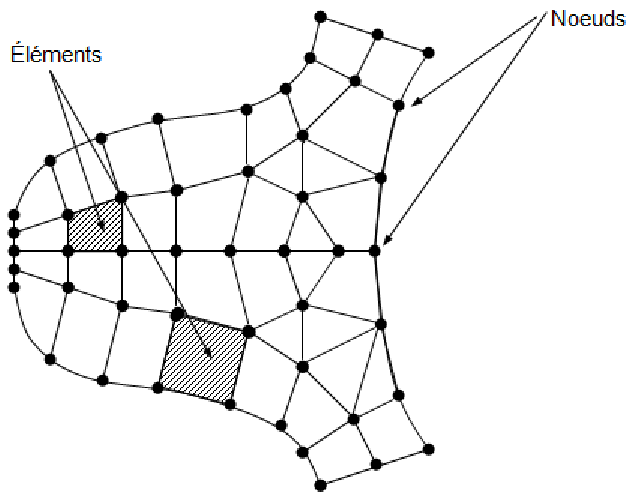
Chapitre 01: Introduction

1.1 Introduction

La méthode des éléments finis (M.E.F.) est un des outils les plus efficaces et les plus généraux pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : aérospatial, automobile, génie civil, construction navale, mécanique, etc…

Dans le domaine du calcul des structures, la M.E.F. est une technique à caractère pluridisciplinaire qui met en œuvre des connaissances relevant de plusieurs disciplines de base telles que la mécanique des structures, l'analyse numérique et l'informatique appliquée.
La M.E.F est basée sur **une décomposition du domaine (discrétisation)** dans lequel on désire effectuer la simulation en sous-domaines de forme géométrique simple appelés '**éléments finis**' pour lesquels on procède à des approximations nodales des champs de déplacements ou de contraintes qui prennent en général la forme de fonctions polynomiales. L'ensemble de ces éléments constitue ce que l'on appelle le maillage du domaine. Ces éléments sont liés par un nombre fini de conditions de continuité, exprimées en certains points communs à plusieurs éléments appelés 'nœuds'.



Discrétisation d'une structure en nœuds et éléments

Ce sont les méthodes classiques du calcul des structures, **méthode des déplacements** et **méthodes des forces**, qui sont à la base de la M.E.F. Selon que l'on approxime le champ des contraintes ou le champ des déplacements on crée le modèle contrainte ou le modèle déplacement. Le modèle déplacement semble plus commode à mettre en œuvre car il s'adapte généralement mieux aux problèmes de calcul des structures et sera adopté dans ce qui suit.

Dans la méthode des déplacements, la formulation du problème est faite en fonction des déplacements aux nœuds qui sont les inconnues. La structure est discrétisée en éléments finis et les équations sont décrites sous forme matricielle par :

$$\{F\} = [K]\{U\}$$

Avec :

$\{F\}$: Le vecteur des forces nodales.

$[K]$: Matrice de rigidité

$\{U\}$: Vecteur des déplacements nodaux

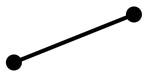
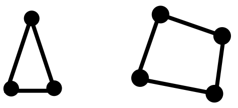
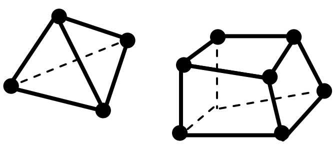
Le calcul est conduit suivant deux niveaux de formulation : élémentaire au niveau de l'élément finis et globale au niveau de la structure complète.

1.2 Discrétisation de la structure en éléments finis

C'est l'ensemble des opérations à effectuer pour établir le modèle mathématique de calculs représentant au mieux la structure réelle. Pratiquement cette idéalisation consiste du point de vue topologique, à décomposer la structure en éléments finis de géométrie simple.

La Méthode des Eléments Finis a développé une série de types d'éléments finis qui, peuvent être classifiés en :

- éléments finis unidimensionnels (généralement des barres ou des poutres)
- éléments finis bidimensionnels (plaques).
- éléments finis tridimensionnels (blocs massifs).

Eléments	
unidimensionnels	
bidimensionnels	
tridimensionnels	

2. Démarche de formulation en éléments finis

L'analyse des structures peut s'effectuer en considérant d'abord le comportement de chaque partie (élément finis) indépendamment puis en assemblant ces parties de telle façon que l'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements soient satisfaits en chaque nœud.

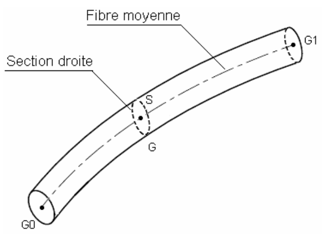
L'analyse de ces structures se faite selon la méthodologie suivante :

1. Discrétisation de la structure à étudier en éléments finis.
2. Formulation des éléments en écrivant les équations entre les variables connus ou inconnus du système (vecteur force, vecteur déplacement et calcul la matrice de rigidité pour chaque élément).
3. Formulation intégrale : assemblage des éléments (vecteur force, vecteur déplacement et calcul la matrice de rigidité de la structure).
4. Résoudre les équations obtenues en introduisant les conditions aux limites.
5. Calculs de restitution aux niveaux élémentaires : calcul des déplacements, des efforts, et des contraintes au niveau de chaque élément.

Chapitre 02: Analyse des structures formées des éléments finis unidimensionnelles

1. Introduction :

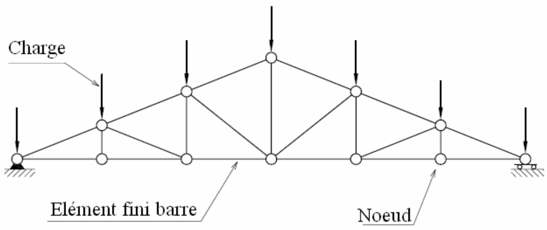
Un grand nombre de structures sont composées d'une réunion d'éléments unidimensionnels **élément barre** ou **élément poutres** reliées entre elle par des **nœuds**, pour **la modélisation de ces structures** il est nécessaire d'introduire les caractéristiques géométriques de la section courante de l'élément finis (langueur, aire, module d'inertie, etc.). Les efforts appliqués à l'élément sont schématisés comme charges ponctuelles ou charges réparties le long de la fibre moyenne et les sollicitations résultantes sont affectées aux nœuds de chaque élément.



Schématisation d'une poutre

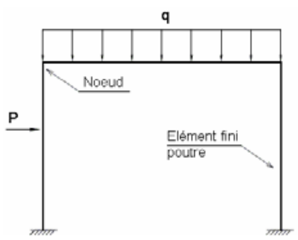
Ces structures sont composées de deux types :

- **Treillis plans ou tridimensionnels** obtenus par assemblage de **barres articulées** aux extrémités. Les éléments d'un treillis ne travaillent qu'en **traction ou compression**. Ils sont modélisés par des éléments finis **de type barres**.



Discrétisation en éléments finis d'un treillis plan

- **Portiques plans ou tridimensionnels** obtenus par un assemblage d'éléments de poutres droites. Ces éléments travaillent en flexion, traction et torsion. Ils sont modélisés par des éléments finis **de type poutres**.



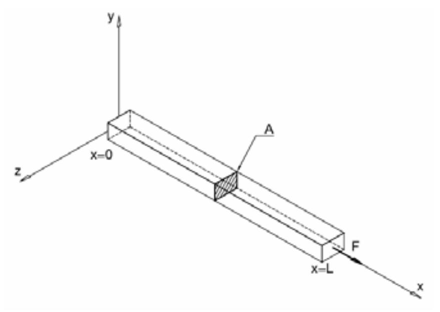
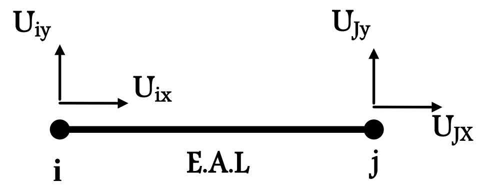
Discrétisation en éléments finis d'un portique plan

2 structures planes formées d'élément barre articulé (les treillis)

2-1. Définition

Elles sont constituées par des assemblages de barres liées par des joints (articulations) de telle sorte que le chargement extérieur **soit repris uniquement par des forces axiales** (traction ou compression) dans les barres.

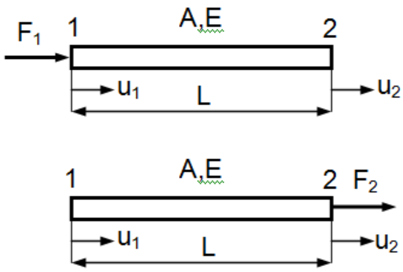
Géométriquement une barre correspond à un solide orienté dans la direction x (repère local). Les dimensions dans le plan (y-z) normal à x sont relativement petites par rapport à la dimension longitudinale. C'est généralement un élément à 2 nœuds, qui comporte 2 inconnues ou degrés de liberté (d.d.l.) par nœud représentant les composantes de son déplacement dans le plan.

	
Géométrie d'un élément barre	Elément finis unidimensionnel type barre

2-2. Matrice de rigidité d'un élément barre

2-2-1 Méthode directe (méthode de rigidité)

Cette méthode est basée sur le concept d'analyse de la rigidité de l'élément barre. On considère un élément de barre uniforme et élastique, de **longueur L**, de module élastique **E** et de section transversale **A**. Un nœud est localisé à chacune des extrémités de la barre. On applique d'abord une force axiale au premier nœud, ensuite une deuxième force au deuxième nœud, les seuls déplacements qui sont permis sont les déplacements axiaux. Dans chaque cas, on écrit l'équation reliant la force appliquée aux déplacements axiaux induits.



Déplacements nodaux associées aux forces nodales pour un élément barre

Relions les déplacements axiaux des deux nœuds aux forces appliquées à partir de la formule élémentaire de la Résistance des matériaux

$$F_1 = \frac{EA}{L}\Delta L_1$$

Avec $\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{L}}$ représente la rigidité axiale de l'élément barre et ΔL_1 est le déplacement net du nœud 1 donc :

$$\mathrm{F_1 = \frac{EA}{L}(U_1 - U_2) = \frac{EA}{L}U_1 - \frac{EA}{L}U_2}$$

La même chose pour le nœud 2

$\mathrm{F_2 = \frac{EA}{L}\Delta L_2}$, avec ΔL_2 est le déplacement net du nœud 2

$$\mathrm{F_2 = \frac{EA}{L}(U_2 - U_1) = -\frac{EA}{L}U_1 + \frac{EA}{L}U_2}$$

On a deux équations en fonction des deux degrés de liberté (inconnus) U_1 et U_2

$$\mathrm{F_1 = \frac{EA}{L}U_1 - \frac{EA}{L}U_2}$$

$$\mathrm{F_2 = -\frac{EA}{L}U_1 + \frac{EA}{L}U_2}$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = k. \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

Avec k est la rigidité axiale de l'élément barre.

Ou sous forme compacte :

$$\{\overline{F}\} = [\overline{K}]\{\overline{U}\}$$

$\{\overline{F}\}$: Le vecteur des forces nodales dans le repère local de l'élément

$[\overline{K}]$: La matrice de rigidité de l'élément barre dans le repère local

$\{\overline{U}\}$: Le vecteur des déplacements nodaux dans le repère local

2-2-2 Procédure formelle

La méthode directe présentée ci-dessus ne peut fournir une expression de la matrice de rigidité que pour les cas très simples, là où les formules dérivées de la Résistance des matériaux fournissent des relations de calcul entre les déplacements nodaux et les forces nodales.

En générale, on doit trouver une formule de la matrice de rigidité [K] valable pour n'importe quel type d'élément.

Pour cette méthode la matrice de rigidité de l'élément exprimée dans **le repère local** est déduite de **l'énergie de déformation de l'élément** est exprimée par :

$$[\overline{K}] = \int_V [B]^T \cdot [E] \cdot [B] dV$$

Où :

[B] : matrice déformation-déplacement reliant les déformations ε de l'élément à ses Déplacements nodaux U.

[E] : matrice des propriétés du matériau (matrice d'élasticité)

dv : incrément de l'élément de volume V.

Cette équation peut être déduite du point de vue énergétique, en affirmant que **le travail T_{ext}** réalisé par les forces nodales qui sont appliquées pour créer **des déplacements nodaux** est emmagasiné dans l'élément comme énergie de déformation élastique **($T_{ext} = E_{def}$).**

Pour obtenir la matrice **[B]** pour l'élément de barre articulée, on commence par écrire l'expression du déplacement axial **U(x)** à un point arbitraire de la barre, et ce en utilisant une **approximation nodale de type lagrange à 2 points.**

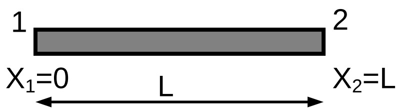
Pour une approximation nodale de type lagrange à 'n' points :

$$u(x) = N_1(x).U_1 + N_2(x).U_2 + ... + N_n(x)U_n$$

$$N_i(x) = \prod_{j=1, i \neq j}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

N(x) : sont des fonctions de forme ou d'interpolation (polynômes de Lagrange).

Pour le cas d'un élément unidimensionnel linéaire à deux points (deux nœuds) d'une langueur L



$$u(x) = N_1(x).U_1 + N_2(x).U_2$$

Avec :

$$N_1(x) = \frac{L - x}{L}$$

$$N_2(x) = \frac{x}{L}$$

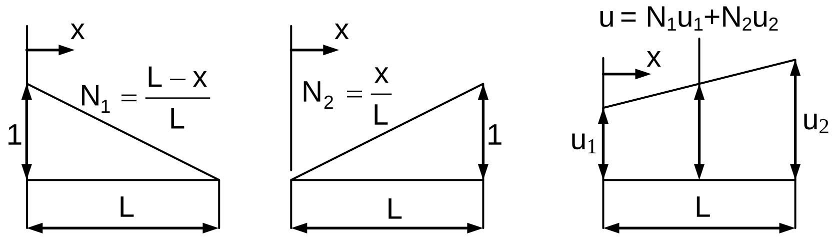
$$u(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{L-x}{L} & \dfrac{x}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{U\}$$

[N] : matrice des fonctions de forme

{U} : vecteur des déplacements nodaux

Chaque fonction de forme décrit comment varie « u » avec la distance x, lorsque le degré de liberté correspondant u_i est égal à 1 tandis que l'autre est égal à 0, c'est-à-dire :

- pour x = 0, $N_1(0) = \frac{L-0}{L}$ = 1 et $N_2(0) = \frac{0}{L}$ = 0 ;
- pour x = L, $N_1(L) = \frac{L-L}{L}$ = 0 et $N_2(L) = \frac{L}{L}$ = 1.



Les fonctions de forme pour un élément de barre à deux nœuds

La déformation axiale $\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \left[\frac{d}{dx}N\right]\cdot\{U\} = [B]\cdot\{U\} = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}\right]\cdot\{U\}$

Donc:

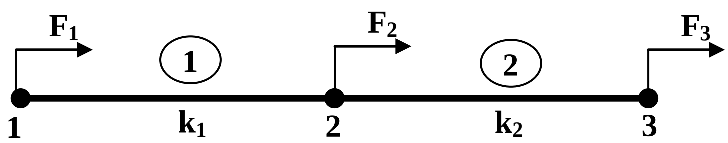
$$[K] = \int_V [B]^T \cdot [E]\cdot[B]\, dV = \int_0^L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot E \cdot \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}\right] \cdot A\,dx = \frac{EA}{L}\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

Avec k est la rigidité axiale de l'élément barre.

2-3. Matrice de rigidité pour une réunion d'élément barre :

Soit une structure composée de l'assemblage de deux éléments barre de rigidité axiale k_1 et k_2 soumise à un vecteur force nodales et axiales de composantes F_1, F_2 et F_3 selon la figure ci-dessous :



Assemblage de deux éléments

Les seuls déplacements qui sont permis sont les déplacements axiaux, à cet effet chaque nœud a un seul degré de liberté

- **L'élément 1 :**

  Cet élément a une rigidité axiale k_1 et deux degré de liberté U_1 et U_2 associés aux deux nœuds respectivement 1 et 2, la relation force déplacement de cet élément est :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = k_1 . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

- **L'élément 2 :**

  Cet élément a une rigidité axiale k_2 et deux degré de liberté U_2 et U_3 associés aux deux nœuds respectivement 2 et 3, la relation force déplacement de cet élément est :

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = k_2 . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

On peut écrire ces deux formulations des deux éléments en fonction des trois nœuds 1, 2 et 3 :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

Cet assemblage composé de ces deux éléments est soumis a un vecteur force nodale de trois composantes F_1, F_2 et F_3 a trois degrés de liberté U_1, U_2 et U_3 la relation reliant les forces aux déplacements est :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

Ou sous forme plus compacte :

$$\{F\} = [K]\{U\}$$

Avec :

$\{F\}$: Le vecteur des forces nodales des deux éléments.

$[K]$: Matrice de rigidité des deux éléments

$\{U\}$: Vecteur des déplacements nodaux des deux éléments

Contribution des rigidités des éléments dans la matrice de rigidité globale :

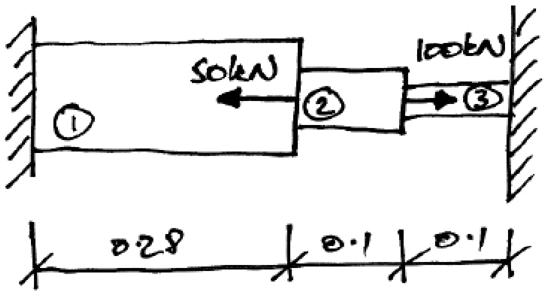
	Nœud 1	Nœud 2	Nœud 3
Nœud 1	k_1	$-k_1$	0
Nœud 2	$-k_1$	$k_1 + k_2$	$-k_2$
Nœud 3	0	$-k_2$	k_2

Nous constatons des zéros au niveau des cases ou les nœuds ne sont pas connectés entre eux

Exercices d'applications :

Exercice 01 :

Soit la structure composée de trois éléments soumise à un système de force axial comme motionné ci-dessous



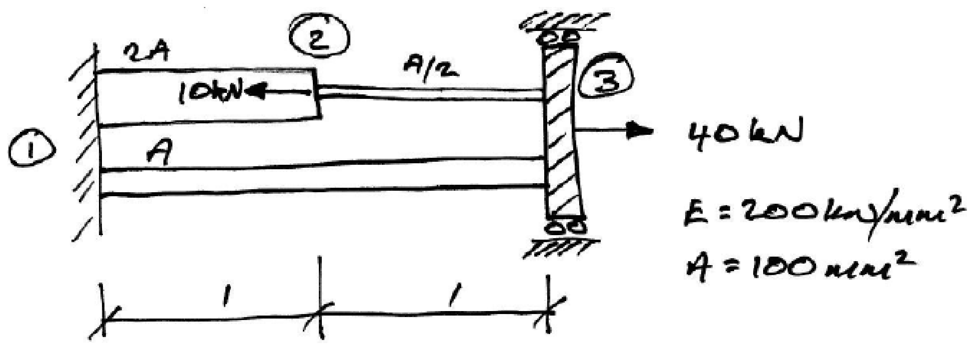
Caractéristiques des éléments :

Eléments	Langueur (m)	Section (mm^2)	Module de young $E(kN/mm^2)$
1	0.28	400	70
2	0.1	200	100
3	0.1	70	200

Questions:
1- Calculer les matrices de rigidité des éléments
2- Calculer la matrice de rigidité de la structure.
3- Introduire les conditions aux limites
4- Determiner les déplacements nodaux
5- Déterminer les forces aux niveaux des éléments
6- Déduire les contraintes aux niveaux des éléments
7- Déduire les réactions

Exercice 02 :

Soit la structure composée de trois éléments soumise à un système de force axial comme motionné ci-dessous



Questions:
1- Calculer les matrices de rigidité des éléments
2- Calculer la matrice de rigidité de la structure.
3- Introduire les conditions aux limites
4- Determiner les déplacements nodaux
5- Déterminer les forces aux niveaux des éléments
6- Déduire les contraintes aux niveaux des éléments
7- Déduire les réactions

2-4 structures planes à treillis :

Les barres composant les structures planes à treillis ont deux degrés de liberté par nœud, elles subissent deux déplacements à leurs extrémités, une composante horizontale et une autre verticale, a cet effet la matrices de rigidité élémentaire d'une barre bidimensionnelle devient une matrice d'ordre 4x4 puisque le vecteur déplacement nodaux devient d'ordre 4 :

$$\{\overline{U}\} = \begin{Bmatrix} \overline{U}_{ix} \\ \overline{U}_{iy} \\ \overline{U}_{jx} \\ \overline{U}_{iy} \end{Bmatrix}$$

Cependant seul le déplacement axial donne naissance à une force axiale, c'est-à-dire toutes les composantes de la matrice de rigidité associées à la composante verticale du déplacement sont nulles.

$$[\overline{K}] = \frac{E.A}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette expression est valable dans système d'axe confondu avec l'axe longitudinal de l'élément barre, dans la pratique l'élément barre peut être incliné par rapport aux axes de référence (repère globale) :

- U_x et U_y sont les déplacements nodaux dans le système de référence global
- $\overline{U}_x$ et $\overline{U}_y$ sont les déplacements nodaux dans le système de référence local
- θ et l'angle entre l'axe des abscisses du repère local $\overline{ox}$ et l'axe des abscisses du repère global ox

On utilise la matrice du changement du repère $[R]$ pour passer de la formulation locale à la formulation globale avec :

$[R]=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c & s\\ -s & c\end{bmatrix}$: Matrice de transformation pour un élément bidimensionnel (est une matrice orthogonale $[R].[R]^T=[R]^T.[R]=[I]$).

A cet effet on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix}\overline{U}_{ix}\\ \overline{U}_{iy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c & s\\ -s & c\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}U_{ix}\\ U_{iy}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}\overline{U}_{jx}\\ \overline{U}_{jy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c & s\\ -s & c\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}U_{jx}\\ U_{jy}\end{Bmatrix}$$

Pour la totalité des déplacements :

$$\begin{Bmatrix}\overline{U}_{ix}\\ \overline{U}_{iy}\\ \overline{U}_{jx}\\ \overline{U}_{jy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}c & s & 0 & 0\\ -s & c & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & s\\ 0 & 0 & -s & c\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}U_{ix}\\ U_{iy}\\ U_{jx}\\ U_{jy}\end{Bmatrix}$$

Soit :

$$\{\overline{U}\}=[R].\{U\}$$

Il reste maintenant de relier les deux vecteurs force nodal et vecteur délacement nodal exprimé dans le repère global, on a :

$$\begin{Bmatrix}\overline{F}_{ix}\\ \overline{F}_{iy}\\ \overline{F}_{jx}\\ \overline{F}_{jy}\end{Bmatrix}=\frac{E.A}{L}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.\begin{Bmatrix}\overline{U}_{ix}\\ \overline{U}_{iy}\\ \overline{U}_{jx}\\ \overline{U}_{jy}\end{Bmatrix}$$

$$\{\overline{F}\}=[\overline{K}].\{\overline{U}\}$$

$$\{\overline{F}\}=[R].\{F\}$$

$$\{F\}=[R]^T.\{\overline{F}\}=[R]^T.[\overline{K}].\{\overline{U}\}=[R]^T.[\overline{K}].[R].\{U\}$$

$$\{F\}=[K].\{U\}$$

Avec :

$[K]=[R]^T.[\overline{K}].[R]$: matrice de rigidité d'un élément barre exprimée dans le repère global

$[\overline{K}]$: matrice de rigidité d'un élément barre exprimée dans le repère local

$[R]$: matrice de passage d'un élément bidimensionnel.

$$[K]=\begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}.\frac{E.A}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

$$[K]=\frac{E.A}{L}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix}$$

Avec :

$$[K_{11}]=[K_{22}]=\frac{E.A}{L}.\begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix}$$

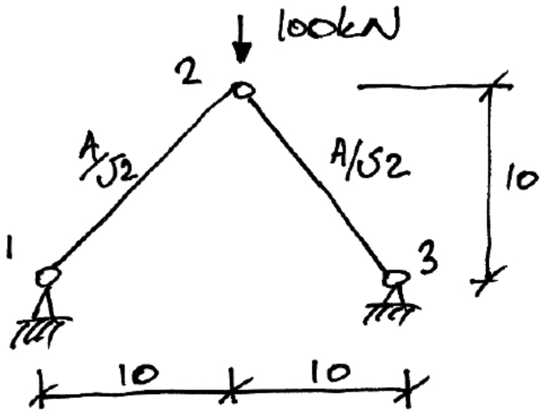
$$[K_{12}]=[K_{21}]=-[K_{11}]=\frac{E.A}{L}.\begin{bmatrix} -c^2 & -cs \\ -cs & -s^2 \end{bmatrix}$$

Exercice d'application :

Soit la structure à treillis composée de deux éléments représentée ci-dessous

E= 200 kN/mm^2.

A= 100 mm^2.



Questions:

1- Calculer les matrices de rigidité des éléments
2- Calculer la matrice de rigidité de la structure.
3- Introduire les conditions aux limites
4- Determiner les déplacements nodaux
5- Déterminer les forces aux niveaux des éléments
6- Déduire les contraintes aux niveaux des éléments
7- Déduire les réactions.
8- Reprendre l'exercice en utilisant la méthode des sous matrices

3 Elément fini poutre

3-1. Définition

Un élément fini poutre est un élément dont le comportement est tridimensionnel. Ce comportement dans le cadre de la théorie linéaire est obtenu par superposition de trois modèles mathématiques : le modèle de traction, le modèle de torsion et le modèle de flexion C'est généralement un élément à 2 noeuds, qui comporte 6 inconnues ou d.d.l. par noeud associés aux composantes de son déplacement et de sa rotation.
Pour une poutre plane, chaque noeud possède trois degrés de liberté par noeud (deux déplacements et une rotation).

3-2 champs de déplacement

On utilisant les résultats connus de la théorie des poutres, on peut ramener le probléme tridimensionnel à un probléme à une seule dimension, la fibre moyenne de la poutre. Le champ de déplacement est alors entièrement défini par deux composantes, le champ de déplacement axial U(x) et le champ de déplacement transversale V(x). L'état de contrainte est caractérisé par une seule composante σ_x normale à la section droite de la poutre l'influance de l'éffort de cisaillement (effort tranchant) est négligable.

a) **Champ axial de déplacement**

Ce champ caractérise la déformation axiale de la poutre soit les deux déplacements axiaux u_{1x} et u_{2x} . En un point quelconque d'abscisse x le champ axial U(x) s'exprime alors par une relation linéaire :

$$\mathrm{u(x) = N_1(x).U_1 + N_2(x).U_2}$$

$$u(x) = \frac{L-x}{L}.U_1 + \frac{x}{L}.U_2$$

b) **Champ transversal de déplacement**

Ce champ de déplacement caractérise la flexion de la poutre. La connaissance de la loi moment-courbure $M(x) = -EI\,\dfrac{d^2v}{dx^2}$ conduit à prendre v(x) au moins cubique pour avoir un champl de moment linéaire (cas ou il n'ya pas de charge en travée). Quatre parametres sont alors nécessaires à sa définition.

$$V(x)= a_1+ a_2x+ a_3x^2+ a_4x^3$$

Les seules composantes nodales transversales v_{1y} et v_{2y} ne sont plus suffisantes il faut les rotations nodales θ_{1z} et θ_{2z} confondues avec la dérivée de v(x).

La fonction de déplacement v(x) peut etre discrétisée tels que :

$$V(x) = f(x, v_1, \theta_1, v_2, \theta_2)$$

Sous les conditions aux limites le déplacement au nœud 1 :

$$v(x=0) = a_1 = v_1$$

$$\frac{dv}{dx} = a_2 = \theta_1$$

Sous les conditions aux limites le déplacement au nœud 2 :

$$v(x=L) = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3 = v_2$$

$$\frac{dv}{dx} = a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2 = \theta_2$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}^{-1} . \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{L^2} & \frac{-2}{L} & \frac{3}{L^2} & \frac{-1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & \frac{-2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

C’est à dire :

$$a_1 = v_1$$
$$a_2 = \theta_1$$
$$a_3 = \frac{3}{L^2}.(v_2 - v_1) - \frac{1}{L}(2\theta_1 + \theta_2)$$
$$a_4 = \frac{2}{L^2}.(v_2 - v_1) + \frac{1}{L^2}(\theta_1 + \theta_2)$$

D’où le champ de déplacement :

$$v(x)=\left[1-\frac{3x^2}{L^2}+\frac{2x^3}{L^3}, x-\frac{2x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}, \frac{3x^2}{L^2}-\frac{2x^3}{L^3}, -\frac{x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2}\right]\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$v(x)=\left[N_1(x), N_2(x), N_3(x), N_4(x)\right]\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

D'où le champ de déplacement complet de l'élément est :

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{3x^2}{L^2}+\frac{2x^3}{L^3} & x-\frac{2x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2} & 0 & \frac{3x^2}{L^2}-\frac{2x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

3-3 Le champ de déformation :
La déformation est uniaxiale et definie selon la théorie des poutres par :

$$\varepsilon(x)=\frac{du}{dx}-y\frac{d^2v}{dx^2}$$

Le premier terme caractérise la déformation axiale (membrane) et le second celle de flexion (courbure).

$$\{\varepsilon(x)\}=\left[-\frac{1}{L} \quad (\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}).y \quad (\frac{4}{L}-\frac{6x}{L^2}).y \quad \frac{1}{L} \quad (-\frac{6}{L^2}+\frac{12x}{L^3}).y \quad (\frac{2}{L}-\frac{6x}{L^2}).y\right].\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon(x)\}=[B].\{U\}$$

3-3 Matrice de rigidité :
La matrice de rigidité a pour expréssion génarale :

$$[K]=\int_V [B]^T\cdot[E]\cdot[B]dV$$

Les états de contraintes etdéformations étant uniaxiaux, la loi de Hooke se se reduit au module s'élasticité longitudinale E.

$$[K]=\int_V [B]^T \cdot E \cdot [B] dV$$

L'intégration sur le volume se ramène à une intégration sur la section droite de la poutre dA puis une intégration sur la longueur dx.

dv=dA.dx

Exemple de calcul de quelque terme de la matrice de rigidité de l'élément poutre :
Supposons que la poutre a une section A et une inertie I constante sur la longueur L

$$[K_{11}]=\int_0^L \int_A \frac{E}{L^2} dA.dx=\frac{EA}{L}$$

$$[K_{33}]=\int_0^L \int_A E(\frac{4}{L}-\frac{6}{L^2}x)^2 y^2 dA.dx=\frac{4EI}{L} \qquad I_Z=\int y^2 dA$$

La matrice de rigidité de l'élément poutre est de la forme :

$$[K]=\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

3.4-Transformation dans le repère global

On procède de la même façon que pour un élément barre en plan, la matrice de transformation dans le repère global est :

$$[R]=\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$[K]=[R]^T.[\overline{K}].[R]$$