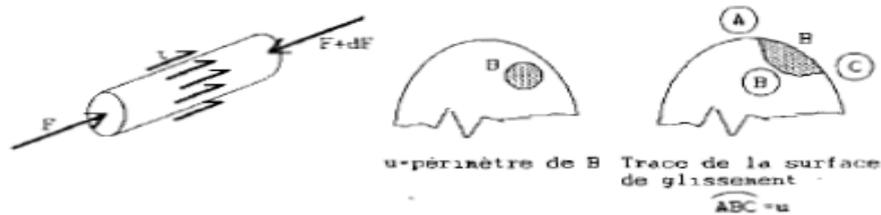


Figure I-2 Contrainte tangente [1]

Il vient :  $\tau \cdot u \cdot dx = dF_B \rightarrow \tau = \frac{1}{u} \frac{dF_B}{dx} = \frac{g}{u}$  Soit :

$$\tau = \frac{V S_B}{I_I u}$$

### I.1.3 Bras de levier des forces élastiques

En prenant la zone comprimée homogène de la section comme aire  $B$  ( $F_{bsc}$  résultante des compressions sur cette zone) :[1]

$$\begin{aligned} F_B &= \frac{M}{I_I} * S_B \\ F_B &= F_{bsc} \\ M &= z * F_{bsc} \\ S_B &\simeq S_I \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} F_{bsc} = \frac{M}{I_I} * S_I \\ F_{bsc} = \frac{M}{z} \end{cases}$$

D'où par identification  $z = \frac{I_I}{S_I}$

$S_I$  = moment statique par rapport à l'axe neutre de la zone comprimée homogène de la section. Si l'aire B considérée précédemment est délimitée par une parallèle à l'axe neutre, on a sur le plan correspondant : [1]

$$: g = \frac{V}{I_1} * S_B = \frac{V}{z} * \frac{S_B}{S_I}$$

Sous l'axe neutre  $S_B = S_I$  (Béton tendu négligé) et :  $g = \frac{V}{z} = Cste$

## I.2 Prescription réglementaire

### I.2.1 Justifications et dispositions constructive

Il s'agit des justifications à effectuer pour les poutres et les dalles sous sollicitations d'effort tranchant concernant : [2]

- La contrainte tangente ultime de cisaillement en béton.
- Les armatures transversales de l'âme (ex : cadres, étriers)
- Les zones d'appuis des poutres (appuis simple d'about, appuis intermédiaire)

Les sollicitations d'effort tranchant  $V_u$  est toujours déterminée à l'état limite ultime (E.L.U). La combinaison de base dans les cas courants pour calculer  $V_u$  est  $1.35G + 1.5Q$ . On se reportera également au BAEL A.3.3, 2 pour l'expression des combinaisons les plus défavorables fondamentales ou accidentelles.[2]

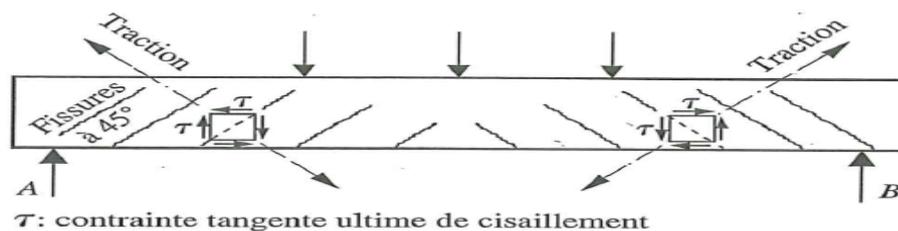


Figure I-3 visualisation des effets produits par l'effort tranchant dans une poutre fléchie en béton armé [2]

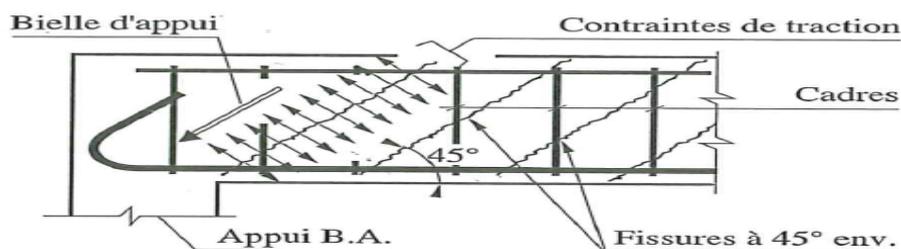


Figure I-4 Schéma de principe [2]

La justification d'une section concerne les armatures transversales de l'âme (A.5.1, 22 et A.5.1, 23) ainsi que la contrainte du béton (A.5.1, 21). D'autre part, les zones d'appui (d'about ou intermédiaire) font l'objet des règles énoncées en A.5.1, 3. [3]

### I.2.2 Contrainte tangente conventionnelle

D'après ce qui précède, on a :  $\tau = \frac{g}{u} = \frac{V}{zu}$

Pour  $u = b_0$  = épaisseur minimale de l'âme sous l'axe neutre, la contrainte tangente vaut : [1]

$$\left. \begin{array}{l} \tau_b = \frac{V}{b_0 z} \\ z = 0.9 d \end{array} \right\} \text{ on obtient } \tau_b = \frac{V}{0.9 d b_0}$$

On considère à l'état limite ultime la contrainte tangente conventionnelle : [1]  $\tau_u = \frac{V_u}{b_0 d}$

Expression dans laquelle :

- $\tau_u$  : Contrainte tangente conventionnelle en MPa.
- $V_u$  : Valeur de calcul de l'effort tranchant vis-à-vis de l'état limite ultime en MN.
- $b_0$  : Désigne la largeur de l'âme en m.
- $d$  : La hauteur utile en m.

#### Remarque :

Cette formule de la contrainte tangente conventionnelle ne concerne ni les poutres-cloisons ni les consoles coudées qui font l'objet des annexes E.5 et E.6 [3]

Dans l'expression conventionnelle de la contrainte tangente, on a introduit la hauteur utile à la place du bras de levier, dans le but de simplifier les calculs :  $\tau_u$  ne représente donc pas la valeur réelle de la contrainte exercée, mais une fraction comprise entre 0.8 et 0.9. [3]

En cas de largeur variable sur la hauteur de la section, il convient d'adopter pour  $b_0$  une valeur minimale, sauf justification contraire. Dans le cas particulier des sections circulaires, on pourra adopter : [3]  $\tau_u = \frac{1.4V_u}{\Phi d}$

La valeur de calcul de l'effort tranchant tient compte éventuellement de la réduction, dénommée effet Résal, qui peut se produire dans les poutres de hauteur variables. [3].

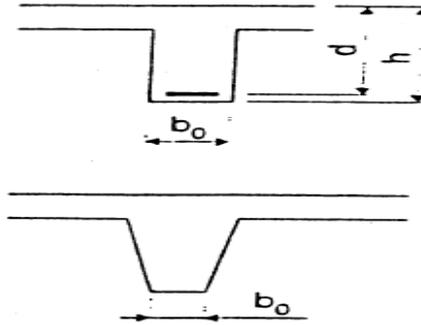


Figure I-5 Section variable d'une poutre

### I.2.3 Effort tranchant à prendre en compte au voisinage des appuis

Pour tenir compte de la transmission directe des charges aux appuis, les efforts tranchants sont calculés comme indiqués sous-dessous : [1]

#### I.2.3.1 Charge répartie

Les charges réparties situées à moins de  $h/2$  du nu d'appui sont négligées et les charges situées entre  $h/2$  et  $3h/2$  développent un effort tranchant égal à :  $\frac{2X}{3h} * V$  (Mise en charge progressive).[1]

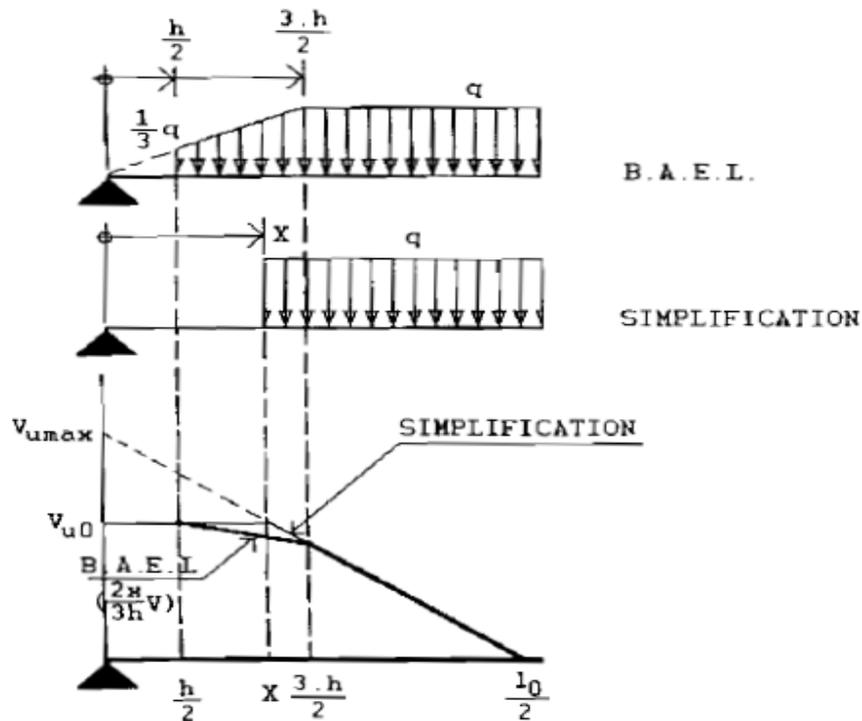


Figure I-6 Charge répartie à prendre en compte au voisinage d'appui [1]

Selon B.A.E.L :  $V_{u0} = V_{u\max} - \frac{3}{2} h * q + \frac{4}{6} h * q = V_{u\max} - \frac{5}{6} h * q$

Selon la simplification :  $V_{u0} = V_{u\max} - q * X$  avec  $X = \frac{5}{6} h$

D'où il revient au même et il est plus simple de considérer l'effort tranchant  $V_{u0}$  dans la section d'abscisse  $X = \frac{5}{6} h$  et de le supposer constant entre  $x=0$  et  $x= X$ . [1]

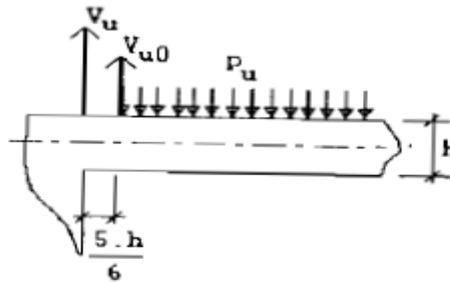


Figure I-7 Effort tranchant réduit  $V_{u0}$  apprendre en compte pour une charge répartie[1]

### I.2.3.2 Charge concentrée

Il convient de réduire la valeur de l'effort tranchant développé par toute charge concentrée au voisinage du mur d'appui. Il revient au même de prendre pour valeur de cette charge : [1]

$$Q_u = \begin{cases} 0 & \text{si } a < \frac{h}{2} \\ \frac{2a}{3h} Q_u & \text{si } \frac{h}{2} \leq a \leq \frac{3h}{2} \end{cases}$$

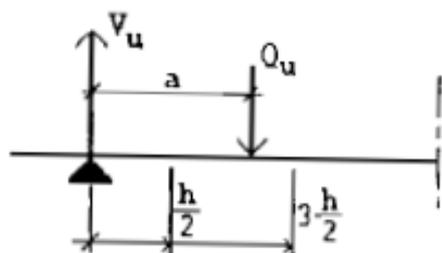


Figure I-8 Effort tranchant réduit apprendre en compte pour une charge concentrée [1]

## **I.3 Vérification du béton**

### **I.3.1 Flexion composée**

Pour les pièces dont toutes les sections droites sont entièrement comprimées, il n'y a pas lieu d'appliquer les justifications à condition que la contrainte tangente ultime soit au plus égale à la plus basse des deux valeurs :  $0.06f_{cj}/\gamma_b$  ; 1.5 MPa. [3]

### **I.3.2 Autres cas**

La détermination de la contraintes tangente limite ultime dépend des cas rencontrés :

#### **I.3.2.1 Armatures transversales droites (associées ou non à des barres relevées à 45°)**

Dans le cas où les armatures sont droites (c'est-à-dire perpendiculaires à la fibre moyenne) et dans celui où elles comportent à la fois des barres relevées et des armatures droites, et si la fissuration est jugée peu préjudiciable, la contrainte tangente limite ultime doit être au plus égale à la plus basse des deux valeurs : [1, 3]

$$0.2 f_{cj}/\gamma_b ; 5 \text{ MPa (ou N/mm}^2\text{)}$$

En outre, lorsque la fissuration est jugée préjudiciable, ou très préjudiciable, les contraintes ci-dessus sont remplacées par les valeurs limites : [1, 3]

$$0.15 f_{cj}/\gamma_b ; 4 \text{ MPa (ou N/mm}^2\text{)}$$

#### **I.3.2.2 Armatures transversales inclinées à 45°**

Dans le cas où les armatures d'âme sont inclinées à 45 ° sur l'axe de la poutre, la contrainte tangente limite ultime doit être au plus égale à la plus basse des deux valeurs : [3]

$$0.27 f_{cj}/\gamma_b ; 7 \text{ MPa (ou N/mm}^2\text{)}$$

#### **I.3.2.3 Armatures d'âme inclinées à $\alpha > 45^\circ$ (cas rare)**

Si les armatures sont disposées de façon intermédiaire entre mes cas prévus en I.2.1.2.1 et I.2.1.2.2 il est loisible de procéder à une interpolation linéaire pour fixer la valeur limite de la contrainte tangente limite ultime. [1, 3]

On prenant  $\alpha$  étant exprimé en degrés. Par interpolation linéaire entre les valeurs limites correspondant à  $\alpha = 45^\circ$  et à  $\alpha = 90^\circ$ , on trouve : [1]

Condition sur la fissuration	$\tau_{lim}$
Peu Préjudiciable	$\text{Min} \left\{ \begin{array}{l} \left(0.34 - 0.07 \frac{\alpha}{45}\right) \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \\ \left(9 - 2 \frac{\alpha}{45}\right) \text{MPa} \end{array} \right.$
Préjudiciable ou Très Préjudiciable	$\text{Min} \left\{ \begin{array}{l} \left(0.39 - 0.12 \frac{\alpha}{45}\right) \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \\ \left(10 - 3 \frac{\alpha}{45}\right) \text{MPa} \end{array} \right.$

Tableau 1. Contrainte tangente limite ultime en fonction de la fissuration

**Remarque :** Les valeurs de la contrainte tangente limite ultime citées ci-dessus sont prescrites pour une résistance caractéristique maximale à la compression de 40 MPa. Pour une résistance à la compression comprise entre 40 MPa et 80 MPa, on adopte les valeurs suivantes : [4]

Condition	$\tau_{lim}$
Armatures transversales droite ( $\alpha = 90^\circ$ )	$\bar{\tau}_u = 0.64 \frac{f_{cj}^{\frac{2}{3}}}{\gamma_b}$
Fissuration Préjudiciable et Très Préjudiciable	$\bar{\tau}_u = 0.51 \frac{f_{cj}^{\frac{2}{3}}}{\gamma_b}$
Armatures transversales inclinées à $45^\circ$	$\bar{\tau}_u = 0.9 \frac{f_{cj}^{\frac{2}{3}}}{\gamma_b}$

Tableau 2 valeurs de la contrainte tangente ultime pour  $40 \text{ MPa} < F_{cj} \leq 80 \text{ MPa}$

## I.4 Calcul des armatures d'âme (Armatures transversales d'une poutre)

### I.4.1 Effort tranchant à prendre en compte

Au voisinage des appuis, on tient compte de la transmission directe des charges aux appuis comme pour la vérification du béton.[1]

### I.4.2 Détermination des armatures

#### I.4.2.1 Formule générale

Pour couvrir la fissure, nous avons  $\frac{z(1+\cot\alpha)}{st}$  armatures de section  $A_t$ .

Elles peuvent équilibrer un effort vertical :

$$V_s = \frac{z(1+\cot\alpha)}{st} A_t \sigma_s \sin \alpha = z \frac{A_t}{st} \sigma_s (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

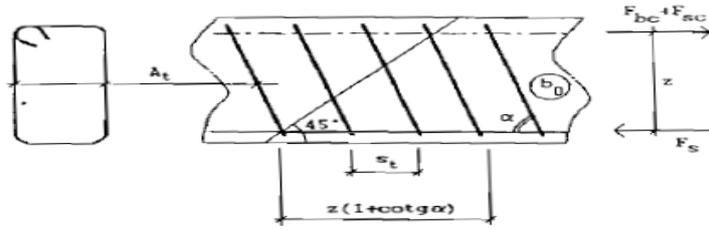


Figure I-9 Couture de la fissure du béton par les armatures d'âmes [1]

D'où pour équilibrer un effort tranchant  $V_u$  quelconque : [1]

$$V_s = V_u \quad \text{donc} \quad \frac{A_t}{s_t} \sigma_{st} = \frac{V_u}{z (\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

$$\text{Or nous avons : } \tau_{bu} = \frac{V_u}{z b_0} = \frac{V_u}{0.9 d b_0} = \frac{\tau_u}{0.9} \quad \text{et} \quad \sigma_{st} = \frac{f_{et}}{\gamma_s}$$

$$\text{D'où l'équation s'écrit : } \frac{A_t}{b_0 s_t} \frac{f_{et}}{\gamma_s} = \frac{\tau_u}{0.9 (\sin \alpha + \cos \alpha)}$$

La comparaison entre la théorie et les résultats des essais conduit à réduire la valeur de  $V_u$  (ou de  $\tau_u$ ). L'écart sur étant fixé réglementairement à  $0.3 k f_{tj}$ .

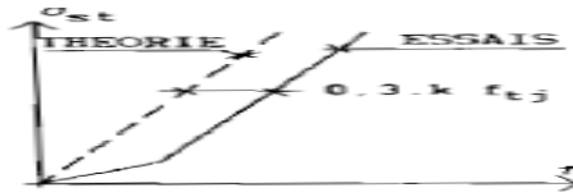


Figure I-10 Diagramme  $\sigma_{st} - \tau$  Comparaison entre la théorie et les résultats des essais [1]

$$\frac{A_t}{b_0 s_t} \geq \frac{\gamma_s (\tau_u - 0.3 k f_{tj})}{0.9 f_e (\cos \alpha + \sin \alpha)} \quad \text{Avec :}$$

$A_t$  : Section de cours d'armatures transversales

$s_t$  : Espacement entre de cours successifs de cadres ou étriers

$b_0$  : Épaisseur de lame (largeur de la section transversale)

$\alpha$  : L'angle d'inclinaison des cadres et étriers

$f_e$  : Limite d'élasticité de l'armature transversale

$f_{tj}$  : Résistance caractéristique de traction du béton à j jours, plafonnée à 3.3 MPa .

$k$  : Coefficient empirique tient compte de la partie de l'effort tranchant équilibré par la membrure comprimée du treillis (théorie de treillis de Ritter-Mrsch)

$$k = \begin{cases} 0 & \left\{ \begin{array}{l} \text{s'il y a une reprise de bétonnage} \\ \text{si c'est une fissurations très préjudiciable} \end{array} \right. \\ 1 & \left\{ \begin{array}{l} \text{si c'est la surface de reprise à indentations de saillie } \geq 5 \text{ mm} \\ \text{si la sollicitation est une flexion simple} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 1 + 3 \frac{N_u}{Bf_{c28}} \text{ si c'est une flexion composée avec compression} \\ 1 - 10 \frac{|N_u|}{Bf_{c28}} \text{ si c'est une flexion composée avec traction} \end{array} \right. \end{cases}$$

$\tau_u$ : Contrainte tangente conventionnelle tenant compte de la transmission directe des charges aux appuis si on est près des appuis.

#### I.4.2.2 Diamètre des armatures transversales

Le diamètre des armatures d'âme d'une poutre est au plus égal à  $h/35$  ( $h$  étant la hauteur totale de la poutre), ainsi qu'au diamètre des barres longitudinales et dixième de la largeur de l'âme. [1-3]  $\phi_t \leq \min\left(\frac{h}{35}; \frac{b_0}{10}; \phi_l\right)$

#### I.4.2.3 Pourcentage minimale d'armatures

La section minimale est assurée selon la formule suivante : [1]

$$\frac{A_t}{b_0 S_t} f_{et} \geq 0.4 \text{ MPa} \quad \text{D'où la section minimale sera : } A_{t\min} = \frac{0.4 b_0 S_t}{f_{et}}$$

#### I.4.2.4 Espacement maximal des armatures transversales

La justification vis-à-vis de l'état limite ultime des armatures d'âme s'exprime par la relation: [3]  $\frac{A_t}{b_0 S_t} \geq \frac{\gamma_s(\tau_u - 0.3f_{tj}k)}{0.9f_e(\cos\alpha + \sin\alpha)}$

$$\text{Donc l'espacement sera calculé comme suit : } s_t \leq \frac{0.9 A_t f_e (\cos\alpha + \sin\alpha)}{\gamma_s b_0 (\tau_u - 0.3f_{tj}k)}$$

Pour le cas courant, d'une sollicitation à la flexion simple et des armatures transversales droites ( $\alpha = 90^\circ$ ):  $s_t \leq \frac{0.9 A_t f_e}{\gamma_s b_0 (\tau_u - 0.3f_{tj})}$

La valeur d'espacement adoptée doit respecter la valeur maximale donnée par la formule suivante : [1]

$$s_t \leq \min \begin{cases} 0.9 d \\ 40 \text{ cm} \\ 15 \phi_l \end{cases}$$

Avec si  $A' \neq 0$  réalisé avec des aciers de diamètre  $\phi'_l$  [1]

#### I.4.2.5 Poutre en T à nervure épaisse

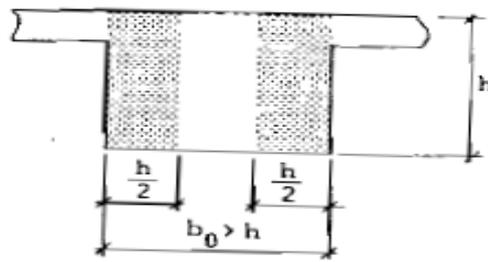


Figure I-11 Poutre en T à nervure épaisse [1]

Le pourcentage minimal et l'espace maximal peuvent ne pas être respectés dans la zone qui n'est pas grisée. [1]

#### I.5 Barres relevées à 45°

Une part  $\theta V_{u0}$  de l'effort tranchant au voisinage d'un appui avec  $\theta \leq \frac{1}{2}$  peut être équilibré par des barres de la membrure tendue relevées à 45° et ancrées sur appuis. Le complément  $1 - \theta$  est toujours équilibré par des armatures d'âme droites  $\alpha = 90^\circ$ . [1]

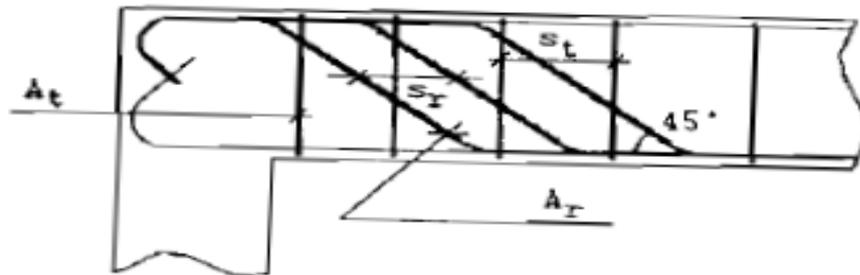


Figure I-12 Barres relevées à 45° [1]

On pose :

$A_r$  = section d'une nappe de barres relevées.

$A_t$  = section d'une nappe d'armatures d'âme

$S_r, S_t$  = espacement respectifs de ces nappes

#### I.5.1 Vérification du béton

Si la fissuration est peu préjudiciable  $\tau_{u0} = \frac{V_{u0}}{b_0 d} \leq \min \left\{ \begin{array}{l} 0.2 \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \\ 5 \text{ MPa} \end{array} \right.$

Si la fissuration est préjudiciable ou très préjudiciable  $\tau_{u0} = \frac{V_{u0}}{b_0 d} \leq \min \left\{ \begin{array}{l} 0.15 \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \\ 4 \text{ MPa} \end{array} \right.$

## I.5.2 Armatures

### Armatures d'âme droites

$$\frac{A_t}{b_0 s_t} \frac{f_{et}}{\gamma_s} \geq (1 - \theta) \frac{(\tau_u - 0.3 f_{tj} k)}{0.9} \quad \text{Avec } \theta \leq \frac{1}{2}$$

### Armatures relevées

$$\frac{A_r}{b_0 s_r} \frac{f_e}{\gamma_s} \geq \theta \frac{(\tau_u - 0.3 f_{tj} k)}{0.9 \sqrt{2}} \quad \text{Avec } \theta \leq \frac{1}{2}$$

Il faut en outre vérifier :

- Le pourcentage minimal d'armatures d'âme
- L'espace maximal
- Les barres relevées doivent être conservées jusqu'à l'abscisse  $X_r$  où l'équilibre peut à nouveau être assuré par les seules armatures d'âme droites.

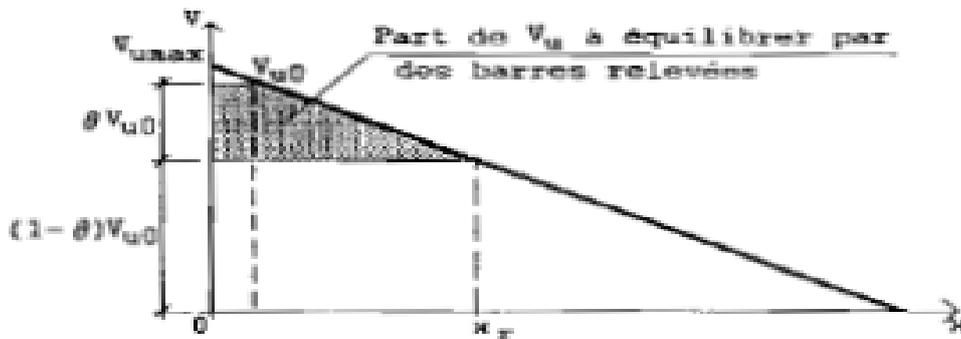


Figure I-13 arrêt des barres relevées [1]

### Remarque :

Il n'est pas de bonne construction de prévoir une seule nappe de barres relevées traversant la section du nu d'appui.

## I.6 Répartition des armatures d'âme (Méthode de Caquot)

### I.6.1 Hypothèses

Méthode applicable uniquement aux poutres, de section constante supportant des charges uniformément réparties.[1]

### I.6.2 Notations

$l_0$ =distance du nu d'appui à la section où l'effort tranchant s'annule. [1]

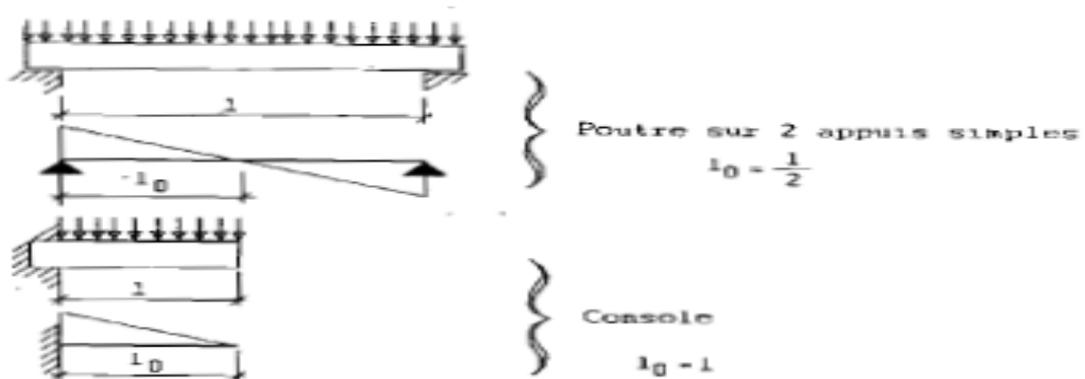


Figure I-14 Distance  $l_0$  pour le cas d'une poutre simplement appuyée et le cas d'une console [1]

Pour tenir compte de :

- La réduction de l'effort tranchant  $V_u$  pour transmission directe des charges aux appuis.
- La réduction de  $\tau_u$  pour les poutres coulées sans reprise ou avec reprise spécialement traitée.

On considère la largeur  $l_0$  suivante :

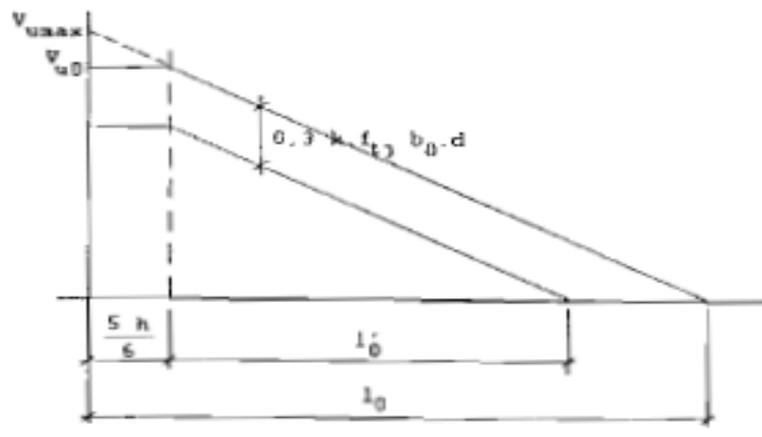


Figure I-15 Longueur  $l_0$  à prendre en compte [1]

À partir des triangles semblables représentés dans la figure 13, On a : [1]

$$\frac{l'_0}{l_0 - \frac{5h}{6}} = \frac{V_{u0} - 0.3 k f_{tj} b_0 d}{V_{u0}}$$

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u0}}{b_0 d} = \frac{V_{u\max} - P_u \frac{5h}{6}}{b_0 d}$$

$$l'_0 = \left(l_0 - \frac{5h}{6}\right) \left(\frac{1 - 0.3 k f_{tj}}{\tau_{u0}}\right)$$

$$\tau_{u0} = \frac{V_{u\max} - P_u \frac{5h}{6}}{b_0 d}$$

La répétition des armatures d'âme s'effectue donc de la manière suivante :

- Répartition sur  $\frac{5h}{6}$  pour l'espacement initial  $s_{t0}$  calculé pour  $V_{u0}$ .
- Au-delà de la section  $\frac{5h}{6}$ , répartition suivant la règle de caquot avec un nombre de répétition égal à  $l'_0$  (m).

### I.6.3 Méthode de Caquot

- L'écartement initial  $s_{t0}$  est calculé suivant les indications précédentes pour l'effort tranchant  $V_{u0}$ .
- L'écartent de départ des armatures d'âme ( $s_{t1} \leq s_{t0}$ ) est choisi dans la suite : 7,8,9,10,11,13,16,20,25,35 et 40.
- Depuis l'abscisse  $\frac{s_{t0}}{2}$ , on répète les espacements successifs  $s_{ti+1} \geq s_{ti}$  (de la suite) avec un nombre de répartition :

$$\begin{cases} l'_0 + \frac{5h}{6s_{t0}} & \text{pour le 1er espacement} \\ l'_0 & \text{pour les espacement suivants} \end{cases}$$

Avec :  $l'_0$  (En m)

- Si le nombre de répétitions n'est pas entier, le nombre de répétitions totalisé depuis l'origine est arrondi à l'entier le plus voisin.

### I.6.4 Présentation des calculs

$s_t$	$\frac{s_{t0}}{2}$	$s_{t1}$	$s_{t2}$	---	$s_{ti}$
Nombre de répétition <b>ni</b> calculé		$l'_0 + \frac{5h}{6s_{t0}}$	$l'_0$	---	$l'_0$
Nombre cumulé		$l'_0 + \frac{5h}{6s_{t0}}$	$2l'_0 + \frac{5h}{6s_{t0}}$	---	$il'_0 + \frac{5h}{6s_{t0}}$
Nombre cumulé arrondi		$m1$	$m2$	---	$mi$
Nombre de répétition adopté <b>ni</b>		$n1 = m1$	$n2 = m2 - m1$	---	$n_i = m_i - m_{i-1}$
Abscisse	$\frac{s_{t0}}{2}$	$\frac{s_{t0}}{2} + n1s_{t1}$	$\frac{s_{t0}}{2} + n1s_{t1} + n2 * s_{t2}$	---	-----

### I.6.5 Cas travées continues

#### I.6.5.1 Rappels de résistance des matériaux

La ligne enveloppe de l'effort tranchant dans une travée de poutre continue soumise à la seule action de charges réparties (hypothèses de la méthode Caquot) a l'allure suivante : [1]

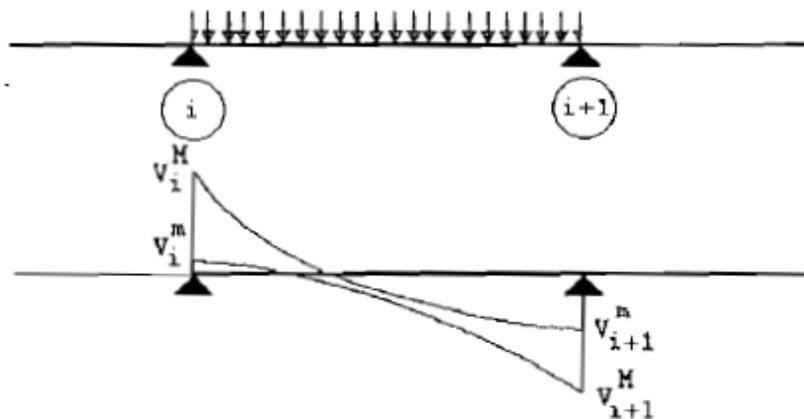


Figure I-16 L'allure de la ligne enveloppe de l'effort tranchant (travée de poutre continue) [1]

On pose pour tout appui  $j$  :

$$V_j^M = |V_j^{\text{Max}}|$$

$$V_j^m = |V_j^{\text{Min}}|$$

### I.6.5.2 Répartition des armatures d'âme

Pour l'étude de l'effort tranchant, on s'intéresse aux valeurs absolues de la ligne enveloppe : [1]

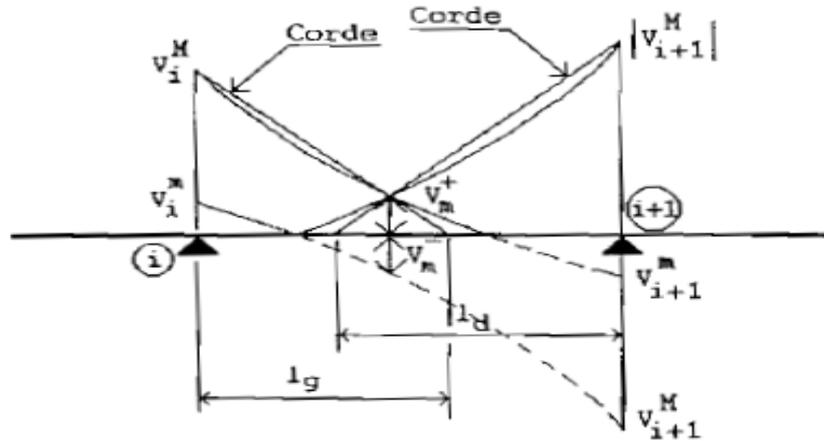


Figure I-17 La ligne enveloppe et la ligne enveloppe simplifiée [1]

$V_m = V_m^+ = |V_m^-|$  est la valeur minimale de l'effort tranchant.

Par simplification, on remplace cette ligne théorique par la ligne enveloppe simplifiée constituée par les cordes. (Voir figure 15)

- Reliant  $V_i^M$  à  $V_m$  pour la partie gauche de la travée.
- Reliant  $V_m$  à  $|V_{i+1}^M|$  pour la partie droite de la travée.

On définit ainsi les deux longueurs  $l_g$  et  $l_d$ .

On peut alors appliquer la méthode de répartition de Caquot en considérant les poutres fictives :

- De portée  $2l_g$  associée à l'appui  $i$
- De portée  $2l_d$  associée à l'appui  $i+1$

On fait la répartition en partant des deux extrémités de a travée continue.

## I.7 Zone d'application des efforts

### I.7.1 Armatures inférieures tendues sur appuis d'about

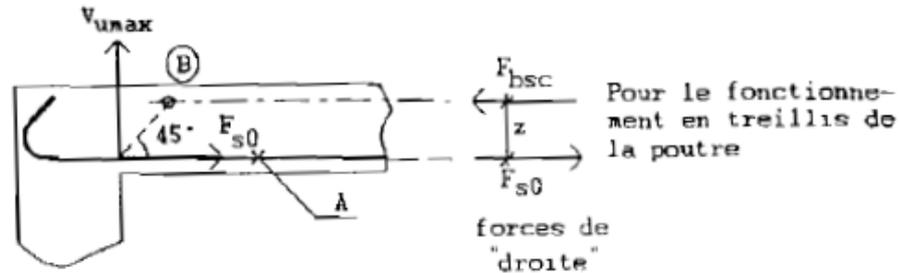


Figure I-18 armatures inférieures tendues sur appui d'about [1]

L'équilibre des moments en B donne :

$$V_{\text{umax}} * z = f_{s0} * z \text{ donc } f_{s0} = V_{\text{umax}}$$

$$\text{Comme : } f_{s0} = A * \frac{f_e}{\gamma_s} \text{ avec } \gamma_s = 1.15$$

$$\text{Il vient : } A \geq \frac{1.15 V_{\text{umax}}}{f_e}$$

### I.7.2 Equilibre de la bielle de béton sur appuis simple d'about

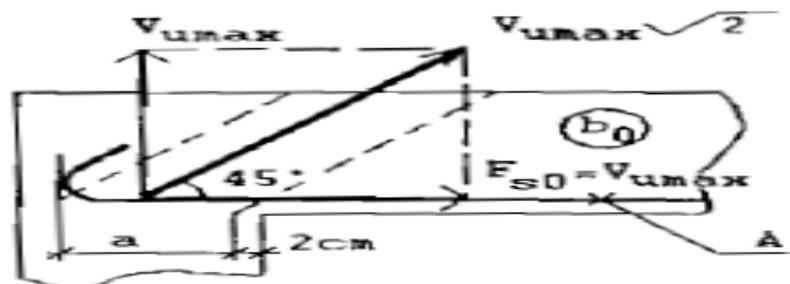


Figure I-19 équilibre de la bielle de béton sur appui simple [1]

$$\sigma_{bc} = \frac{V_{\text{umax}} * \sqrt{2}}{b_0 \frac{a}{\sqrt{2}}} \text{ donc } \sigma_{bc} = \frac{2V_{\text{umax}}}{b_0 a} \leq 0.8 \frac{f_{cj}}{\gamma_b}$$

Le coefficient 0.8 tient compte du fait qu'à l'appui l'inclinaison des bielles n'est pas exactement 45° et que leur compression peut ne pas être uniforme. [1]

### I.7.3 Largeur de la bielle à prendre en compte

#### I.7.3.1 Poutre solidaire d'un poteau

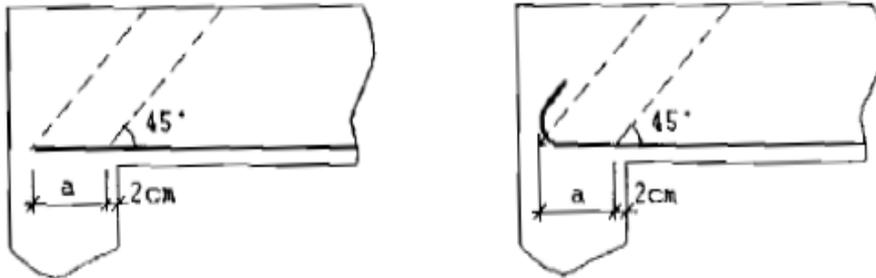


Figure I-20 Largeur de bielle « poutre solidaire d'un poteau » [1]

#### I.7.3.2 Poutre à nervure rectangulaire sur appareil d'appui

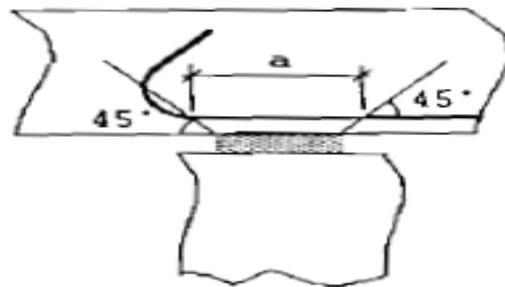


Figure I-21 Largeur de bielle « poutre à nervure sur appareil d'appui » [1]

#### I.7.3.3 Poutre à talon sur appareil d'appui

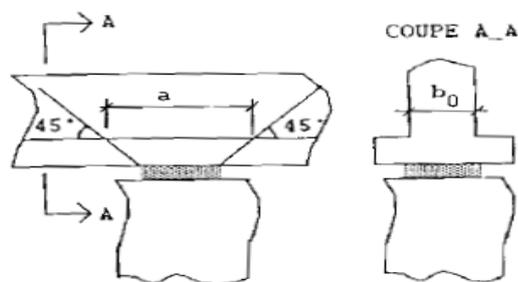


Figure I-22 Largeur de bielle « poutre à talon sur appareil d'appui » [1]

### I.7.4 Armatures inférieures tendues sur appuis intermédiaire

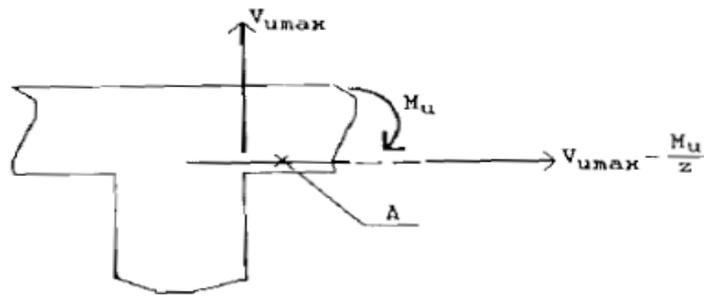


Figure I-23 Armatures inférieures tendues sur appui intermédiaire [1]

Les aciers inférieurs doivent équilibrer :

$$F_s = V_{u\max} - \frac{M_u}{z} \text{ Avec } M_u \text{ en valeur absolue}$$

$$F_s = A f_{ed}$$

D'où leur section est donnée par  $A = \frac{F_s}{f_{ed}}$  et par suite :

$$A > 0 \text{ donc } F_s > 0 \text{ donc } V_{u\max} - \frac{M_u}{z} > 0 \text{ ce que nous donne } M_u < V_{u\max} z$$

D'où avec une valeur approchée z du bras de levier égal à 0.9 d :

$$\text{Si : } M_u < 0.9 d * V_{u\max} \quad ; \quad A = \frac{V_{u\max} - \frac{M_u}{0.9 d}}{f_{ed}}$$

Avec un ancrage au-delà du nu d'appui pour :

$$V_{u\max} - \frac{M_u}{0.9 d}$$

#### Remarque : [1]

Même si l'on trouve  $A < 0$ , il n'est pas de bonne construction de ne prévoir aucune armature inférieure traversant le nu d'appui.

Les bielles de béton doivent vérifier, de part et d'autre de l'appui :

$$\frac{2V_{u\max}}{b_0 a} \leq 0.8 \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \text{ avec } \gamma_b = 1.5 \text{ en général}$$

## I.8 Jonction ourdis-nervure

### I.8.1 Règles de coutures

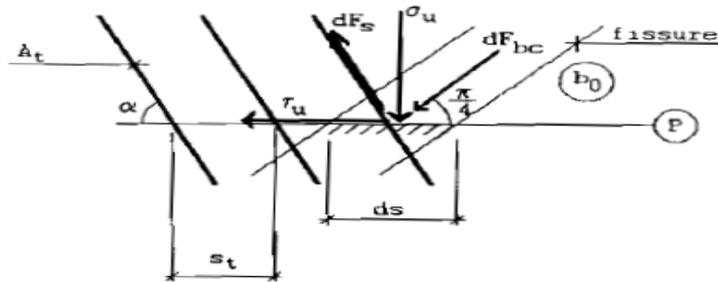


Figure I-24 équilibre de forces dans la jonction Hourdi-Nervure [1]

Sur l'épaisseur  $b_0$  ; il faut coudre le plan P soumis à l'action de contrainte tangente  $\tau_u$  et de contrainte normale  $\sigma_u$  par les armatures transversales (aciers de couture)  $A_t$  inclinées d'un angle  $\alpha$  sur le plan P en sens inverse de la fissuration probable.[1]

Les aciers de couture sont soumis à une force de traction :

$$dF_s = \frac{A_t f_{et}}{S_t \gamma_s} ds$$

Les projections des forces s'écrivent :

$$\tau_u b_0 ds = \frac{A_t f_{et}}{S_t \gamma_s} ds \cos \alpha + dF_{bc} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\sigma_u b_0 ds = -\frac{A_t f_{et}}{S_t \gamma_s} ds \sin \alpha + dF_{bc} \sin \frac{\pi}{4}$$

D'où par soustraction :

$$(\tau_u - \sigma_u) b_0 = \frac{A_t f_{et}}{S_t \gamma_s} (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$\frac{A_t f_{et}}{b_0 S_t \gamma_s} (\cos \alpha + \sin \alpha) = (\tau_u - \sigma_u)$$

Le plus souvent on choisit :  $\alpha=90^\circ$  donc  $(\tau_u - \sigma_u) b_0 = \frac{A_t f_{et}}{S_t \gamma_s}$

Et si  $\sigma_u = 0$  (cas de flexion simple) on trouve  $\frac{A_t f_{et}}{S_t \gamma_s} = b_0 \tau_u = g_u$

On peut donc retenir ce résultat « la force développée par unité de longueur par les aciers de couture doit équilibrer le glissement longitudinal ultime par unité de longueur.

### I.8.2 Vérification du béton

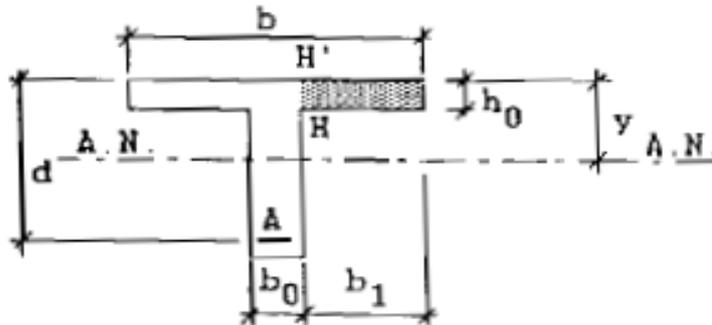


Figure I-25 Contrainte tangente à la jonction nervure-saillie [1]

L'effort de glissement sur le plan HH' (variation d'effort normal par unité de longueur) correspondant à la saillie  $b_1$  vaut : [1]

$$g_{lu} = \frac{V_u}{I} b_1 h_0 \left( y - \frac{h_0}{2} \right)$$

$I$  = moment d'inertie par rapport à l'axe neutre de la section homogène réduite .Or le moment statique  $S_I$  de la partie comprimée de la section en T est tel que : [1]

$$S_I \geq b h_0 \left( y - \frac{h_0}{2} \right)$$

Puisque l'axe neutre est dans la nervure.

On déduit :

$$h_0 \left( y - \frac{h_0}{2} \right) \leq \frac{S_I}{b}$$

D'où la contrainte tangente à la jonction nervure-saillie :

$$\tau = \frac{g_{lu}}{b_0}$$

Soit :

$$\tau = \frac{V_u}{z} \frac{b_1}{h_0} \frac{1}{b} \leq \tau_{lim}$$

### I.8.3 Acier de couture

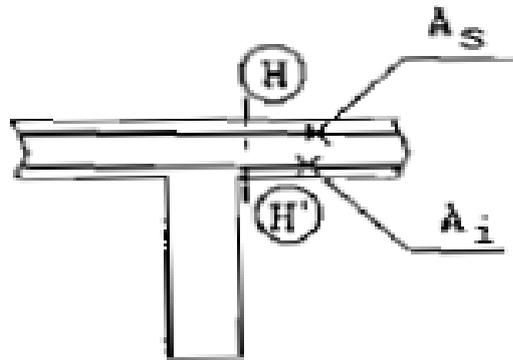


Figure I-26 Aciers de couture jonction Hourri-Nervure [1]

$A_s$  et  $A_i$  étant les aciers supérieurs et inférieurs de la dalle espacés de  $S_t$  et ancrés totalement de part et d'autre de sections de jonction HH'. Ils équilibrent par unité de longueur un effort : [1]

$$\frac{A_s + A_i}{S_t} \frac{f_e}{\gamma_s} \text{ avec } \gamma_s = 1.15$$

Cet effort devant être au moins égal à l'effort de glissement ultime dans la saillie de largeur  $b_1$ . [1]

$$\frac{A_s + A_i}{S_t} \frac{f_e}{\gamma_s} \geq g_{lu} = \frac{V_u}{z} \frac{b_1}{b}$$

Il faut donc :

$$\frac{A_s + A_i}{S_t} f_e \geq 1.15 \frac{V_u}{z} \frac{b_1}{b} \text{ avec } z = 0.9 d$$

Remarque :

En général  $A_s$  et  $A_i$  sont les armatures d'une dalle fléchie localement entre deux nervures parallèles. On admet qu'elles peuvent simultanément jouer le rôle d'armatures de couture et n'ont donc à être complétées que si l'inégalité précédente n'est pas vérifiée. [1]

## I.9 Poutre à talon

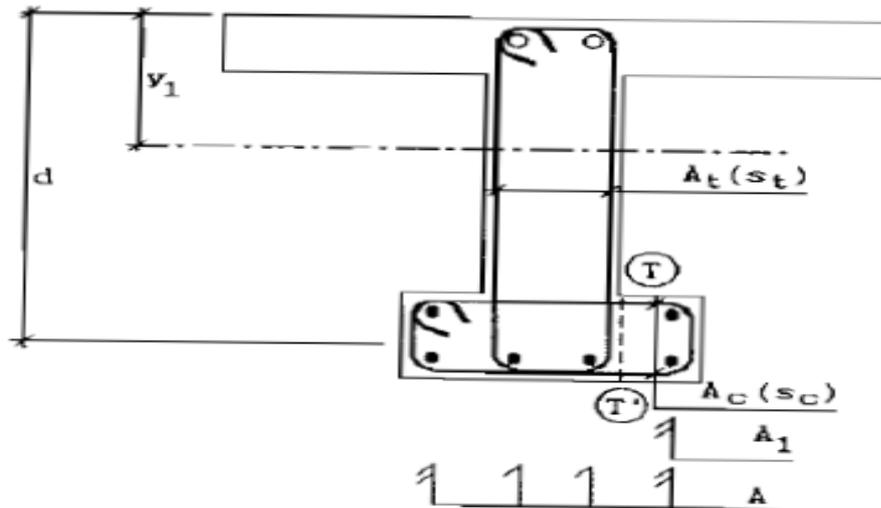


Figure I-27 Poutre à talon[1]

Notations :

$A_1$  = section des barres longitudinales situées dans une saillie du talon.

$A$  = section de l'ensemble des barres longitudinales situées dans le talon.

$A_c$  = section d'une nappe d'aciers de couture (cadre de talon)

$S_c$  = équidistance de ces nappes.

L'effort de glissement par unité de longueur du plan TT' vaut :

$$g_u = \frac{V_u}{I_I} S_B = \frac{V_u}{z} \frac{S_B}{S_I}$$

Avec :

$S_B = 15A_1 (d - y_1)$  = moment statique par rapport à l'axe neutre d'une saillie du talon.

$S_I = 15A(d - y_1)$  = moment statique des aciers tendus par rapport au même axe.

= - moment statique de l'aire homogène comprimée, d'après l'équation des moments statiques.

Soit :

$$g_u = \frac{V_u}{z} \frac{A_1}{A} = \frac{V_u}{0.9d} \frac{A_1}{A}$$

D'après la règle des coutures, les armatures de couture sont obtenues en écrivant que l'effort unitaire équilibré par les aciers de couture est au moins égal à l'effort de glissement ultime sur le plan TT' : [1]

$$\frac{A_t}{S_c} \frac{f_{et}}{\gamma_s} \geq g_u = \frac{V_u}{0.9d} \frac{A_1}{A}$$

Soit, si l'on adopte le même espacement pour les armatures de couture et les armatures d'âme ( $S_c = S_t$ )

$$\frac{A_t}{S_c} f_{et} \geq \gamma_s \frac{V_u}{0.9d} \frac{A_1}{A}$$

$\gamma_s = 1.15$  En général.

## Chapitre II Flexion Composée

### II.1 Généralités-Introduction

#### II.1.1 Généralités

On désigne par : [1]

$M_{G0}$  = le moment de flexion (ultime ou de service) par rapport au centre de gravité de la section de béton seul.

$N$  = l'effort normal (ultime ou de service), par convention :

- Positif pour la compression
- Négatif pour la traction

Excentricité par rapport au centre de gravité de la section de béton seul (résultat des calculs de RDM)

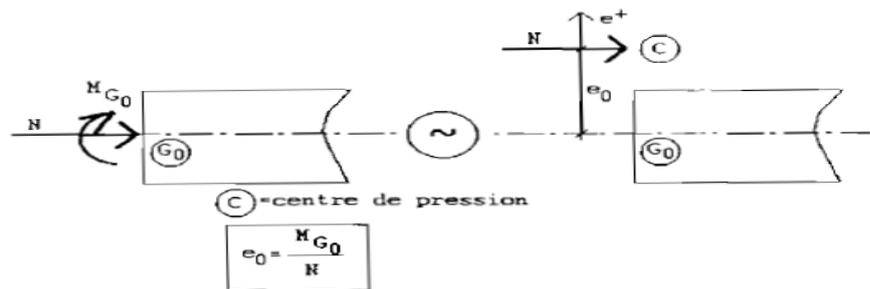


Figure II-1 Excentricité par rapport au centre de gravité de la section de béton [1]

#### II.1.2 Prise en compte forfaitaire des effets du second ordre (Flexion-Compression à l'E.L.E)

$l_f$  = longueur de flambement de la pièce

$h$  = hauteur de la section droite dans le plan de flambement

$l$  = longueur libre de la pièce

$$\text{Excentricité additionnelle } e_a = \max \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ cm} \\ \frac{l}{250} \end{array} \right. \quad [1]$$

$$\text{Excentricité du premier ordre à l'E.L.U } e_1 = \frac{\sum \gamma_j M_{jG0}}{\sum \gamma_i N_i} + e_a \quad [1]$$

- **Premier cas : cas où  $\frac{l_f}{h} > \max[15 ; 20 \frac{e_1}{h}]$**

Vérifier la pièce à l'état limite ultime de stabilité de forme (flambement) [1]

- **Deuxième cas : cas où  $\frac{l_f}{h} \leq \max[15 ; 20 \frac{e_1}{h}]$**

Faire le calcul en flexion composée pour les sollicitations ultimes : [1]

- $N_u = \sum \gamma_i N_i$

$$M_{uG0} = N_u(e_1 + e_2) = N_u e_0$$

$$\text{Avec : } e_2 = \frac{3}{10^4} \frac{l_f^2}{h} [2 + \alpha \emptyset]$$

$\emptyset$  = rapport de la déformation finale due au fluage, à la déformation instantanée sous la charge considérée.  $\emptyset=2$  en général.

$$\alpha = \frac{M_i^l (G + \sum_{i \geq 1} \psi_{2i} Q_2)}{M_i (G + Q_1 + \sum_{i \geq 2} \psi_{0i} Q_i)}$$

$M_i$  et  $M_i^l$  étant évalués sans les coefficients  $\gamma$  (ce sont des moments de service)

$e_a$  N'intervient pas.

## II.2 Sections partiellement tendues

### II.2.1 Définition

La section est partiellement tendue si : [1]

#### II.2.1.1 À l'E.L.S

- $N_{ser}$  est une compression ( $N_{ser} > 0$ ), pour une section rectangulaire sans aciers comprimés, il faut  $y_1 \leq h$  d'où :

$$M_{serA} \leq M_{serlim} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{bc} b_0 h \left( d - \frac{h}{3} \right) = \frac{1}{2} \frac{h}{d} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{h}{d} \right) b_0 d^2 \bar{\sigma}_{bc}$$

Avec au moins une nappe d'aciers tendus ( $y_1 \leq d$ ) si :

$$M_{serA} \leq M_{serlim} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) b_0 d^2 \bar{\sigma}_{bc} = 0.333 b_0 d^2 \bar{\sigma}_{bc}$$

- $N_{ser}$  est une traction ( $N_{ser} < 0$ ), « C » est à l'extérieur des traces des armatures

## II.2.1.2 À P.E.L.U

- $N_u$  est une compression, dans ce cas  $N_{ser} > 0$ , et  $e_0 = e_1 + e_2 \neq e_{0ser}$

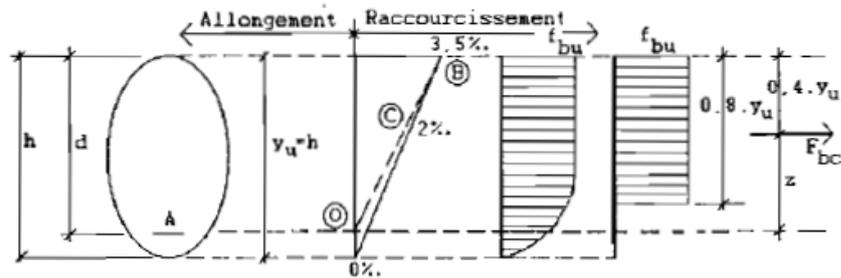


Figure II-2 sections sollicitées à la flexion composée (cas des sections partiellement tendues) [1]

Pour une section rectangulaire, en l'absence des aciers comprimés si  $y_u = h$  on trouve : [1]

$$F_{bc} = 0.8 h b_0 f_{bu} \text{ et } z = d - 0.4h \text{ donc } M_{BC} = F_{bc} * z$$

Soit, en considérant les moments par rapport aux aciers tendus : [1]

$$M_{BC} = 0.8 \frac{h}{d} \left( 1 - 0.4 \frac{h}{d} \right) b_0 d^2 f_{bu} \text{ D'où } \mu_{BC} = \frac{M_{BC}}{b_0 d^2 f_{bu}} = \frac{0.8 \frac{h}{d} \left( 1 - 0.4 \frac{h}{d} \right) b_0 d^2 f_{bu}}{b_0 d^2 f_{bu}}$$

$$\mu_{BC} = 0.8 \frac{h}{d} \left( 1 - 0.4 \frac{h}{d} \right)$$

Et la section est partiellement tendue tant que  $y_u \leq h$  c'est-à-dire tant que : [1]

$$\mu_{bu} = \frac{M_{uA}}{b_0 d^2 f_{bu}} \leq \mu_{BC} = 0.8 \frac{h}{d} \left( 1 - 0.4 \frac{h}{d} \right)$$

Avec  $M_{uA}$  = moment fléchissant ultime par rapport aux aciers tendus.

On remarque que l'on a au moins une nappe d'aciers tendus si :  $y_1 \leq d$ , par conséquent on trouve : [1]

$$\mu_{bu} \leq \mu_{BC} = 0.8 (1 - 0.4) = 0.48$$

- $N_u$  est une traction, ( $N_{ser} < 0$ ), c'est à l'extérieur des traces des armatures (dans ce cas :  $e_0 = \frac{\sum \gamma_j M_{jG0}}{\sum \gamma_i N_i} \neq e_{0ser}$  à moins que M et N proviennent d'une action unique auquel cas  $e_0 = e_{0ser}$ . [1])

## II.2.2 Calcul des armatures

### II.2.2.1 Méthode de calcul

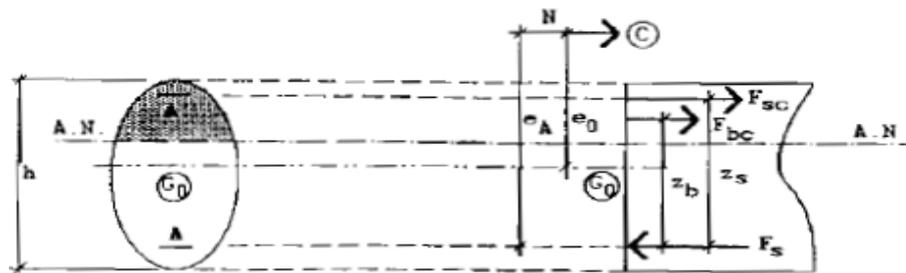


Figure II-3 Méthode de calcul des sections partiellement tendues [1]

Prenant les moments par rapport aux aciers tendus. Les équations d'équilibre s'écrivent : [1]

$$\sum M/A = 0 \rightarrow M_A = Ne_A = F_{sc}Z_s + F_{bc}Z_b$$

$$\sum F = 0 \rightarrow N = F_{bc} + F_{sc} - F_s$$

En tenant compte des sections A et A' d'armatures :

$$M_A = Ne_A = A'\sigma_{sc}Z_s + F_{bc}Z_b$$

$$N = F_{bc} + A'\sigma_{sc} - A\sigma_{sc} \leftrightarrow F_{bc} + A'\sigma_{sc} - \left(A + \frac{N}{\sigma_s}\right)\sigma_s = 0$$

Les équations de la même section soumise en flexion simple au moment  $M_A$  et de mêmes déformations et munie des sections d'armatures A et A' s'écrivent :

$$M_A = A'\sigma_{sc}Z_s + F_{bc}Z_b$$

$$0 = F_{bc} + A'\sigma_{sc} - A\sigma_{sc}$$

Où par identification, il vient

$$A' = A'$$

$$A = A - \frac{N}{\sigma_s}$$

### II.2.2.2 Technique de calcul

- Calculer le moment  $M_A$  ( $M_{serA}$ ,  $M_{uA}$ ) par rapport aux aciers tendus.
- En déduire par le calcul en flexion simple les sections  $A$  et  $A'$  d'armatures.
- Revenir à la flexion composée avec les aciers  $A'=A'$  et  $A = A - \frac{N}{\sigma_s}$  où  $N$  ( $N_u$  ou  $N_{ser}$ ) en valeur algébrique.
- $\sigma_s$  à l'état limite déterminant pour  $A$ .
- Dans le cas où  $A'$  préexiste, la méthode de calcul exposée ci-dessus s'applique :

1. En prenant à l'E.L.U  $M_{BC} = 0.8 \frac{h}{d} \left(1 - 0.4 \frac{h}{d}\right) b_0 d^2 f_{bu} + A' f_{ed} (d - d')$

2. En prenant à l'E.L.S  $M_{serlim} = \frac{1}{2} \frac{h}{d} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{h}{d}\right) b_0 d^2 \overline{\sigma}_{bc} + A' f_{ed} (d - d')$

avec  $\sigma_{sc} = 15 \overline{\sigma}_{bc} \frac{h-d'}{h}$

3. En vérifiant que  $A'$  calculée  $<$   $A'$  réelle

### II.2.2.3 Remarque

- $N$  est une compression ( $N > 0$ ) diminution de la section d'aciers tendus trouvée en flexion simple
- $N$  est une traction ( $N < 0$ ) augmentation de la section d'aciers tendus trouvée en flexion simple

### II.2.2.4 Position des aciers tendus :

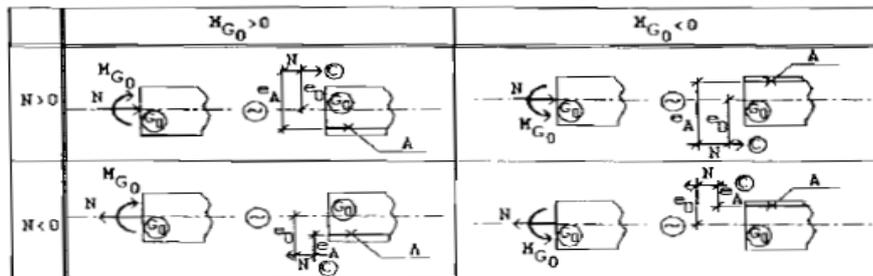


Tableau II-1 position des aciers tendus [1]

Si  $N$  est une compression, « C » est à l'opposé de « A » (centre de gravité des aciers tendus) par rapport à  $G_0$ .

Si  $N$  est une traction, « C » et « A » (centre de gravité des aciers tendus) sont du même côté par rapport à  $G_0$ .

### II.2.2.5 Section en T à l'E.L.U

#### II.2.2.5.1 Cas où $M_{uA} \leq M_{uT}$

Table surabondante pour équilibrer  $M_{uA}$ . Donc calcul en section rectangulaire de largeur  $b$  en flexion composée à  $(M_{uA}$  et  $N_u)$ . [1]

#### II.2.2.5.2 Cas où $M_{uA} > M_{uT}$

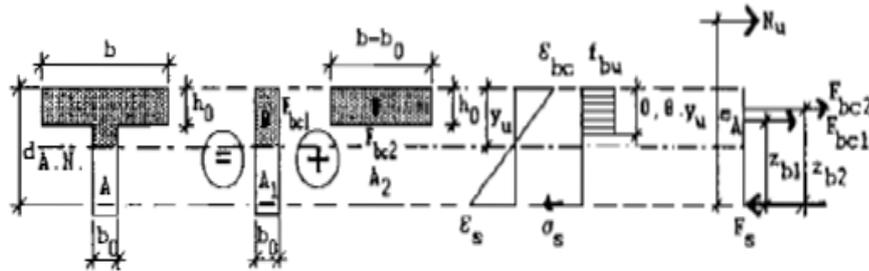


Figure II-4 Section en T soumise à la flexion composée [1]

Les équations d'équilibre s'écrivent : [1]

$$\sum M/A = 0 \rightarrow M_{uA} = F_{bc1}Z_{b1} + F_{bc2}Z_{b2}$$

$$\sum F = 0 \rightarrow N_u = F_{bc1} + F_{bc2} - F_s$$

$$\text{Avec } \begin{cases} F_{bc1} = 0.8 y_u b_0 f_{bu} \text{ et } Z_{b1} = d - 0.4 y_u \\ F_{bc2} = (b - b_0) h_0 f_{bu} \text{ et } Z_{b2} = d - \frac{h_0}{2} \\ F_s = A \sigma_s \end{cases} \quad \text{Donc :}$$

$$\sum M/A = 0 \rightarrow M_{uA} = 0.8 y_u b_0 f_{bu} (d - 0.4 y_u) + (b - b_0) h_0 f_{bu} (d - \frac{h_0}{2})$$

$$\sum F = 0 \rightarrow N_u = 0.8 y_u b_0 f_{bu} + (b - b_0) h_0 f_{bu} - A \sigma_s$$

$$\text{Et en posant : } \begin{cases} M_{uR} = M_{uA} - (b - b_0) h_0 f_{bu} (d - \frac{h_0}{2}) \\ N_{uR} = N_u - (b - b_0) h_0 f_{bu} \end{cases}$$

$$\text{Il vient : } \begin{cases} M_{uR} = 0.8 y_u b_0 f_{bu} (d - 0.4 y_u) \\ N_{uR} = 0.8 y_u b_0 f_{bu} - A \sigma_s \end{cases}$$

Il ne faut pas oublier de bien retrancher de  $A$  la quantité  $\frac{N_{uR}}{\sigma_s}$  ( $N_{uR}$  en valeur algébrique)

et non pas  $\frac{N}{\sigma_s}$  Seulement.

### II.2.2.6 Section minimale d'armature

La sollicitation provoquant la fissuration du béton ( $\sigma_t = f_{t28}$ ) de la section supposée non armée et non fissurée doit entraîner dans les aciers tendus de la section réelle un contrainte au plus égal à  $f_e$ . [1]

#### II.2.2.6.1 Cas de section en T

Caractéristiques géométriques de la section non fissurée et non armée.

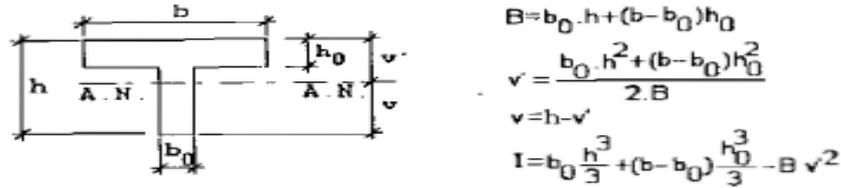


Figure II-5 caractéristiques géométriques d'une section en T [1]

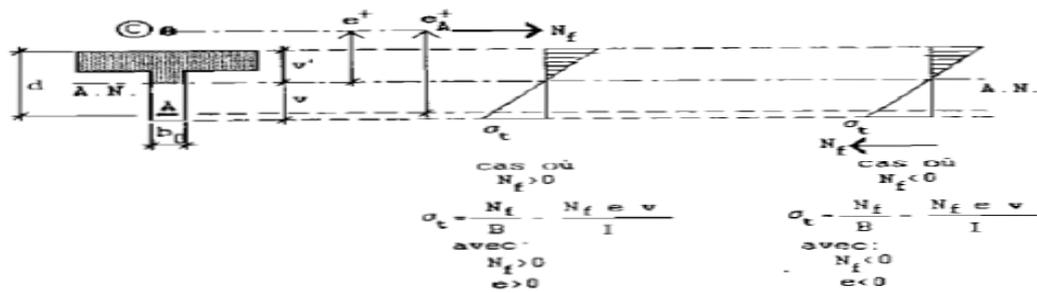


Figure II-6 Section minimale pour une section en T sollicitée en flexion composée [1]

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_t = \frac{N_f}{B} - \frac{N_f \cdot e \cdot v}{I} \\ e = \frac{|M_{serG0}|_{max}}{N_{ser}} \\ \sigma_t = f_{t28} \end{array} \right\} \Rightarrow N_f = \frac{B \cdot I \cdot f_{t28}}{B \cdot e \cdot v - I}$$

**Pourcentage minimal d'armatures :**

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{min} = \frac{N_f e_A}{z_b f_e} - \frac{N_f}{f_e} \\ z_b = d - \frac{h_0}{3} \\ e_A = e + (d - v') \end{array} \right\} \Rightarrow A_{min} = B \frac{f_{t28}}{f_e} * \frac{I}{d - \frac{h_0}{3}} * \frac{e - v' + \frac{h_0}{3}}{B * e * v - I}$$

Où  $e$  et  $N_{ser}$  on même signe.

### II.2.2.6.2 Cas de section rectangulaire

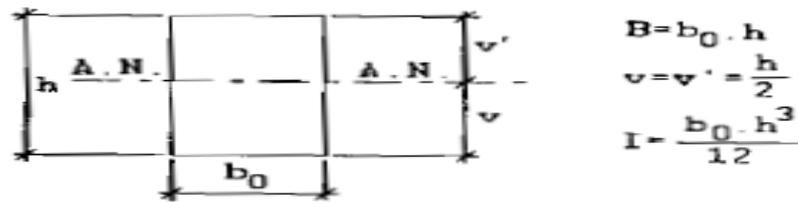


Figure II-7 caractéristiques géométriques d'une section rectangulaire [1]

#### Pourcentage minimal d'armatures : [1]

Formule établie pour les sections en T avec :

$$z_b = 0.9d \text{ au lieu de } z_b = d - \frac{h_0}{3}$$

Compte tenu du fait que :

$$e_A - z_b = e + (d - v') - 0.9d = e - v' + 0.1d$$

$$A_{\min} = B \frac{f_{t28}}{f_e} * \frac{I}{0.9d} * \frac{e - v' + 0.1d}{B * e * v - I}$$

$$A_{\min} = b_0 h \frac{f_{t28}}{f_e} * \frac{b_0 h^3}{12 * 0.9d} * \frac{e - 0.5h + 0.1d}{b_0 * h * e * \frac{h}{2} - \frac{b_0 h^3}{12}}$$

$$A_{\min} = b_0 h \frac{f_{t28}}{f_e} * \frac{h}{0.9d} * \frac{e - 0.5h + 0.1d}{6e - h}$$

Comme en général  $d=0.9h$

$$A_{\min} = b_0 d \frac{f_{t28}}{f_e} * \left( \frac{1}{0.9^3 * 6} \right) * \frac{e - \frac{0.5}{0.9}d + 0.1d}{e - \frac{d}{6 * 0.9}}$$

$$A_{\min} = 0.23 \frac{f_{t28}}{f_e} b_0 d * \frac{e - 0.45d}{e - 0.185d}$$

Avec  $e$  et  $N_{ser}$  de même signe.

#### Remarque : [1]

Dans le cas de la flexion simple si  $e$  tend vers l'infini,  $A_{\min} = 0.23 \frac{f_{t28}}{f_e} b_0 d$

## II.3 Sections entièrement tendues

### II.3.1 Définition

À l'E.L.U comme à l'E.L.S la section est entièrement tendue si :

- N est une traction ( $N < 0$ ).
- C tombe entre les armatures.

### II.3.2 Calcul des armatures

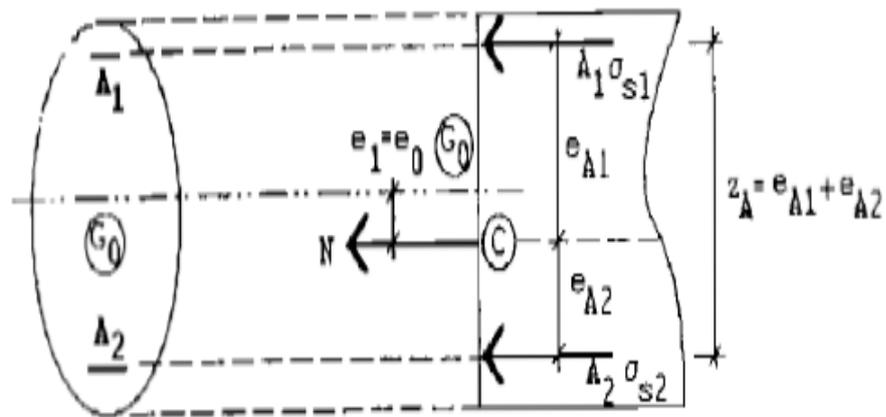


Figure II-8 Section entièrement tendues [1]

L'équilibre des moments par rapport aux armatures donne :

$$A_1 = \frac{N e_{A2}}{(e_{A1} + e_{A2}) \sigma_{s1}}$$

$$A_2 = \frac{N e_{A1}}{(e_{A1} + e_{A2}) \sigma_{s2}}$$

Solution économique : Avoir le centre des armatures en « C », d'où :

Calcul à l'E.L.U : Pivot A donc  $\sigma_{s1} = \sigma_{s1} = f_{ed}$

Calcul à l'E.L.S :  $\sigma_{s1} = \sigma_{s1} = \bar{\sigma}_s$

### II.3.3 Section minimale d'armatures

$$A_1 + A_2 = A \geq A_{\min} = B \frac{f_{t28}}{f_e} \quad [1]$$

## II.4 Sections entièrement comprimées

### II.4.1 Définition

La section est entièrement comprimée si, la section A' des armatures les plus comprimées étant supposée comme (en cas contraire A'=0 dans les formules qui suivent) : [1]

#### À l'E.L.S

$N_{ser}$  est une compression ( $N_{ser} > 0$ )

$$M_{serA} - A' \sigma_{sc} (d - d') > \frac{1}{2} \frac{h}{d} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{h}{d}\right) b_0 d^2 \overline{\sigma}_{bc} \quad \text{pour une section rectangulaire avec}$$

$$\sigma_{sc} = 15 \overline{\sigma}_{bc} \frac{h-d'}{h} .$$

#### À l'E.L.U

$N_u$  est une compression ( $N_u > 0$ )

$$M_{uA} - A' f_{ed} (d - d') > M_{BC} = 0.8 \frac{h}{d} \left(1 - 0.4 \frac{h}{d}\right) b_0 d^2 f_{bu} \quad \text{pour une section rectangulaire.}$$

### II.4.2 Calcul des armatures

#### II.4.2.1 Dimensionnement à l'E.L.U.

Calcul manuel au pivot C compliqué, on utilise des abaques (diagrammes des interactions).[1]

#### II.4.2.2 Dimensionnement à l'E.L.S.

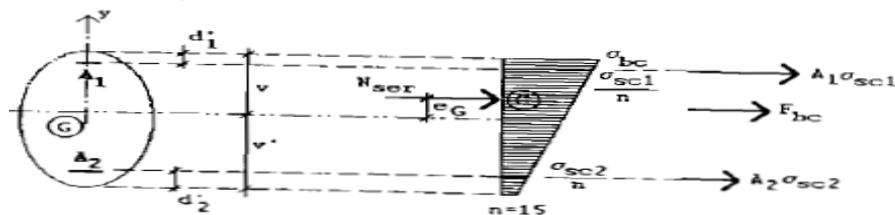


Figure II-9 section entièrement comprimée sollicitée à l'E.L.S[1]

On désigne par :

$$M_{serG} = N_{ser} e_G = \text{moment au centre de gravité G de la section homogène.}$$

$A_1$  et  $A_2$  = sections d'aciers comprimés (fixés en satisfaisant le pourcentage minimal en compression simple. [1])

Les caractéristiques géométriques de la section homogènes sont :

$$B_0 = B + 15(A_1 + A_2)$$

$I_0$  = moment d'inertie de la section  $B_0$  par rapport a G .

On obtient la contrainte pour le béton :

$$(\sigma_{bc})_{max} = \frac{N_{ser}}{B_0} + \frac{M_{serG} * v}{I_0} \leq \overline{\sigma_{bc}}$$

Pour le dimensionnement, il faut se fixer a priori  $A_1$  et  $A_2$  et chercher par tâtonnements :

- à ce que « C » reste dans le noyau central.
- à ce que  $(\sigma_{bc})_{max} \leq \overline{\sigma_{bc}} = 0.6 f_{c28}$  avec  $(\sigma_{bc})_{max} \approx \overline{\sigma_{bc}}$ .

#### II.4.3 Section minimale

$$A_{min} = \max \left\{ \begin{array}{l} 4 \text{ cm}^2 \text{ de périmètre} \\ 0.2 \frac{B}{100} \end{array} \right. \quad \text{Avec } B = \text{aire de la section du béton. [1]}$$

## Chapitre III Torsion

### III.1 Généralités

#### III.1.1 Contrainte engendrée par un couple de torsion

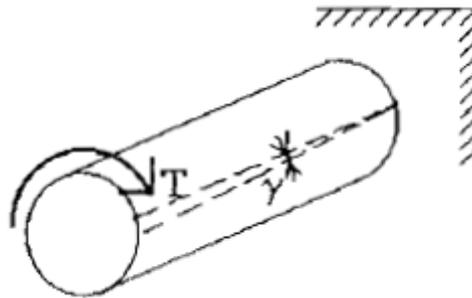


Figure III-1 sollicitation de torsion [1]

Un couple de torsion  $T$  appliquée à l'extrémité libre d'une barre encastrée produit une distorsion  $\gamma$  des génératrices de la barre.

Les contraintes développées par le couple de torsion  $T$  sont donc des contraintes de cisaillement  $\tau$ .

$$\tau = -G * \gamma$$

$G$  = module d'élasticité transversal du matériau constitutif de la barre.

#### III.1.2 Torsion des profils creux

##### III.1.2.1 Flux du vecteur contrainte

Considérons l'élément ABCD de longueur  $dx$  découpé dans l'épaisseur du profil.

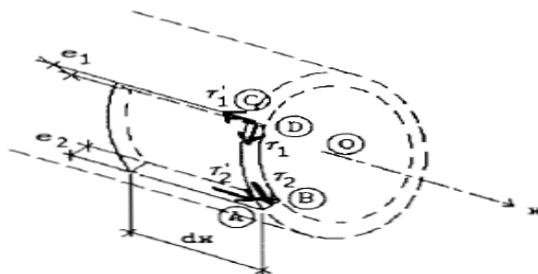


Figure III-2 flux du vecteur contrainte

Les contraintes tangentes sur deux facettes orthogonales étant égales, on a :

$$\tau'_1 = \tau_1 \quad \text{et} \quad \tau'_2 = \tau_2$$

La projection des forces élastiques suivant OX donne, en l'absence de tout effort normal :

$$\int_A^B \tau_2 dx dy - \int_C^D \tau_1 dx dy = 0$$

Soit, en admettant que les contraintes de cisaillement sont constantes dans l'épaisseur  $e$  du tube mince :

$$\tau * e = \varnothing = Cste$$

### III.1.2.2 Valeur de la contrainte tangente

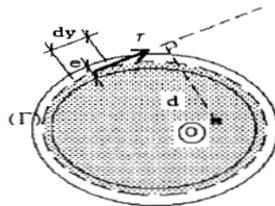


Figure III-3 contrainte tangente

$\Gamma$  Étant la ligne moyenne de l'épaisseur constante du tube mince, l'équilibre de la section droite s'écrit (moment en o)

$$T = \int_{(\Gamma)} \tau * e * d * dy = \tau * e \int_{(\Gamma)} d * dy$$

Soit en remarquant que :

$$\int_{(\Gamma)} d * dy = 2 \Omega$$

où  $\Omega$  est le double de l'aire délimitée par la courbe  $\Gamma$ .

$$T = \tau * e * 2\Omega$$

D'où la contrainte tangente due au couple de torsion  $T_u$  à l'E.L.U :

$$\tau_u = \frac{T_u}{2 e \Omega}$$

## III.2 Vérification du béton

### III.2.1 Cas des sections creuses

La contrainte tangente, pour des sections de forme convexe, a pour expression :

$$\tau_u = \frac{T_u}{2 b_0 \Omega}$$

Où :

$T_u$  = couple de torsion à l'état limite ultime

$b_0$  = épaisseur de la paroi au point considéré

$$b_0 = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{épaisseur réelle} \\ \frac{a}{6} \end{array} \right.$$

$a$  = diamètre maximal du plus grand cercle inscrit dans le contour extérieur de la section.

$\Omega$  = aire du contour tracé à mi- épaisseur des parois.

### III.2.2 Cas des sections pleines

On se ramène au cas précédent en remplaçant la section réelle par une section creuse équivalente d'épaisseur  $b_0 = \frac{a}{6}$

$a$  = diamètre maximale du plus grand cercle inscrit dans le contour extérieur de la section.

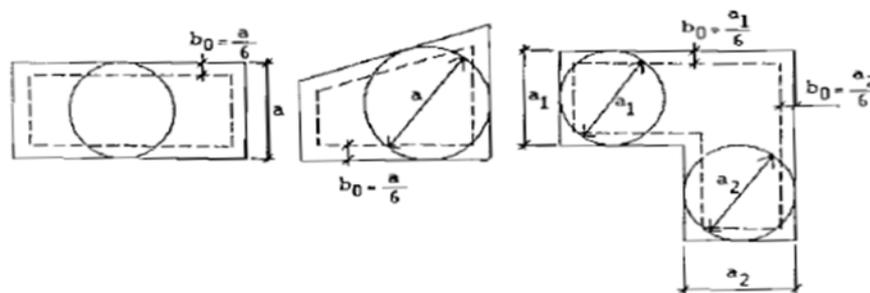


Figure III-4 l'épaisseur équivalente  $b_0$  d'une section pleine

### III.2.3 Justification du béton

En désigne par :

$\tau_{uv}$  = contrainte tangente due à l'effort tranchant  $V_u$ .

$$\tau_{uv} = \frac{V_u}{bd} \text{ pour une section pleine de largeur } b.$$

$$\tau_{uv} = \frac{V_u}{2b_0d} \text{ pour une section creuse d'épaisseur réelle de paroi } \mathbf{b_0} .$$

$\tau_{uT}$  = contrainte tangente due au couple de torsion  $T_u$ .

On doit vérifier :

$$\tau_{uT} + \tau_{uv} \leq \tau_{lim} \text{ pour une section creuse}$$

$$\tau_{uT}^2 + \tau_{uv}^2 \leq \tau_{lim}^2 \text{ pour une section pleine}$$

Avec pour des armatures d'âmes droites ( les seules à utiliser en torsion )

Fissuration	$\tau_{lim}$
Peu préjudiciable	$\min \left\{ \begin{array}{l} 0.2 \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \\ 5 \text{ MPa} \end{array} \right.$
Préjudiciable ou très préjudiciable	$\min \left\{ \begin{array}{l} 0.15 \frac{f_{cj}}{\gamma_b} \\ 4 \text{ MPa} \end{array} \right.$

Tableau III-1 valeur de  $\tau_{lim}$  en fonction de la fissuration considérée

### III.3 Armatures

Les armatures pour la torsion se composent de double système :

- Armatures transversales droites.
- Armatures longitudinales

Elles ne sont nécessaires que dans les éléments où le couple de torsion ne diminue pas du fait de la fissuration du béton.

### III.3.1 Armatures transversales

#### III.3.1.1 Calcul des armatures

En appliquant la règle des coutures aux plans perpendiculaire aux parois.

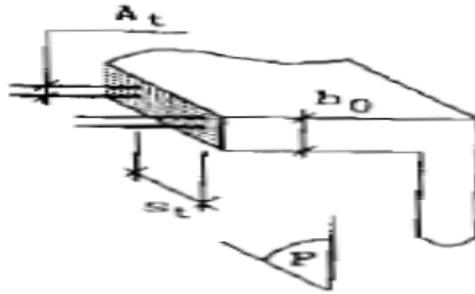


Figure III-5 armatures transversales de torsion

$$\begin{cases} \frac{A_t}{b_0 s_t} f_{ed} (\sin 90^\circ + \cos 90^\circ) = \tau_u \\ \tau_u = \frac{T_u}{2\Omega} \end{cases} \quad \text{Donc } \frac{A_t}{b_0 s_t} f_{ed} = \frac{T_u}{2\Omega}$$

$A_t$  = somme des brins d'armatures transversales contenus dans l'épaisseur  $b_0$

Les armatures ainsi déterminées (constitués obligatoirement de cadres fermés) sont à rajouter et à combiner avec celles équilibrant l'effort tranchant.

**Nota :**  $A_t$  à une signification différente dans le chapitre effort tranchant et dans le chapitre torsion.

#### III.3.1.2 Pourcentages des armatures

Comme pour l'effort tranchant et pour l'ensemble des armatures transversales (torsion + effort tranchant) :

$$\frac{A_t}{b s_t} f_{et} \geq 0.4 \text{ MPa}$$

$b$  = largeur de la section pour une section pleine .

$b = 2b_0$  pour une section creuse d'épaisseur  $b_0$  .

### III.3.1.3 Espacement maximal

Comme pour l'effort tranchant :

$$S_t \leq \min \begin{cases} 0.9 d \\ 40 \text{ cm} \\ 15\phi'_l \end{cases} \text{ si } A' \neq 0 \text{ réalisé avec des aciers de diamètre } \phi'_l.$$

### III.3.2 Armatures longitudinales

#### III.3.2.1 Calcul des armatures

En appliquant la règle des coutures au plan de la section droite de la pièce :

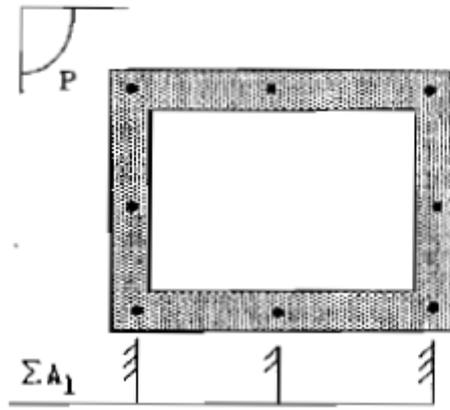


Figure III-6 armatures longitudinales de torsion

$$\begin{cases} \frac{\Sigma A_l}{b_0 u} f_{ed} (\sin 90^\circ + \cos 90^\circ) = \tau_u \\ \tau_u = \frac{T_u}{2b_0 \Omega} \end{cases} \quad \text{Donc } \frac{\Sigma A_l}{u} f_{ed} = \frac{T_u}{2\Omega}$$

Avec :

$\Sigma A_l$  = section total d'aciers longitudinaux à répartir sur le pourtour de la section droite.

$u$  = périmètre de l'aire  $\Omega$

La section  $\Sigma A_l$  d'aciers longitudinaux est à prévoir en supplément de la section  $A$  d'aciers longitudinaux de flexion. Il faut au moins une barre dans chaque angle.

#### III.3.2.2 Pourcentages des armatures

$$\frac{\Sigma A_l}{b_0 u} f_e \geq 0.4 \text{ MPa avec } b_0 = \frac{a}{6}$$

## **Chapitre IV Généralités sur le Béton Précontraint**

### **IV.1 Introduction :**

Comme le béton armé, le béton précontraint associe béton et armatures, mais il s'en différencie de façon fondamentale dans son principe. En 1928, l'ingénieur français « Eugène Freyssinet » eut l'idée géniale qui révolutionna le monde de la construction en permettant au béton de ne travailler qu'en compression. Il venait d'inventer le béton précontraint.

Il définissait ainsi la précontrainte : « Précontraindre une construction, c'est la soumettre avant application des charges à des forces additionnelles déterminant des contraintes telles que leur composition avec celles qui proviennent des charges donne en tout point des résultantes inférieures aux contraintes limites que la matière peut supporter indéfiniment sans altération ».

La précontrainte, en effet, a pour but de soumettre le béton lors de sa fabrication à des contraintes préalables permanentes de compression. Une fois l'ouvrage en service, ce gain en compression va s'opposer aux contraintes de traction créées par les charges appliquées à l'ouvrage (poids propre, charge d'exploitation, charge climatique, etc.). Le béton, matériau qui présente une faible résistance à la traction, se trouve ainsi utilisé au mieux de ses possibilités en ne travaillant qu'en compression.

La précontrainte est appliquée au béton grâce à des câbles de précontrainte en acier. Ces câbles sont tendus par des vérins de précontrainte.

Lorsque l'on tend les câbles, ils vont par réaction appliquer un effort de compression au béton. L'intensité de la précontrainte à mettre en œuvre dépend évidemment des tractions auxquelles il faudra s'opposer et des raccourcissements instantanés et différés du béton.

La précontrainte permet la réalisation d'ouvrages soumis à des contraintes importantes (ponts ou réservoirs de grande capacité) aussi bien que d'éléments qui, tout en étant de faible épaisseur, doivent assurer des portées relativement longues (dalles-planchers, poutres). Elle est à l'origine de progrès considérables pour l'utilisation du béton dans les ouvrages d'art et les structures coulées en place ou réalisées à partir d'éléments préfabriqués.

## IV.2 Historique

La précontrainte sous toutes ses formes existe depuis longtemps. Elle est naturelle dans les arcs, voutes, ou provoquée comme les cercles de tonneau, les roues de bicyclette, les roues de chariots, le pneu et la chambre à air, la corde et l'arc, la glace trempée, la scie à bois...

Le mot « précontrainte », néologisme créé par E. FREYSSINET, a été imprimé la première fois en janvier 1933 dans un article de la revue Travaux (Sciences et Industrie) sous le titre : « Idées et voies nouvelles ».

Le premier brevet de FREYSSINET sur la précontrainte date du 2 octobre 1928, il était intitulé : « Procédé de fabrication de pièces en béton armé ».

En fait, les premières études sur la précompression du béton sont antérieures à celles de FREYSSINET. On peut citer :

- les tentatives de CONSIDERE et BACH, de retarder les apparitions de fissuration par compression du béton et prétension de l'acier ;
- le brevet de P. JACKSON en Californie en 1886 qui est la première application de béton précontraint ;
- le brevet de DOEHRING en 1888 comportant quelques principes de précontrainte, mais sans lendemain et qui déposa un brevet de dalles précontraintes par fils;
- les essais des Allemands KOENER et LUNDT en 1907, qui furent voués à l'échec, pour essayer de limiter la fissuration de traction du béton. Le béton insuffisamment comprimé était encore tendu et l'effort de compression dû aux aciers était pratiquement annulé par le retrait et le fluage.

C'est FREYSSINET (1879-1962) qui, en se plaçant dans des conditions voisines des voutes, introduisit un effort de compression pour compenser les tractions à venir. En 1926, il découvrit le phénomène de fluage (déformation lente sous charge) et les lois du retrait à la suite d'expériences sur l'arc du pont de Plougastel.

Après la guerre, on assista à un essor du béton précontraint dans les pays industrialisés avec

P. ABELES en Grande-Bretagne, G. MAGNEL en Belgique. F. LEONHARDT en Allemagne. T.Y. LIN aux Etats-Unis. V. MIKHAILOV en URSS, J.J. BOUVY aux Pays-Bas, E. FREYSSINET et Y. GUYON en France.

Les premiers ponts en béton précontraint ont été réalisés par précontrainte extérieure au béton au moyen de câbles. Ce sont les ponts de la Saale à Alse en Allemagne (1928) de 68 m de portée, et de Aue en Allemagne également (1936) de 69 m de portée.

On peut citer également en :

- 1924, les voutes de Polyvestre dans le Var avec des tirants prétendus ;
- 1935, les premiers tuyaux préfabriqués précontraints ;
- 1941, le pont de Luzancy;
- 1946, les pistes précontraintes d'Orly.

En ce qui concerne la précontrainte extérieure, on peut citer également le pont de Villeneuve-Saint-Georges (1953), les ponts de Long Key, Seven Miles aux Etats-Unis, les viaducs de l'autoroute A8 (Vallon des Fleurs, de la Banquière)

#### **IV.3 Principe du béton précontraint :**

Le béton est un matériau qui résiste bien à la compression, mais peu, et surtout aléatoirement, à la traction. Il est donc intéressant de construire en béton, mais en évitant que ce matériau soit trop tendu, et risque de se fissurer. Et pour cela, il faut le comprimer de façon artificielle et en permanence, dans des zones où les charges extérieures développent des tractions de façon qu'au total le béton reste comprimé (ou assez peu tendu pour ne pas risquer de fissurer) et donc résistant à tout cas de charge. L'effort de compression volontairement développé à cet effet est appelé l'effort de précontrainte (ou la précontrainte).

Le remède ne doit pas pécher par excès : la compression totale du béton doit rester inférieure à une valeur raisonnable de façon à éviter tout risque de fissuration longitudinale des éléments précontraints par excès de compression (alors que les tractions y développent généralement des fissures transversales).

C'est ainsi qu'une poutre reposant sur deux appuis, soumise à l'effet de son poids propre (G) et d'une charge d'exploitation (Q), subit des contraintes de flexion qui se traduisent par une zone comprimée en partie supérieure et par une zone tendue en partie inférieure (Figure 1.1).

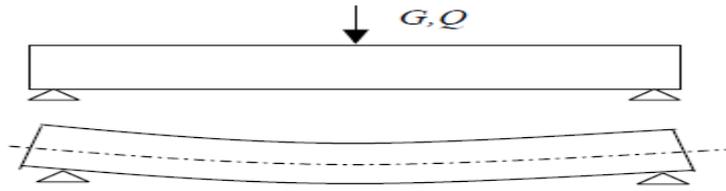


Figure IV-1 déformation d'une poutre sous chargement G et Q

La poutre subit également des contraintes de cisaillement dues aux efforts tranchants qui se produisent vers les appuis. Ces contraintes occasionnent des fissures à  $45^\circ$  que le béton ne peut reprendre seul.

Dans ce cas de figure, deux solutions sont possibles :

**Solution N°1 :** L'ajout d'une quantité d'armatures capable de reprendre les efforts de traction dans le béton (Principe du béton armé).

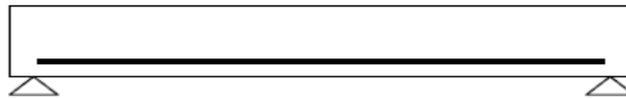


Figure IV-2 poutre avec armature en acier

Solution N°2 : L'application d'un effort de compression axial qui s'oppose aux contraintes de traction dues aux chargements (Principe du béton précontraint).

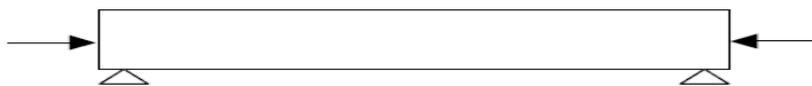
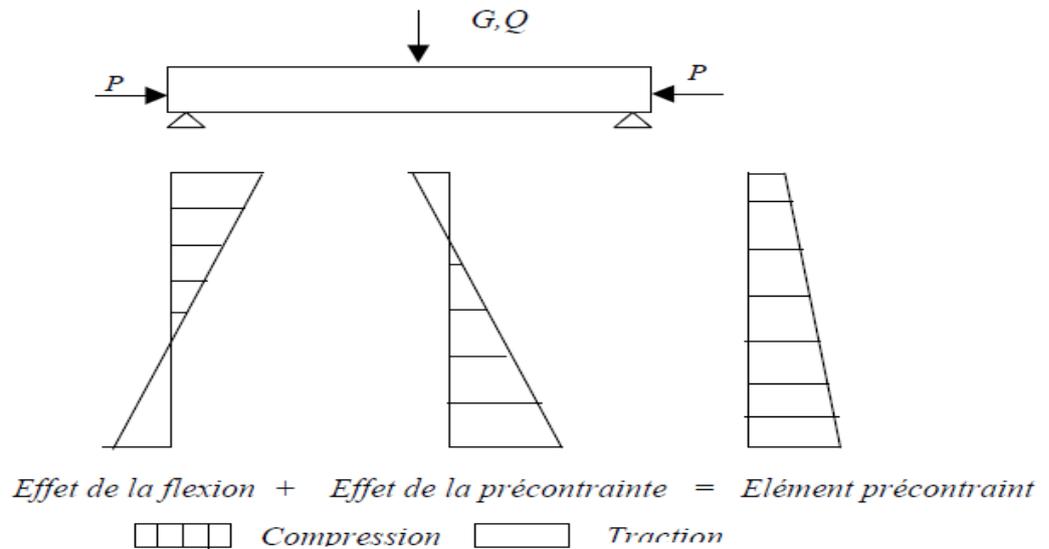


Figure IV-3 poutre soumise à une précontrainte

La précontrainte a pour objectif, en imposant aux éléments un effort de compression axial judicieusement appliqué, de supprimer (ou fortement limiter) les sollicitations de traction dans le béton (Figure 1.2).



**Figure IV-4 effet de la précontrainte appliquée sur une poutre en béton**

Cette précontrainte peut être :

- Une précontrainte partielle : autorisation des contraintes de traction limitées.
- Une précontrainte totale : élimination totale des contraintes de traction.

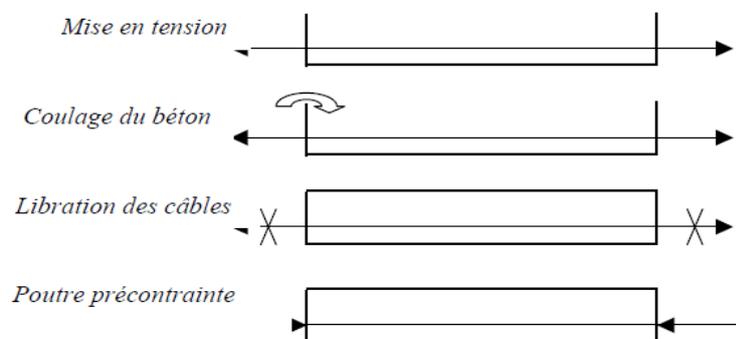
#### **IV.4 Mode de précontrainte**

Pour réaliser l'opération de précontrainte, il existe deux possibilités :

##### **IV.4.1 Précontrainte par pré-tension**

###### **IV.4.1.1 Principe de réalisation**

Dans ce procédé, les câbles de précontrainte sont tendus entre deux massifs solidement ancrés avant le coulage du béton (Figure IV-5). Cette technique est surtout employée sur les bancs de préfabrication, pour réaliser des éléments répétitifs.



**Figure IV-6 réalisation d'une précontrainte par pré-tension**

#### **IV.4.1.2 Etapes générales de réalisation**

- mise en tension des câbles.
- coulage du béton.
- la libération des câbles après le durcissement du béton.
- par adhérence, la précontrainte de compression est transmise au béton.

D'une façon plus détaillée, la méthode de précontrainte par pré-tension suit les cycles suivants :

- nettoyage des moules ;
- mise en place d'huile de décoffrage sur les moules;
- déroulement des armatures actives et blocage aux extrémités dans des plaques ;
- mise en place des armatures passives ;
- mise en place des moules dans leur position finale;
- mise en place des déviateurs éventuels ;
- mise en tension des armatures par des vérins ;
- mise en place du béton par pont-roulant ou grue ;
- lissage de la partie supérieure ;
- vibration du béton ;
- étuvage ou chauffage du béton ;
- décoffrage ;
- dé-tension des armatures actives ;
- découpage des fils situés entre deux éléments préfabriqués ;
- manutention et stockage.

#### **IV.4.2 Précontrainte par post-tension**

##### **IV.4.2.1 Principe de réalisation**

Ce procédé consiste à tendre les câbles de précontrainte, après coulage et durcissement du béton, en prenant appui sur la pièce à comprimer (Figure 1.4). Cette technique est utilisée pour les ouvrages importants est, généralement, mise en œuvre sur chantier.

La précontrainte par post tension se présente sous deux formes :

- Une précontrainte par post-tension interne
- Une précontrainte par post-tension extern

#### IV.4.2.2 Etapes générales de réalisation

- Placement des gaines dans le coffrage.
- Coulage du béton.
- Après le durcissement du béton, la mise en tension des câbles.
- Le blocage se fait par différents systèmes de cales sur une zone de béton fretté.
- L'injection d'un coulis de ciment.

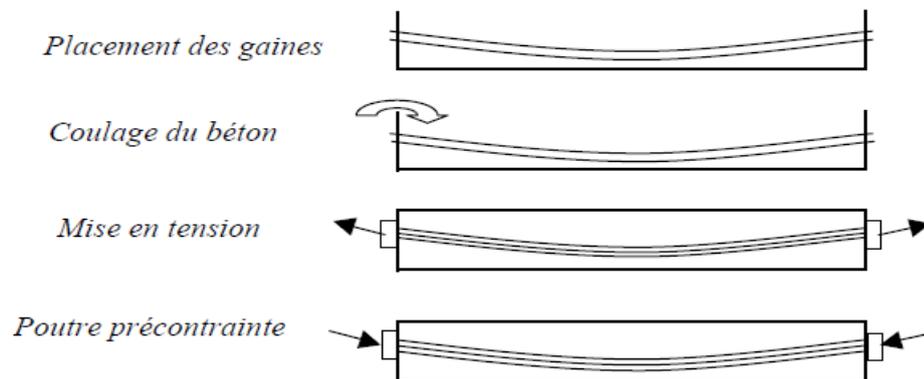


Figure IV-7 réalisation d'une précontrainte par Post-tension

La mise en tension peut être faite en tendant l'acier aux deux extrémités de la pièce (actif - actif) ou en tendant une seule extrémité uniquement (actif - passif) (Figure IV-8).

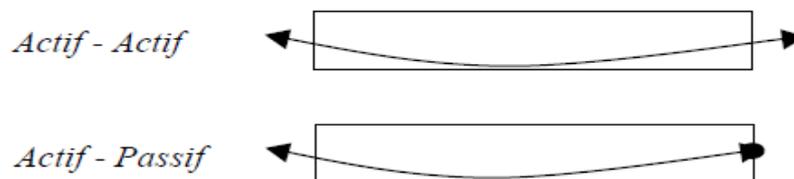


Figure IV-8 types de mise en tension de la précontrainte

L'injection est une opération extrêmement importante, car elle assure un double rôle :

- La protection des armatures de précontrainte contre la corrosion.
- L'amélioration de l'adhérence entre les armatures et les gaines.

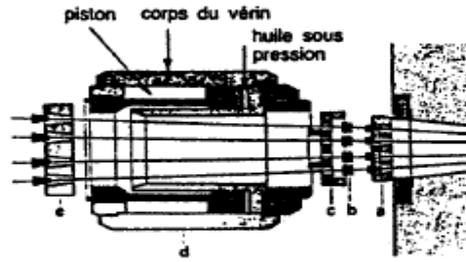
L'opération de l'injection doit être réalisée dès que possible après la mise en tension des armatures. Le produit d'injection doit répondre aux impératifs suivants :

- avoir une assez faible viscosité pour couler facilement et pénétrer dans toutes les ouvertures et entre fils des câbles de précontrainte ;
- conserver cette faible viscosité pendant un délai suffisant pour que l'injection puisse s'effectuer dans de bonnes conditions avant le début de prise;
- après durcissement, avoir une résistance suffisante pour assurer efficacement l'adhérence de l'armature au béton;
- présenter un retrait minimal ;
- ne pas être agressif vis-vis de l'acier de précontrainte.

Le produit d'injection était autrefois un mortier formé de ciment, de sable et de l'eau ; aujourd'hui le sable est à peu près complètement abandonné, au profit de coulis de ciment CPA, comportant un adjuvant.

L'ensemble d'un procédé de précontrainte comprend, généralement, les éléments suivants :

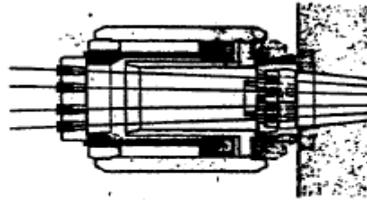
- Dispositif d'ancrage : on distingue, principalement, deux types d'ancrage :
- Ancrage actif, situé à l'extrémité de la mise en tension.
- Ancrage passif (ancrage mort), situé à l'extrémité opposée à la mise en tension.
- Les coupleurs : dispositif permettant les prolongements des armatures.
- Matériels de mise en tension : vérins, pompes d'injection, pompe d'alimentation des vérins etc.
- Les accessoires : gaines, tubes d'injection etc



#### 1. MISE EN PLACE

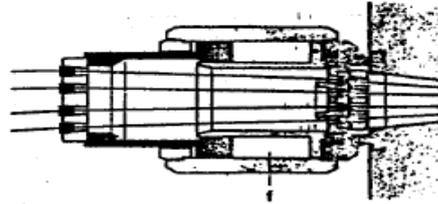
Ordre de mise en place du vérin et de ses accessoires :

- a. bloc d'ancrage avec clavettes;
- b. torons;
- c. plaque de blocage;
- d. vérin;
- e. bloc d'ancrage arrière avec clavettes spéciales.



#### 2. PRÉPARATION POUR MISE EN TENSION

Fixation des torons sur le bloc d'ancrage arrière du vérin au moyen des clavettes spéciales.



#### 3. MISE EN TENSION

Mise en pression de la chambre de tension du vérin jusqu'à obtenir l'effort désiré dans le câble.

Figure IV-9 Schéma de mise en tension de la précontrainte

## IV.5 Avantages et inconvénients de la précontrainte

### IV.5.1 Avantages

- Une compensation partielle ou complète des actions des charges.
- Une économie appréciable des matériaux.
- Augmentation des portés économiques.
- Une réduction des risques de corrosion.

### IV.5.2 Inconvénients

- La nécessité de matériaux spécifiques.
- La nécessité de main d'œuvre qualifiée.
- La nécessité d'équipements particuliers.
- Risque de rupture à vide par excès de compression.
- Un calcul relativement complexe.