

## CHAPITRE 1 : INTRODUCTION

### 1-Théorie d'élasticité :

La théorie de l'élasticité s'occupe des mêmes questions que la résistance des matériaux mais d'un point de vue plus rigoureuse. Elle s'intéresse comme son nom l'indique, au comportement des corps solides déformables dans le domaine élastique, c'est-à-dire le domaine des déformations faibles et non permanentes, par opposition au domaine plastique qui fait l'objet de la théorie de plasticité.

La théorie de l'élasticité étudie l'action des forces sur un corps solide déformable et détermine le comportement de ce corps considéré comme élastique. Elle détermine les champs de déplacements, de déformations et de contraintes qui en résultent.

### 2-Action intérieures et action extérieures :

L'interaction mécanique des corps en présence se traduit par des torseurs (ensemble de forces et de moments résultants), alors que le terme action peut désigner indifféremment une force ou un moment.

#### 2-1-Action extérieure :

Les actions extérieures se présentent sous différentes formes, elles peuvent être statiques ou dynamiques, elles peuvent être les conséquences d'une dilatation thermique des corps due à des variations de température ou bien due à des erreurs de fabrication qui introduisent des décalages dans les appuis et articulation,... etc.

En général on divise les forces extérieures en deux catégories :

- **Force de volume** : elles agissent sur les éléments de volume du corps, telles les forces gravitationnelles, électromagnétiques, d'inertie.
- **Force de surface** : ce sont les forces de contact superficielles, agissant sur la surface libre limitant le corps, telle la pression atmosphérique ou hydrostatique.

#### 2-2-Action intérieure :

L'interaction entre les particules constituant d'un corps solide est caractérisée par des actions intérieures, qui ne sont en fait que des réponses du corps solide aux diverses sollicitations extérieures.

### 3-Hypothèses fondamentales :

Nous adapterons les hypothèses suivantes :

#### 1- Hypothèse de continuité :

Tout corps continu avant déformation garde après déformation une structure continue. Cela signifie que les déformations et les déplacements des points d'un corps donné sont considérés dans un système de coordonnées quelconque comme des fonctions continues de ces coordonnées.

**2- Hypothèse de l'état naturel du corps :**

Toutes les contraintes initiales qui existeraient avant l'application de charges extérieures seraient considérées comme nulles.

**3- Hypothèse d'élasticité idéale et de linéarité :**

Le corps est considéré comme parfaitement élastique les déformations disparaissent en même temps que les forces qui les ont engendrées.

Les relations entre contraintes et déformations sont des fonctions linéaires.

**4- Hypothèse d'homogénéité :**

Un corps est considéré homogène s'il possède en tous points les mêmes propriétés physiques.

**5- Hypothèse d'isotropie :**

Pour un corps donné, tous les points de son volume possèdent les mêmes caractéristiques mécaniques dans toutes les directions autour du point considéré.

## CHAPITRE 2 : ETAT DE CONTRAINTE

### 1 Introduction :

Le comportement des matériaux et de structures en général est influencé par les actions extérieures l'étude de ce comportement est basée sur la notion des contraintes et sur les lois de la statique qui traduisant les conditions d'équilibres des corps.

Lorsque le corps est soumis à un système de forces extérieures quelconques il répond par des interactions entre particules composant ce corps provoquant ainsi des forces internes et ce dans le but de maintenir ce dernier en équilibre aussi par des changements de la forme initiale de ce corps solide (variations relatives des dimensions). C'est précisément l'objet de la théorie d'élasticité pourvue que les déformations restent petites.

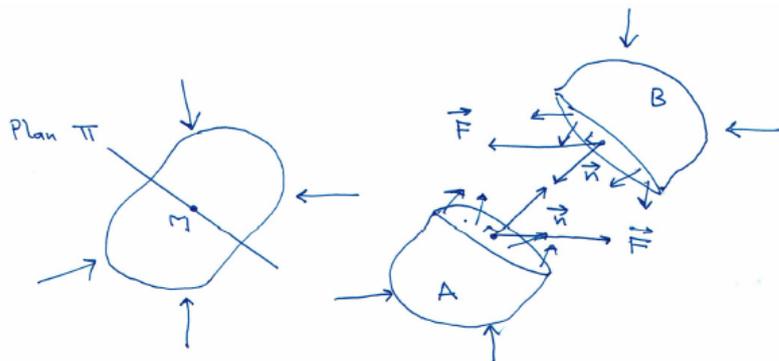
Afin de mise en évidence la notion de contrainte on utilise la méthode dite des sections ou de coupure.

### 2 Contraintes dans un solide :

#### 2-1 Forces internes :

Pour pouvoir étudier de plus près les forces intérieures provoquées par l'interaction des particules constituantes du corps solide et mise en évidence la notion des contraintes on utilise la méthode dite méthode de section ou méthode de coupure.

Considérons un corps solide vérifiant les hypothèses précédentes en équilibre sous l'action d'un système de forces extérieures quelconques, imaginons que l'on coupe en deux parties A et B par un plan  $\pi$  de surface S passant par le point M de normale  $\vec{n}$ .



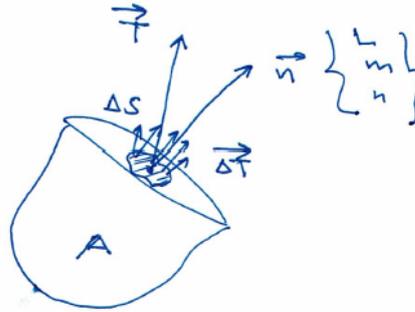
Forces internes sur une surface de coupure

Les deux parties doivent rester en équilibre après la coupure et les forces agissantes sur les surfaces S des deux parties doivent être égales et de signe opposé, elles dépendent du système de chargement extérieur et de l'orientation de la section S c.a.d de la normale  $\vec{n}$

$$\vec{F}(\vec{n}) = -\vec{F}(-\vec{n})$$

**2-2 Vecteur de contrainte :**

Isolant la partie A et étudiant les forces internes aux tours du point M. la petite surface  $\Delta S$  de la section S aux tours du point M ( $x_1, x_2, x_3$ ) a une distribution de force surfacique définie  $\overline{\Delta T}$ . Le vecteur unitaire  $\vec{n}$  perpendiculaire en M a cette section a comme cosinus directeurs  $L = \cos \alpha, m = \cos \beta, n = \cos \gamma$  avec  $\alpha, \beta, \gamma$  sont les angles formés par le vecteur  $\vec{v}$  respectivement avec les trois axes de référence  $OX_1, OX_2, OX_3$ , nous appelons cet ensemble la facette  $\vec{n}$  en M.



Soit  $\overline{\Delta T}$  la force agissante sur cet élément de surface  $\Delta S$ , la quantité :

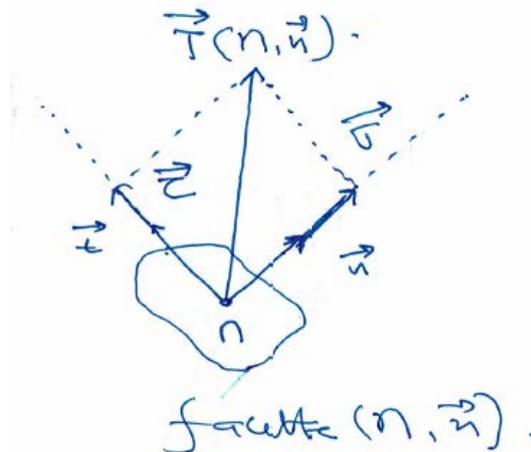
$$\vec{T} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta T}}{\Delta S} \quad \text{est dite vecteur de contrainte}$$

Donc le vecteur de contrainte  $\vec{T}$  dépend de six paramètres, les trois coordonnées  $x_1, x_2$  et  $x_3$  du point M et des trois cosinus directeurs du vecteur  $\vec{n}$ , L, m et n.

**3 Composantes du vecteur contrainte :**

Le vecteur contrainte  $\vec{T}$  peut être considéré comme la somme vectorielle de deux composantes :

- L'une normale au plan de la section considéré appelée contrainte normale  $\vec{\sigma}$
- Et l'autre localisée dans le plan de cette section est appelée contrainte tangentielle  $\vec{\tau}$



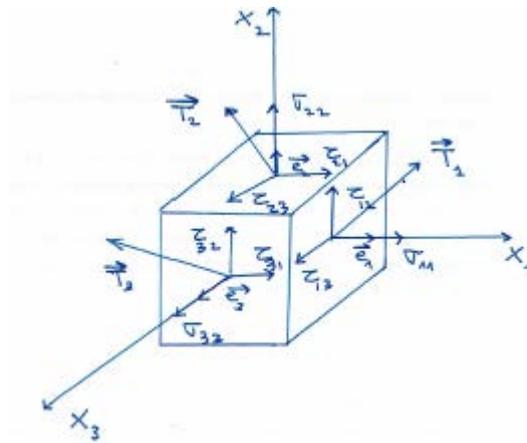
$$\vec{T} = \vec{\sigma} + \vec{\tau} = \sigma \cdot \vec{v} + \tau \cdot \vec{t}$$

$$\|\vec{T}\| = \sqrt{\|\vec{\sigma}\|^2 + \|\vec{\tau}\|^2}$$

#### 4- Etat de contraintes :

Normalement les contraintes au point M sont définies en déterminant l'ensemble des vecteurs contrainte de l'ensemble des facettes passant par ce point. En appelle état de contrainte au point M l'ensemble des contraintes correspondantes à tous les plans passant par ce point. L'état de contrainte en ce point est complètement déterminé si nous connaissons les contraintes sur trois plans perpendiculaires se coupant en ce point.

Imaginons le point M sous forme d'un élément cubique de trois plans orthogonaux de normales  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$  et  $\vec{T}_{e_1}$ ,  $\vec{T}_{e_2}$  et  $\vec{T}_{e_3}$  sont les trois vecteurs de contraintes associés respectivement à ces trois plans.



Vecteurs contraintes sur les facettes orthogonales  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$

La projection des trois vecteurs de contraintes associés aux les trois facettes selon les trois axes de références  $MX_1$ ,  $MX_2$  et  $MX_3$  donnent neuf composantes à savoir :

- La projection du vecteur  $\vec{T}_{e_1}$  selon les trois axes de référence donne :
  - $\sigma_{11}$  : Une contrainte normale à la facette  $\vec{e}_1$  (ou  $X_1$ ) dans la direction  $MX_1$
  - $\tau_{12}$  : Une contrainte tangentielle à la facette  $\vec{e}_1$  (ou  $X_1$ ) dans la direction  $MX_2$
  - $\tau_{13}$  : Une contrainte tangentielle à la facette  $\vec{e}_1$  (ou  $X_1$ ) dans la direction  $MX_3$
- La projection du vecteur  $\vec{T}_{e_2}$  selon les trois axes de référence donne :
  - $\tau_{21}$  : Une contrainte tangentielle à la facette  $\vec{e}_2$  (ou  $X_2$ ) dans la direction  $MX_1$
  - $\sigma_{22}$  : Une contrainte normale à la facette  $\vec{e}_2$  (ou  $X_2$ ) dans la direction  $MX_2$
  - $\tau_{23}$  : Une contrainte tangentielle à la facette  $\vec{e}_2$  (ou  $X_2$ ) dans la direction  $MX_3$
- La projection du vecteur  $\vec{T}_{e_3}$  selon les trois axes de référence donne :
  - $\tau_{31}$  : Une contrainte tangentielle à la facette  $\vec{e}_3$  (ou  $X_3$ ) dans la direction  $MX_1$
  - $\tau_{32}$  : Une contrainte tangentielle à la facette  $\vec{e}_3$  (ou  $X_3$ ) dans la direction  $MX_2$
  - $\sigma_{33}$  : Une contrainte normale à la facette  $\vec{e}_3$  (ou  $X_3$ ) dans la direction  $MX_3$

**Conventions et notations :**

- Pour les contraintes normales  $\sigma_{11} = \sigma_1$ ,  $\sigma_{22} = \sigma_2$ ,  $\sigma_{33} = \sigma_3$  l'indice 1, 2 et 3 indiquent la facette sur la quelle la contrainte est normale.
- Pour les contraintes tangentielles, les deux indices sont utilisés, le premier indique la facette et le deuxième indique la direction de la composante de la contrainte.

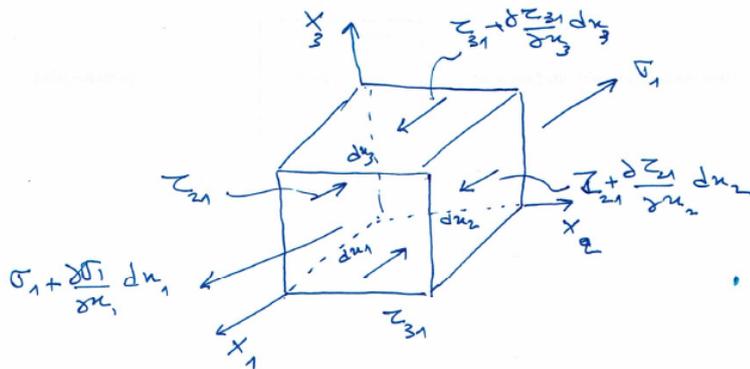
**5-Tenseur de contrainte :**

Les trois vecteurs de contraintes  $\vec{T}_{e_1}$ ,  $\vec{T}_{e_2}$  et  $\vec{T}_{e_3}$  projetés sur les trois axes de référence  $OX_1$ ,  $OX_2$  et  $OX_3$  donnent neuf composantes, ces derniers sont rangées sous forme d'une matrice de trois lignes et de trois colonnes appelée Tenseur qui veut dire matrice des tension ou bien tenseur de contraintes.

$$[\sigma]_{(M, X_1, X_2, X_3)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

**6-Théorème de réciprocité des contraintes tangentielles :**

Cherchant la condition d'équilibre en rotation par rapport aux trois plans  $X_1 X_2$ ,  $X_1 X_3$  et  $X_2 X_3$  aux tours des trois axes de référence respectivement  $MX_1$ ,  $MX_2$  et  $MX_3$  d'un point M sous forme d'un élément volumique très petit de volume  $dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$  soumis à un état de contrainte de cisaillement :



Pour le plan  $X_1 X_2$ :

$$(\tau_{12} \cdot dx_2 \cdot dx_3) \cdot \frac{dx_1}{2} = (\tau_{21} \cdot dx_1 \cdot dx_3) \cdot \frac{dx_2}{2}$$

$$\tau_{12} = \tau_{21}$$

Pour le plan  $X_1 X_3$ :

$$(\tau_{13} \cdot dx_2 \cdot dx_3) \cdot \frac{dx_1}{2} = (\tau_{31} \cdot dx_1 \cdot dx_2) \cdot \frac{dx_3}{2}$$

$$\tau_{13} = \tau_{31}$$

Pour le plan  $X_2X_3$  :

$$(\tau_{23} \cdot dx_1 \cdot dx_3) \cdot \frac{dx_2}{2} = (\tau_{32} \cdot dx_1 \cdot dx_2) \cdot \frac{dx_3}{2}$$

$$\tau_{23} = \tau_{32}$$

A cet effet le tenseur de contraintes en un point est symétrique

### 7-Vecteur contrainte sur un plan quelconque :

Soit le tenseur de contrainte  $[\sigma]_{(M, X_1, X_2, X_3)}$  au point M par rapport au repère de référence  $(M, X_1, X_2, X_3)$ , ce tenseur regroupe les trois vecteurs de contraintes agissant sur les trois facettes orthogonales  $MX_1$ ,  $MX_2$  et  $MX_3$  représentant ainsi l'état de contraintes en ce point.

A partir de ce tenseur de contraintes le calcul du vecteur contrainte  $\vec{T}$  au point M associé à une facette quelconque de normale  $\vec{v}$  de cosinus directeur L, m et n est possible, c'est la projection du tenseur contrainte sur la normale  $\vec{v}$  (formule de Cauchy) donné par :

$$\vec{T} = [\sigma] \cdot \vec{v}$$

$$\begin{Bmatrix} T_{x_1} \\ T_{x_2} \\ T_{x_3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} L \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

$$T_{x_1} = l \cdot \sigma_1 + m \cdot \sigma_{12} + n \cdot \sigma_{13}$$

$$T_{x_2} = l \cdot \sigma_{21} + m \cdot \sigma_2 + n \cdot \sigma_{23}$$

$$T_{x_3} = l \cdot \sigma_{31} + m \cdot \sigma_{32} + n \cdot \sigma_3$$

Ayant le vecteur contrainte on peut déterminer les deux composante de ce vecteur, la contrainte normale et la contrainte tangentielle de la facette  $\vec{v}$  :

$$\sigma = \overline{\vec{T}} \cdot \vec{v} = l \cdot T_{x_1} + m \cdot T_{x_2} + n \cdot T_{x_3}$$

$$\tau = \sqrt{\overline{T^2} - \sigma^2} \quad \text{ou} \quad \tau = \overline{\vec{T}} \cdot \vec{t}$$

### 8-Equation d'équilibre en translation :

Un corps est dit en équilibre si sous l'action des forces extérieures il est au repos (ou bien s'il est en mouvement suivant une ligne droite à vitesse constante).

Considérons un volume parallélépipédique  $dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3$  soumis en plus de la distribution des contraintes à une force de volume  $\vec{F}$  de composantes  $F_{x_1}$ ,  $F_{x_2}$  et  $F_{x_3}$ . L'élément est en équilibre en translation lorsque les résultantes des projections de toutes les forces selon chaque axe de référence sont nulles y compris les forces de volumes.

Ecrivons d'une façon détaillée la première équation d'équilibre en translation selon l'axe  $OX_1$  de toutes les forces qui agissent dans cette direction.

$$\left(\sigma_1 + \frac{d\sigma_1}{dx_1} dx_1\right) dx_2 \cdot dx_3 - (\sigma_1) dx_2 \cdot dx_3 + \left(\sigma_{21} + \frac{d\sigma_{21}}{dx_2} dx_2\right) dx_1 \cdot dx_3 - (\sigma_{21}) dx_1 \cdot dx_3 \\ + \left(\sigma_{31} + \frac{d\sigma_{31}}{dx_3} dx_3\right) dx_1 \cdot dx_2 - (\sigma_{31}) dx_1 \cdot dx_2 + F_{x_1} \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 = 0$$

Ce qui donne après simplification la première équation d'équilibre en translation dans la direction  $OX_1$ .

$$\left(\frac{d\sigma_1}{dx_1}\right) + \left(\frac{d\sigma_{21}}{dx_2}\right) + \left(\frac{d\sigma_{31}}{dx_3}\right) + F_{x_1} = 0$$

On obtient encore deux équations de la même manière selon les deux autres directions  $OX_2$  et  $OX_3$ , l'ensemble de ces trois équations aux dérivées partielles traduisent l'équilibre en point M selon les trois directions :

$$\left(\frac{d\sigma_1}{dx_1}\right) + \left(\frac{d\sigma_{21}}{dx_2}\right) + \left(\frac{d\sigma_{31}}{dx_3}\right) + F_{x_1} = 0$$

$$\left(\frac{d\sigma_{12}}{dx_1}\right) + \left(\frac{d\sigma_2}{dx_2}\right) + \left(\frac{d\sigma_{32}}{dx_3}\right) + F_{x_2} = 0$$

$$\left(\frac{d\sigma_{13}}{dx_1}\right) + \left(\frac{d\sigma_{23}}{dx_2}\right) + \left(\frac{d\sigma_3}{dx_3}\right) + F_{x_3} = 0$$

Ces équation aux dérivées partielles qui doivent être satisfaites en tous points intérieur du solide sont appelées « équations d'équilibre local en translation » ou équations de NAVIER, condensant ces dernière sous la forme d'une équation vectorielle unique :

$$\overrightarrow{div} [\sigma] + \vec{F} = 0$$

### 9-Conditions aux limites (conditions à la surface) :

Les conditions à la surface des corps solides sont deux types, les conditions aux limites à caractère cinématique c-à-d relatif aux déplacements, et les conditions aux limites à caractère statique c-à-d relatif aux forces et contraintes. Ces derniers traduisent le fait que les contraintes sont des fonctions continues du l'intérieur du solide jusqu'à ces frontières ou règnent les forces extérieures, ces forces doivent être compatible avec les expressions des contraintes frontières dues aux forces extérieures.

Considérons un point M de coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  très proche de la surface d'un solide, découpons un tétraèdre élémentaire de centre M de tel sorte que son plan oblique ABC de surface dS soit tangent à la surface extérieure définie par son vecteur unitaire normal  $\vec{v}$  de cosinus directeurs L, m, n. sur la surface dS règne une force  $\vec{q}$  de composantes  $q_{x1}, q_{x2}$  et  $q_{x3}$

Les équations d'équilibre de tétraèdre en M donnent :

$$q_{x1} = T_{x_1} = l. \sigma_1 + m. \sigma_{12} + n. \sigma_{13}$$

$$q_{x2} = T_{x_2} = l. \sigma_{21} + m. \sigma_2 + n. \sigma_{23}$$

$$q_{x3} = T_{x_3} = l. \sigma_{31} + m. \sigma_{32} + n. \sigma_3$$

$$\vec{q} = [\sigma]. \vec{v}$$

Ces équations expriment les équations d'équilibre statique en surface, elles sont appelées les équations de conditions aux limites elles sont vérifiées pour chaque points de la surface du corps.

### 10-Contraintes principales et axes principaux :

Un tenseur de contrainte décrit l'état de contrainte en un point par rapport à un repère quelconque par six composantes de contraintes, trois contraintes normales et trois contraintes tangentielles, il existe un autre repère ou les contraintes tangentielles  $\tau_{ij}$  soient nulles. ce type de repère est dit repère principale et les contraintes normales correspondantes sont dites contraintes principales.

Ces contraintes principales sont la résolution de l'équation caractéristique du troisième degré suivante :

$$\det[\sigma] - \lambda[I] = 0$$

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

$[\sigma]$  : tenseur des contraintes

$[I]$  : matrice identité

$\lambda$  : va leur propre cherchée correspondantes à la contrainte principale

La résolution de cette équation de troisième degré donne trois solution sont les trois valeurs propres correspondantes aux trois contraintes principales  $\sigma_I, \sigma_{II}$  et  $\sigma_{III}$  avec  $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$  :

$$\sigma_I = \lambda_{\max}$$

$$\sigma_{II} = \lambda_{\text{médiane}}$$

$$\sigma_{III} = \lambda_{\min}$$

$I_1$  : invariant linéaire =  $\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$

$I_{II}$  : invariant quadratique =  $\sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II} \sigma_{III} + \sigma_I \sigma_{III} = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \tau_{12}^2 - \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2$

$I_{III}$  : invariant cubique =  $\sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III} = \det[\sigma]$

Portons les valeurs de ces contraintes principales  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  et  $\sigma_{III}$  dans le système d'équation :

$$\det|[\sigma] - \lambda[I]| = 0$$

$$([\sigma] - \sigma_i[I]) \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0 \quad \text{avec } i=I, II, III$$

Et tenons compte de  $L^2 + m^2 + n^2 = 1$ , et à partir de trois équations indépendantes on trouve trois directions principales associées à chaque contrainte principale.

### 11-Ellipsoïde de contraintes

Soit  $[\sigma]$  le tenseur des contraintes principales exprimé par rapport au repère principale  $(M, x_I, x_{II}, x_{III})$  les contraintes principales associées à ce repère sont  $\sigma_I, \sigma_{II}$  et  $\sigma_{III}$ . les composantes du vecteur contrainte  $\vec{T}$  de la facette  $\vec{v}$  de cosinus directeur  $L, m, n$  sont :

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} T_{x1} \\ T_{x2} \\ T_{x3} \end{pmatrix} = [\sigma] \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L \\ m \\ n \end{pmatrix}$$

$$T_{x1} = \sigma_I \cdot L$$

$$T_{x2} = \sigma_{II} \cdot m$$

$$T_{x3} = \sigma_{III} \cdot n$$

Et vu que  $\vec{v}$  est un vecteur unitaire on a :  $L^2 + m^2 + n^2 = 1$

Alors :

$$\frac{T_{x1}^2}{\sigma_I^2} + \frac{T_{x2}^2}{\sigma_{II}^2} + \frac{T_{x3}^2}{\sigma_{III}^2} = 1$$

Cette équation est appelée ellipsoïde de LAME, elle représente l'équation d'un ellipsoïde centré dont le repère principale de demi-axes les contraintes principales  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ .

Si  $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} = \sigma$  l'équation devient :

$$T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 = \sigma^2$$

Cette équation représente une sphère, elle représente un état de contraintes hydrostatique.

## 12-Tenseur déviateur et tenseur sphérique :

En peut décomposer le tenseur de contraintes au point M en tenseur sphérique et en tenseur déviateur selon :

$$[\sigma] = [S] + [D]$$

Avec :

$$[S] = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \text{ et } [D] = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2 - \sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3 - \sigma_m \end{bmatrix}$$

[S] : Tenseur sphérique traduit l'effet des contraintes normales (traction ou compression) uniquement, il est responsable des variations de volume.

[D] : Tenseur déviateur caractérise l'effet de cisaillement uniquement, il est responsable des déformations angulaires.

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3} \quad \text{est la contrainte moyenne}$$

## 13-Cercles de Mohr de contraintes :

### 13-1-Cercles de Mohr de contraintes dans le plan:

En un point M prenons comme repère, le repère principal (M,  $\vec{n}_I$ ,  $\vec{n}_{II}$ ) et  $[\bar{\sigma}]$  le tenseur des contraintes principales dont  $\sigma_I$  et  $\sigma_{II}$  sont ces contraintes principales selon les deux directions principales respectivement  $\vec{n}_I$  et  $\vec{n}_{II}$ . Soit  $\vec{T}$  le vecteur contrainte situé dans le plan de facette  $\vec{v}$  passant par le point M de cosinus directeur  $L = \cos\theta$  et  $m = \sin\theta$  avec  $\vec{t}$  le vecteur unitaire situé dans le même plan tangent à cette facette et faisant un angle de  $\pi/2$  avec  $\vec{v}$ , avec  $\vec{v} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix}$  et  $\vec{t} = \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix}$

Sachant que :

$$\sigma = \vec{T} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{T} = \vec{v} \cdot [\sigma] \cdot \vec{v} = \{v\}^t [\sigma] \{v\} = \sigma_I \cos^2\theta + \sigma_{II} \sin^2\theta$$

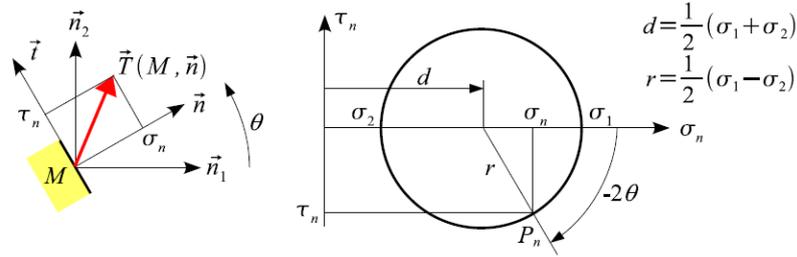
$$\tau = \vec{T} \cdot \vec{t} = \vec{t} \cdot \vec{T} = \vec{t} \cdot [\sigma] \cdot \vec{v} = \{t\}^t [\sigma] \{v\} = -\sigma_I \sin\theta \cos\theta + \sigma_{II} \sin\theta \cos\theta$$

En utilisant les relations trigonométriques

$$\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)/2 ; \sin^2\theta = (1 - \cos 2\theta)/2 ; \sin 2\theta = 2 \cos\theta \sin\theta ; \cos\theta = \cos(-\theta) ; \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\sigma = \sigma_I (1 + \cos 2\theta)/2 + \sigma_{II} (1 - \cos 2\theta)/2 = 1/2 (\sigma_I + \sigma_{II}) + 1/2 (\sigma_I - \sigma_{II}) \cos(-2\theta)$$

$$\tau = -\sigma_I \sin 2\theta / 2 + \sigma_{II} \sin 2\theta / 2 = -\sigma_I \sin 2\theta / 2 - \sigma_{II} \sin 2\theta / 2 = 1/2 (\sigma_I - \sigma_{II}) \sin 2\theta$$



La contrainte normale et contrainte tangentielle peuvent être formulées sous :

$$\sigma = d + r \cdot \cos(-2\theta)$$

$$\tau = r \cdot \sin(-2\theta)$$

Avec  $d = \frac{1}{2}(\sigma_I + \sigma_{II})$  et  $r = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{II})$

$$\sigma - d = r \cdot \cos(-2\theta)$$

$$\tau = r \cdot \sin(-2\theta)$$

A partir de ces deux équations on peut formuler l'équation du cercle Mohr dans le repère  $(\sigma, \tau)$  dit repère de Mohr de rayon r et d'un centre O de coordonnée  $(d, 0)$  :

$$(\sigma - d)^2 + \tau^2 = r^2$$

A chaque facette  $\vec{v}$ , nous pouvons donc associer un point P de coordonnées  $(\sigma_p, \tau_p)$  dans le repère orthonormé  $(\sigma, \tau)$  ou **plan de Mohr**. Lorsque l'angle  $\theta$  varie le point P décrit un cercle de centre O(d,0) et de rayon r dit cercle de Mohr.

- Les points représentatifs des deux directions principales  $\vec{n}_1$  et  $\vec{n}_2$  sont respectivement les deux intersections du cercle de Mohr avec l'axe des abscisses (axe des contraintes normales)  $\sigma_I$  et  $\sigma_{II}$ .
- Si la facette  $\vec{v}$  fait un angle de  $\theta$  avec la direction principale  $\vec{n}_1$ , son point représentatif sur cercle du Mohr fait un angle de  $-2\theta$  avec le point représentatif de la facette  $\vec{n}_1$  (par convention le sens positif est le sens inverse des aiguilles de la montre).

### 13-2-Cercles de Mohr de contraintes en trois dimensions :

Soit  $\vec{T}$  le vecteur contrainte de la facette  $\vec{v}$  de cosinus directeur  $(L, m, n)$  par rapport au repère principale  $(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$  dont les contraintes principales sont  $\sigma_I, \sigma_{II}$  et  $\sigma_{III}$

Connaissions déjà les relations :

$$\sigma = \vec{T} \cdot \vec{v} = l^2 \cdot \sigma_I + m^2 \cdot \sigma_{II} + n^2 \cdot \sigma_{III}$$

$$\tau^2 = \vec{T}^2 - \sigma^2 = l^2 \sigma_I^2 + m^2 \sigma_{II}^2 + n^2 \sigma_{III}^2$$

$$L^2 + m^2 + n^2 = 1$$

Les inconnus de ces trois équations sont L, m et n :

$$l^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_{II} - \sigma)(\sigma_{III} - \sigma)}{(\sigma_{II} - \sigma_I)(\sigma_{III} - \sigma_I)}$$

$$m^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_{III} - \sigma)(\sigma_I - \sigma)}{(\sigma_I - \sigma_{II})(\sigma_{III} - \sigma_{II})}$$

$$n^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_I - \sigma)(\sigma_{II} - \sigma)}{(\sigma_I - \sigma_{III})(\sigma_{II} - \sigma_{III})}$$

A partir de ces trois équations on peut tracer trois cercles principales de Mohr représentant géométriquement les contraintes dans l'espace  $(\sigma, \tau)$  et ce dans les trois plans principaux  $(\vec{n}_2, \vec{n}_3)$ ,  $(\vec{n}_3, \vec{n}_1)$  et  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$  :

1- Le cercle C1 représenté dans le plan  $(\vec{n}_2, \vec{n}_3)$  d'équation :

$$\left[\sigma - \left(\frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2}\right)\right]^2 + \tau^2 = \left[\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right]^2$$

A comme centre  $O_1\left(\left(\frac{\sigma_{II} + \sigma_{III}}{2}\right), 0\right)$  et de rayon  $r_1 = \left[\frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}\right]$  avec  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$  ( $L=0$ )

2- Le cercle C2 représenté dans le plan  $(\vec{n}_3, \vec{n}_1)$  d'équation :

$$\left[\sigma - \left(\frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}\right)\right]^2 + \tau^2 = \left[\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\right]^2$$

A comme centre  $O_2\left(\left(\frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}\right), 0\right)$  et de rayon  $r_2 = \left[\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2}\right]$  avec  $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$  ( $m=0$ )

3- Le cercle C3 représenté dans le plan  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$  d'équation :

$$\left[\sigma - \left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\right)\right]^2 + \tau^2 = \left[\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right]^2$$

A comme centre  $O_3\left(\left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}\right), 0\right)$  et de rayon  $r_3 = \left[\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}\right]$  avec  $\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$  ( $n=0$ )

Les contraintes de cisaillement maximum relative à chaque cercle égale au rayon de chacun de ces cercles :

$$\tau_{\max 23} = \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2} \quad L=0 \text{ et } m=n=\pm\sqrt{2}/2 \text{ et } \gamma=\beta=\pm 45$$

$$\tau_{\max 13} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \quad m=0 \text{ et } L=n=\pm\sqrt{2}/2 \text{ et } \alpha=\gamma=\pm 45$$

$$\tau_{\max 12} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \quad n=0 \text{ et } m=L=\pm\sqrt{2}/2 \text{ et } \alpha=\beta=\pm 45$$

avec  $\tau_{\max} = \tau_{\max 13}$

Et la valeur maximal des contraintes normales :  $\sigma_{\max} = \max(|\sigma_I|, |\sigma_{II}|, |\sigma_{III}|)$

