

Chapitre II : Evaluation de la force sismique

II.1 INTRODUCTION

Pour le calcul sismique des structures, l'ingénieur peut recourir, tout en respectant les prescriptions édictées par le code du Règlement Parasismique Algérien (RPA99/2003) à l'un de des deux modes analyses suivants :

- ✚ analyse statique qui est fréquemment utilisé si ses conditions d'application telles que décrites dans le code RPA99/2003 sont satisfaites. il comprend la méthode statique équivalente qui est d'usage relativement simple et utilisée durant plusieurs décennies d'expérience ;
- ✚ les méthodes dynamiques qui englobent la méthode modale spectrale, la méthode d'analyse dynamique par accélérogramme et les méthodes d'analyse temporelle.

La méthode modale spectrale qui consiste à appliquer un spectre de réponse réglementaire à une structure donnée après avoir déterminé ses valeurs et formes propres. Celle-ci est en général la méthode la plus utilisée lorsque la méthode statique équivalente n'est pas applicable mais elle a l'inconvénient de ne pas pouvoir indiquer le temps pour lequel a eu lieu soit la réponse maximale soit une réponse donnée. La méthode de superposition modale qui utilise un accélérogramme tout en nécessitant un calcul modal. Les méthodes d'intégration pas à pas des équations de mouvement et qui font elles aussi appel à un accélérogramme. Ces deux dernières méthodes, selon les recommandations du code RPA 99/2003, doivent être utilisées avec prudence et par un personnel hautement qualifié [2].

Une analyse de la structure sera conduite pour déterminer la distribution des forces et des déformations induites dans la structure par la secousse due au sol, et d'autres risques sismiques correspondant à l'objectif choisi de réadaptation.

La procédure d'analyse peut être statique ou dynamique :

II.2 METHODES STATIQUES

II.2.2 Méthode statique équivalente selon RPA99/2003

Dans cette méthode les forces réelles dynamiques qui se développent dans la construction sont remplacées par un système de forces statiques fictives dont les effets sont considérés équivalents à ceux de l'action sismique.

Le mouvement du sol peut se faire dans une direction quelconque dans le plan horizontal. Les forces sismiques horizontales équivalentes seront considérées appliquées successivement suivant deux directions orthogonales caractéristiques choisies par le projeteur. Dans le cas général, ces deux directions sont les axes principaux du plan horizontal de la structure. Il faut souligner toutefois que les forces et les déformations obtenues pour l'élément à partir des méthodes d'analyse statiques pour les charges de conception recommandées sont inférieures aux forces et aux déformations qui seraient observées sur la structure sous les effets d'un séisme majeur pour lequel les charges ont été spécifiées. Ce dépassement des forces est équilibré par le comportement ductile qui est fourni par les détails de construction de l'élément. C'est pourquoi l'utilisation de cette méthode ne peut être dissociée de l'application rigoureuse des dispositions constructives garantissant à la structure :

- ✚ une ductilité suffisante ;
- ✚ la capacité de dissiper l'énergie vibratoire transmise à la structure par des secousses sismiques majeures.

II.2.1.2 Principe de la méthode

- ✚ les forces réelles dynamiques qui se développent dans la structure sont remplacées par un système de forces statiques fictives dont les effets considérés équivalent à l'action sismique ;
- ✚ le mouvement du sol peut se faire dans une direction quelconque dans le plan horizontal ;
- ✚ les forces sismiques horizontales équivalentes sont supposées appliquées suivant deux directions orthogonales, en général suivant les deux axes principaux du plan horizontal de la structure.

II.2.1.4 Calcul de la force sismique

La force sismique totale V , appliquée à la base de la structure, doit être calculée successivement dans deux directions horizontales orthogonales (X, Y) selon la formule :

$$V = \frac{A.D.Q}{R} W \quad (\text{II.1})$$

a) *Coefficient d'accélération de la zone A*

Donné par le Tableau II.1 suivant la zone sismique et le groupe d'usage du bâtiment.

Groupe d'usage	Zone sismique		
	I	II	III
1A (Très important)	0.12	0.25	0.35
1B (Important)	0.10	0.20	0.30
2	0.08	0.15	0.25
3	0.05	0.10	0.15

TAB II.1 Valeurs des coefficients d'accélération de la zone

b) Facteur d'amplification dynamique **D**

Il est fonction de la catégorie de site, facteur de correction d'amortissement η et la période de la structure **T**.

$$D = \begin{cases} 2.5 \eta & \text{pour: } 0 \leq T \leq T_2 \\ 2.5 \eta \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{2/3} & \text{pour: } T_2 \leq T \leq 3.0s \\ 2.5 \eta \left(\frac{T_2}{3}\right)^{2/3} \left(\frac{3}{T}\right)^{5/3} & \text{pour } T > 3.0s \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

T_1 et T_2 Sont des périodes caractéristiques associées à la catégorie du site telle sont récapitulées dans le Tableau II.2.

Site	S1 (Rocheux)	S2(Ferme)	S3(Meuble)	S4 (Très meuble)
$T_1(s)$	0.15	0.15	0.15	0.15
$T_2(s)$	0.3	0.4	0.5	0.7

TAB II.2 Valeurs des T_1 et T_2

Les sols sont classés en fonction de la vitesse cisaillement de l'onde.

$$V_s = \sqrt{G/\rho} \quad (\text{II.3})$$

où G : Module de cisaillement et ρ : masse volumique du sol sous fondation.

Le facteur de correction d'amortissement η est donné par l'expression.

$$\eta = \sqrt{7/(2 + \xi)} \geq 0.7 \quad (\text{II.4})$$

Où $\xi(\%)$: Pourcentage critique fonction du matériau constitutif du type de la structure et l'importance du remplissage.

Le facteur **D** est donné par un graphe (Fig II.1) (*RPA 99/2003, Page 39*).

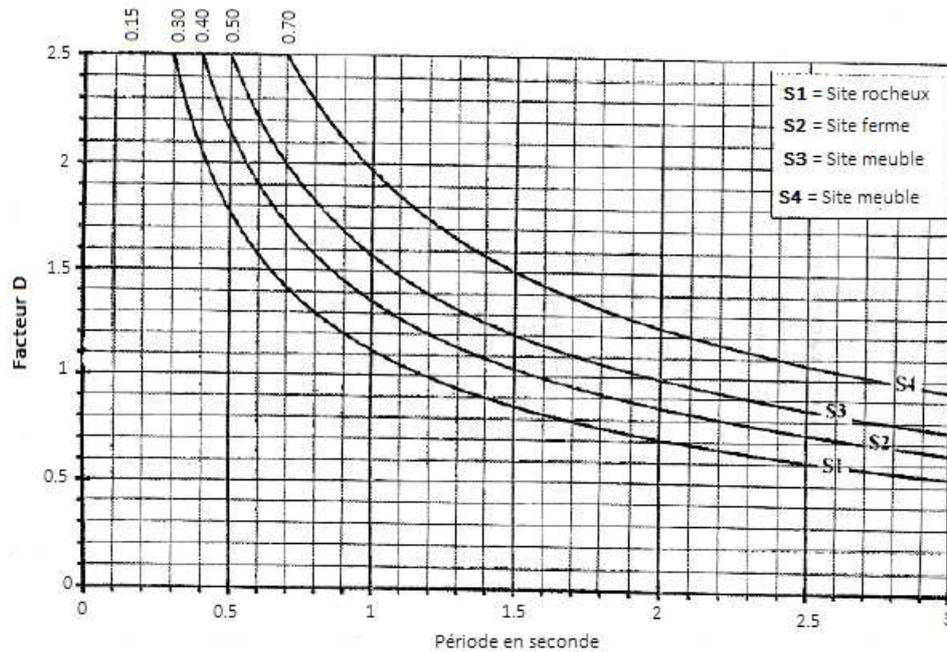


Figure II.1 Facteur d'amplification dynamique moyen ($\xi = 5\%$)

c) *Facteur de comportement global R*

Ce facteur exprime la capacité de la structure à entrer dans le domaine plastique. Sa valeur est donnée par un tableau, fonction de catégorie de contreventement ([RPA 99/2003, page 42](#)). Il tient compte également de ductilité de la structure. En cas d'utilisation de systèmes de contreventement différents dans les deux directions considérées, il y'a lieu de d'adopter la valeur la plus petite.

d) *Facteur de qualité Q*

Est fonction de :

- ✚ la redondance et la géométrie des éléments qui les constituent ;
- ✚ la régularité en plan et en élévation ;
- ✚ la qualité du contrôle de construction.

$$Q = 1 + \sum_1^5 P_q \quad (\text{II.5})$$

où P_q : Pénalité à retenir suivant le critère de qualité ' q ' est satisfaisant ou non. Sa valeur est donnée par le [tableau 4.4, RPA 99/2003, page 44](#).

e) *Poids de la structure W*

Est égale à la somme des poids W_i calculés à chaque niveau du bâtiment, comprenant à la fois les charges permanentes et une fonction (β) des charges d'exploitation.

$$W = \sum_{i=1}^n W_i \quad (\text{II.6})$$

Avec :

$$W_i = W_{Gi} + \beta W_{Qi} \quad (\text{II.7})$$

W_{Gi} : Poids dû aux charges permanentes et celles des équipements fixes éventuels, solidaires de la structure.

W_{Qi} : Charges d'exploitation

β : Coefficient de pondération, fonction de la nature et de la durée de la charge d'exploitation en fonction du type d'ouvrage. Il est donné par le [tableau 4.5, RPA99/2003, page 44](#).

II.2.1.5 Evaluation de la période de la structure

La valeur de la période fondamentale ' T ' de la structure peut être estimée à partir des formules empiriques ou calculée par les méthodes analytiques et numériques. La formule empirique à utiliser selon le cas est la suivante :

$$T = C_T h_N^{3/4} \quad (\text{II.8})$$

h_N : Hauteur de la structure à partir de la base jusqu'au niveau N. C_T : coefficient fonction du système de contreventement et de type de remplissage, ses valeurs sont résumées dans le [tableau 4.6, RPA 99/2003, page 45](#). Dans les cas où le contreventement de la structure est assuré soit par des portiques autostables en béton armé (B.A) ou en acier avec un remplissage en maçonnerie (cas 3 du Tab 4.6), ou partiellement ou totalement par des voiles en B.A, des palées triangulées et des murs de maçonnerie (cas 4 du Tab 4.6), la formule suivante pour être également utilisée pour l'évaluation de la période T de la structure.

$$T = 0.09 h_N / \sqrt{D} \quad (\text{II.9})$$

D : Dimension du bâtiment mesurée à sa base dans la direction du calcul considérée. Dans ce cas de figure il y'a lieu de retenir dans chaque direction considérée la plus petite des deux valeurs données respectivement par la première et la deuxième formules.

II.2.1.6 Distribution de la résultante des forces sismiques selon la hauteur (verticale)

La Figure [II.2](#) présente sommairement la distribution verticale de l'effort sismique appliqué à la base de la structure le long de son hauteur dans les deux directions. Dans

laquelle : F_{xi} et F_{yi} sont les résultantes des forces sismiques agissant sur le plancher "i" et qui doivent passer par leur centre de masse (centre de gravité) dans les directions X et Y respectivement. V_x : Effort tranchant appliqué à la base de la structure selon la direction X et V_y est l'effort tranchant appliqué à la base de la structure selon la direction Y.

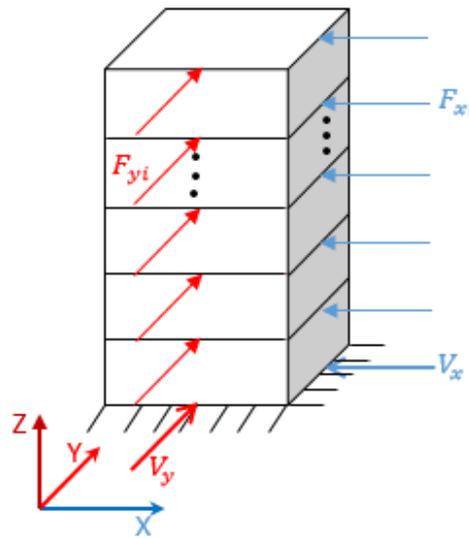


Figure II.2 Distribution verticale de l'effort sismique

$$\begin{cases} V_x = \sum_{i=1}^n F_{xi} \\ V_y = \sum_{i=1}^n F_{yi} \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

L'effort tranchant V (Eq. II.1) agissant à la base de la structure, d'après le code RPA 99/2003 doit être distribué sur la hauteur de la structure selon la formule :

$$V = F_t + \sum_{i=1}^n F_i \quad (\text{II.11})$$

F_i : Force horizontale revenant au niveau "i".

F_t : Force concentrée au sommet de la structure permet de tenir compte de l'influence des modes supérieurs de vibration. Elle doit être déterminée par la formule :

$$F_t = 0.07 T V \quad (\text{II.12})$$

Où T est la période de structure exprimée en seconde. La valeur maximale de cette force ne doit dépasser en aucun cas $0.25 V$, ($F_{t \max} \leq 0.25 V$).

$F_{t \max} = 0$; pour $T < 0.7$ seconde. La partie restante de la force sismique V soit $(V - F_t)$ doit être distribuée sur la hauteur de la structure suivant la formule :

$$F_k = \frac{(V - F_t) w_k h_k}{\sum_{i=1}^n w_i h_i} \quad (\text{II.13})$$

Où F_k : Etant l'effort horizontal au niveau K .

h_k : Hauteur de la base au plancher quelconque niveau K .

h_i : Niveau du plancher où exerce la force F_i .

w_i et w_k : Poids totaux revenant aux planchers i et K respectivement.

II.2.1.7 Distribution horizontale forces sismiques

L'effort tranchant au niveau de l'étage k est donné par l'expression suivante :

$$V_k = F_t + \sum_{i=k}^n F_i \quad (\text{II.14})$$

Donc V_k augmente du haut vers le bas, contrairement à l'effort sismique qui accroît de bas en haut.

**Exemple :*

Déterminer la répartition de l'effort tranchant V suivant la hauteur de l'immeuble $R + 3$ illustré sur la Figure II.3 ci-dessous.

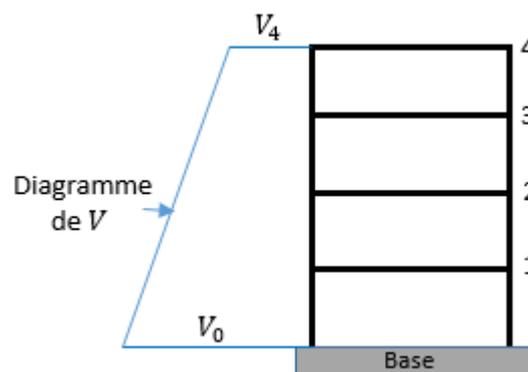


Figure II.3 Distribution de l'effort tranchant le long de la hauteur du bâtiment

Détails de calcul

En appliquant la formule II.14 on trouve :

$$V_1 = F_t + \sum_{i=1}^4 F_i = F_t + (F_1 + F_2 + F_3 + F_4)$$

$$V_2 = F_t + \sum_{i=2}^4 F_i = F_t + (F_2 + F_3 + F_4)$$

$$V_3 = F_t + \sum_{i=3}^4 F_i = F_t + (F_3 + F_4)$$

$$V_4 = F_t + \sum_{i=4}^4 F_i = F_t + F_4$$

$$V_0 = F_t + \sum_{i=0}^4 F_i = F_t + (F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4) = V_1, \text{ car } F_0 = 0$$

II.2.1.8 Distribution horizontale de l'effort tranchant selon le code Américain UBC

Le code Américain UBC (*Unified Buildings Code*) propose une autre expression pour décrire la répartition horizontale de l'effort tranchant V .

$$V = C \times W \quad (\text{II.15})$$

Où C : Coefficient sismique et W poids totale de la structure

$$F_i = C_{v,i} \times V \quad (\text{II.16})$$

$$C_{v,i} = \frac{w_i h_i^k}{\sum_{i=1}^n w_i h_i^k} \quad (\text{II.17})$$

Avec : w_i : Poids du plancher du niveau ' i ' et h_i l'a hauteur de la base jusqu'au niveau ' i '.

k Est un coefficient fonction de la période de la structure telque :

$$\begin{cases} k = 1 & \text{pour } T \leq 0.5 \text{ sec} \\ T = 2 & \text{pour } T \geq 0.5 \text{ sec} \\ K = 0 & \text{pour } 0.5 \leq T \leq 2.5 \text{ sec} \end{cases}$$

II.3 DISTRIBUTION DES FORCES HORIZONTALES SELON LE TYPE DE CONTREVENTEMENT

Les contreventements en B.A conçus pour reprendre les forces horizontales (vent et séisme) doivent comporter l'un des contreventements suivants :

- ✚ portiques autostables (poteaux-poutres) ;
- ✚ voiles ou refends
- ✚ noyau ;
- ✚ système mixtes (portiques +voiles).

Nous exposons des méthodes approchées rapides qui nous permettent d'obtenir la distribution de l'effort tranchant global dans chaque élément propre à chaque type de contreventement.

II.3.1 Contreventement par portiques (Méthode de MUTO)

Cette méthode proposée par les règles parasismiques Japonaise se prête bien pour ce type de contreventement. Elle est basée sur la rigidité relative de niveau de portique,

dont MUTO suggère comme valeur, la rigidité avec poteaux parfaitement encastres, multipliée (X) par un coefficient correcteur 'a' et cela pour tenir compte de la rigidité des poutres arrivant aux nœuds.

Soit R^∞ : Rigidité relative de niveau d'un portique avec poteau parfaitement encasté ou poutre infiniment rigide

R : Rigidité relative de niveau de portique corrigé au sens de MUTO, donc on a :

$$R = a \times R^\infty$$

II.3.1.1 Etapes de calcul

a) Calcul des raideurs de poteaux et des poutres

$$\begin{cases} k_{\text{poteau}} = \frac{I}{h_e} \\ K_{\text{poutre}} = \frac{I}{L} \end{cases}$$

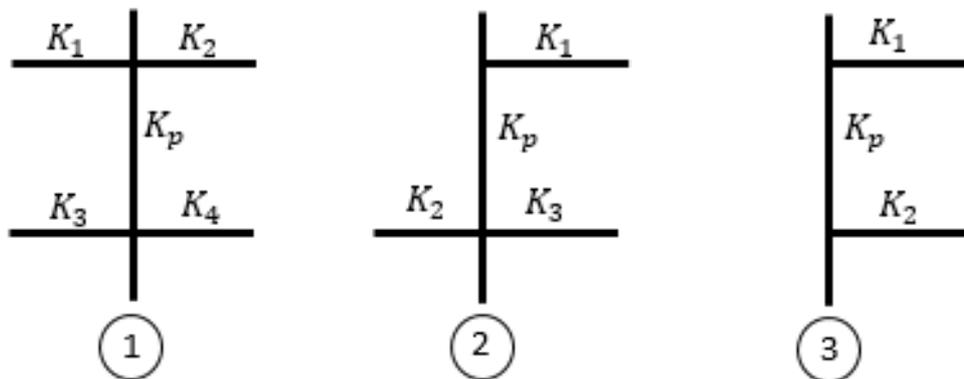
I : Moment d'inertie considéré (poteau ou poutre)

h_e : Hauteur du poteau considéré

L : Portée de la poutre considérée

b) Calcul des coefficients \bar{K} relatifs aux portiques transversaux et longitudinaux

b.1) Etage courant



Cas 1 : $\bar{K} = \frac{k_1+k_2+k_3+k_4}{2k_p}$

Cas 2 : $\bar{K} = \frac{k_1+k_2+k_3}{2k_p}$

Cas 3 : $\bar{K} = \frac{k_1+k_2}{2k_p}$

Formule générale : $\bar{K} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i \text{ des poutres supérieures et inférieures}}{2k_p}$

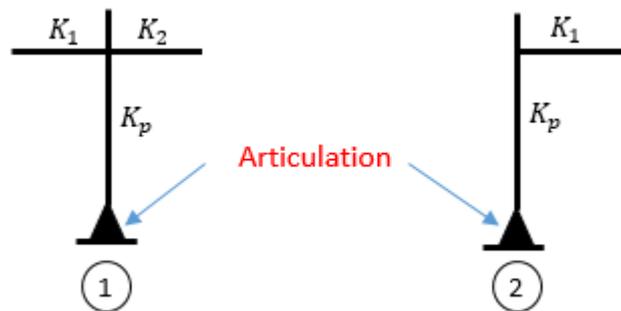
b.2) Niveau RDC



Cas 1 : $\bar{K} = \frac{k_1+k_2}{k_p}$

Cas 2 : $\bar{K} = \frac{k_1}{k_p}$

Formule générale : $\bar{K} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i \text{ des poutres supérieures}}{k_p}$



Cas 1 : $\bar{K} = \frac{k_1+k_2}{k_p}$

Cas 2 : $\bar{K} = \frac{k_1}{k_p}$

Formule générale : $\bar{K} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i \text{ des poutres supérieures}}{k_p}$

c) Calcul des coefficients correcteurs

c.1) Etage courant

$$a = \frac{\bar{K}}{2 + \bar{K}}$$

c.2) Niveau RDC

📌 Poteau encastré :

$$a = \frac{0.5 + \bar{K}}{2 + \bar{K}}$$

✚ Poteau articulé

$$a = \frac{0.5 \times \bar{K}}{1 + 2\bar{K}}$$

*Exemple :

Pour $\bar{K} = 0.1$ on aura.

-Pour étage courant : $a = \frac{\bar{K}}{2 + \bar{K}} = \frac{0.1}{2 + 0.1} = 0.05$

-Pour RDC poteau encastré : $a = \frac{0.5 + \bar{K}}{2 + \bar{K}} = \frac{0.5 + 0.1}{2 + 0.1} = 0.29$

-Pour RDC poteau articulé : $a = \frac{0.5 \times \bar{K}}{1 + 2\bar{K}} = \frac{0.5 \times 0.1}{1 + 2 \times 0.1} = 0.042$

d) Calcul des rigidités relatives des poteaux suivant les deux sens

d.1) Etage courant

$$r = a \cdot \frac{12EI}{h_e^3}$$

d.2) Niveau RDC

✚ Poteau encastré à sa base

$$r = a \cdot \frac{12EI}{h_e^3}$$

✚ Poteau articulé à sa base

$$r = a \cdot \frac{3EI}{h_e^3}$$

E : Module de Young longitudinal du B.A

I : Moment d'inertie de la section du poteau suivant le sens considéré

h_e : Hauteur de poteau.

II.3.2 Calcul des rigidités relatives des portiques transversaux et longitudinaux

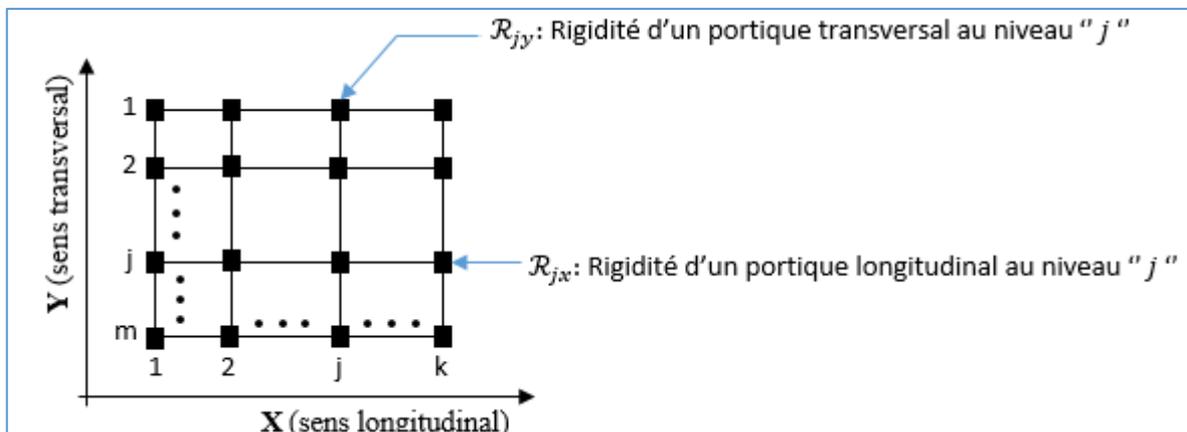


Figure II.4 Vue en plan de l'étage 'j'

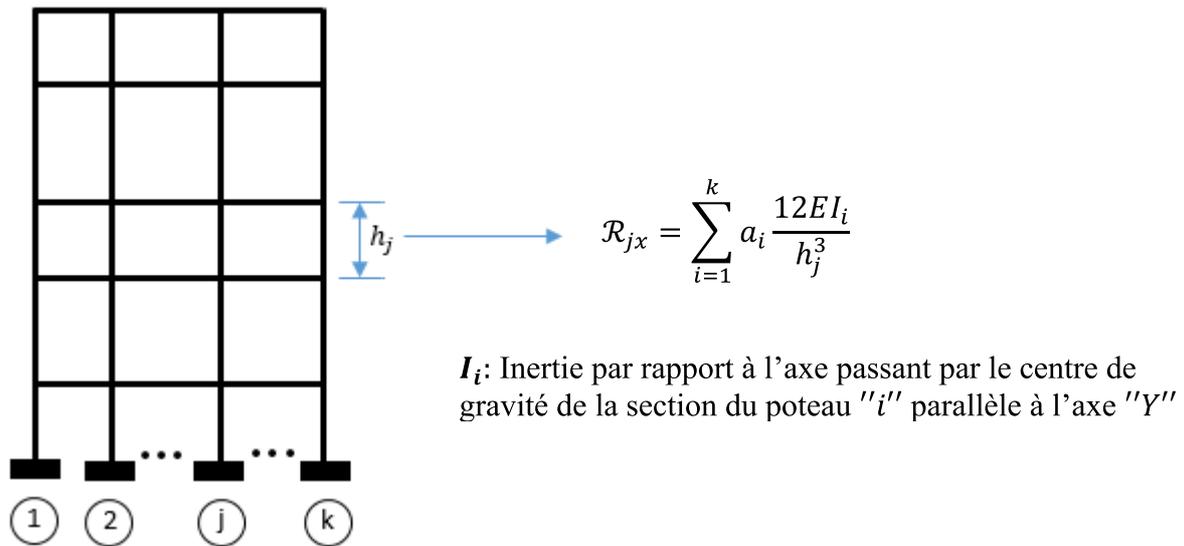


Figure II.5 Portique longitudinal

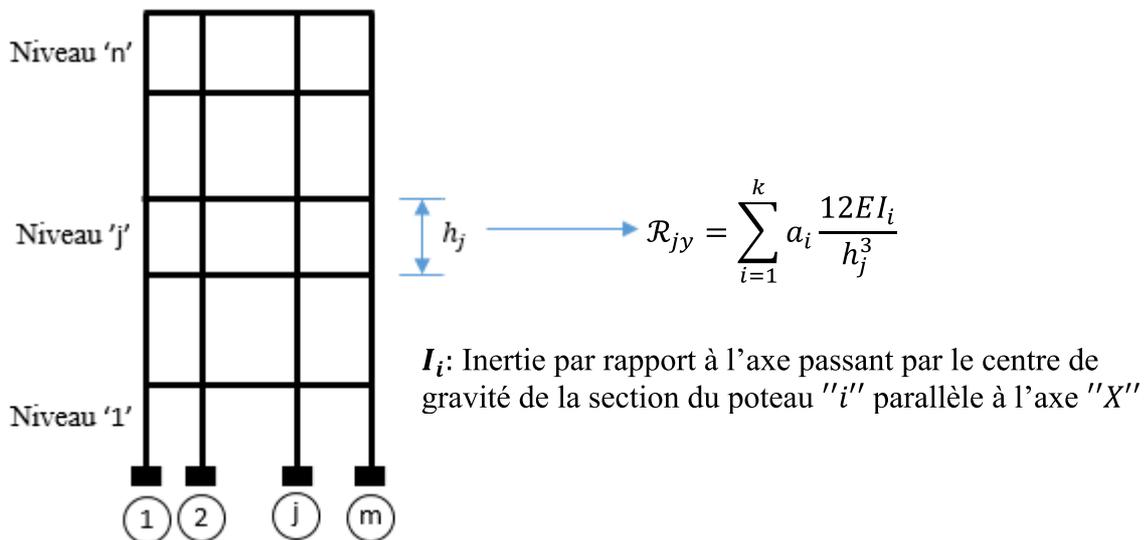


Figure II.6 Portique transversal

II.3.3 Détermination des efforts tranchants au niveau des étages

Soient F_1, F_2, \dots, F_n forces sismiques ou celles du vent, calculées selon le règlement en vigueur en Algérie (RPA 99/2003). Le calcul se fait en appliquant la formule II.14.

$$V_k = F_t + \sum_{i=k}^n F_i$$

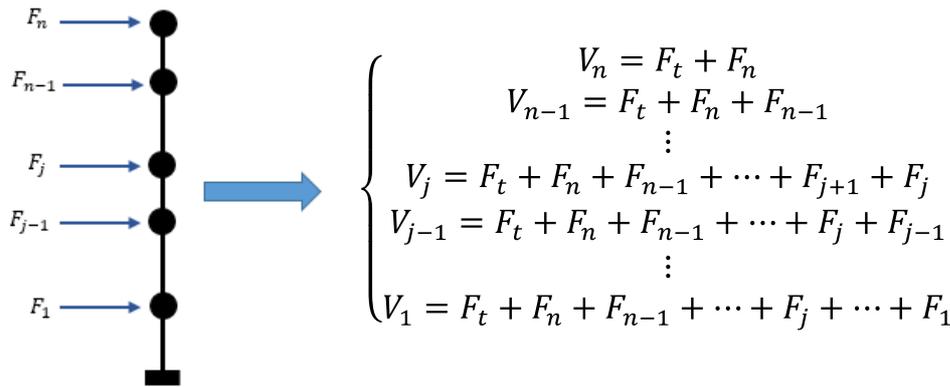


Figure II.7 Modèle discret des masses concentrées

II.3.5 Détermination du centre de torsion \$C_j\$ à l'étage 'j'

Les structures peuvent être classées comme régulières ou irrégulières. Les structures irrégulières ne présentent pas une symétrie en plan, elles sont généralement de formes L, H, T et U. Le problème se pose fréquemment au niveau de jonction, pour cela, on adopte généralement des joints de tassement (ou rupture) ou joint de dilatation au niveau ailes (Fig II.8).

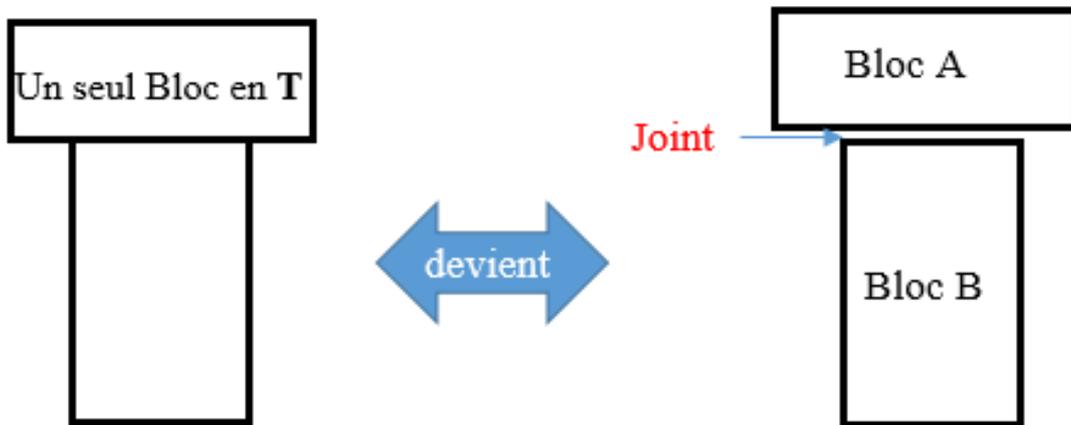


Figure II.7 Simplification d'un bloc de forme T en deux blocs 'barre'

Dans ces cas de configuration, le moment de torsion est très important et cela est dû essentiellement à l'excentricité '\$e\$' de la charge sismique, par rapport au centre de torsion (Fig II.8).

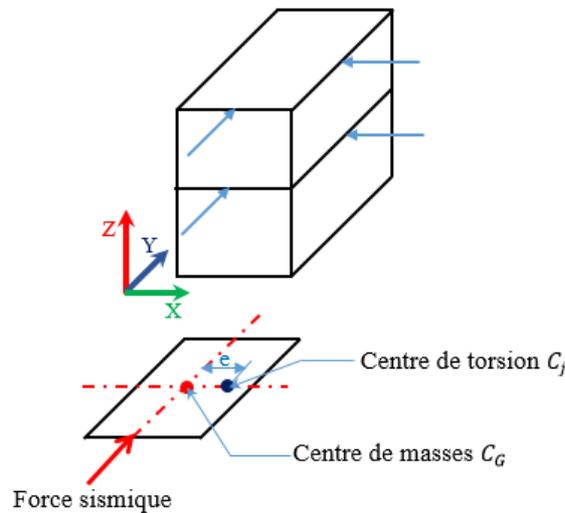


Figure II.8 Position excentrée des centres de masses et de torsion

☒ Centre de gravité

Est le point où la masse est concentrée (centre de masses).

☒ Centre de torsion

Appelé aussi centre de rigidités ou centre géométrique.

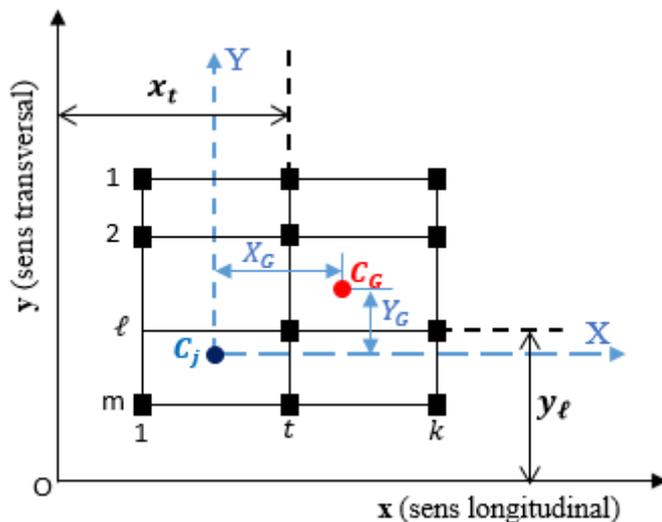


Figure II.8 Description géométrique des centres de masses et de torsion

C_j : Centre de torsion à l'étage 'j'.

$C_j \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$: Coordonnées de C_j par rapport au repère (o, x, y)

G_j : Centre de gravité du plancher 'j'

$G_j \begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \end{pmatrix}$: Coordonnées de G_j par rapport au nouveau repère (C_j, X, Y)

O : Point quelconque

Ox, Oy : Axes parallèles aux directions principales du bâtiment

x_t : Distance d'un portique transversal à l'axe Oy

y_ℓ : Distance d'un portique transversal à l'axe Ox

✚ Coordonnées de centre de rigidités (torsion ou géométrique)

$$x_c = \frac{\sum_{t=1}^{t=k} \mathcal{R}_{jt} x_t}{\sum_{t=1}^{t=k} \mathcal{R}_{jt}}$$

$$y_c = \frac{\sum_{\ell=1}^{\ell=m} \mathcal{R}_{j\ell} y_\ell}{\sum_{\ell=1}^{\ell=m} \mathcal{R}_{j\ell}}$$

✚ Coordonnées de centre de masses

$$x_G = \frac{\sum_{t=1}^{t=k} m_t x_t}{\sum_{t=1}^{t=k} m_t}$$

$$y_G = \frac{\sum_{\ell=1}^{\ell=m} m_\ell y_\ell}{\sum_{\ell=1}^{\ell=m} m_\ell}$$

II.3.5 Rigidité de torsion de niveau 'j'

$$\mathcal{R}_{j\theta} = \sum_{t=1}^{t=k} \mathcal{R}_{jt} (X_t)^2 + \sum_{\ell=1}^{\ell=m} \mathcal{R}_{j\ell} (Y_\ell)^2$$

$\mathcal{R}_{j\theta}$: Rigidité à la torsion de l'étage 'j'

X_t : Distance d'un portique transversal à l'axe C_y

Y_ℓ : Distance d'un portique longitudinal à l'axe C_x

II.3.6 Répartition des efforts tranchants par étage aux différents portiques

Soient :

V_{jX} : Effort tranchant global par étage, engendré par le séisme ou le vent dans le sens 'X' à l'étage 'j'.

V_{jY} : Effort tranchant global par étage, engendré par le séisme ou le vent dans le sens 'Y' à l'étage 'j'.

Dans le cas (bonne conception), les centres de masses G_j et de rigidités C_j , ne varient d'un étage à l'autre, c.à.d. $X_G = constante$ et $Y_G = constante$. Autrement dit que les centres de torsion C_j sont sensiblement sur la même verticale. De même, les centres de masses G_j , sont également sur la même verticale. On aura :

$$V_{jx}^{\ell} = V_{jX} \frac{\mathcal{R}_{j\ell}}{\sum_{\ell=1}^{\ell=m} \mathcal{R}_{j\ell}} + V_{jX} \times Y_G \frac{\mathcal{R}_{j\ell} \times Y_{\ell}}{\mathcal{R}_{j\theta}}$$

V_{jx}^{ℓ} : Effort tranchant du niveau "j" revenant (supporté par) au portique longitudinal "l".

$$V_{jy}^t = V_{jY} \frac{\mathcal{R}_{jt}}{\sum_{t=1}^{t=k} \mathcal{R}_{jt}} + V_{jY} \times X_G \frac{\mathcal{R}_{jt} \times X_t}{\mathcal{R}_{j\theta}}$$

V_{jy}^t : Effort tranchant du niveau "j" revenant (supporté par) au portique transversal "t".

II.4 APPLICATION

Soit l'ossature autostable d'emprise carrée $(7.80 \times 7.80)m^2$, indiquée ci-dessous (Fig II.9), composée de deux étages (R+1) et répondant aux prescriptions ci-après :

- implantée dans la zone II ;
- bâtiment à usage d'habitation ;
- fondé sur un sol meuble ;
- remplissage rigide en maçonnerie, et un coefficient d'amortissement $\xi = 7\%$;
- poteaux de section carrée $(30 \times 30)cm^2$;
- poutre de section rectangulaire $(30 \times 40)cm^2$
- module de Young du béton armé $E = 345 \times 10^3 kg/cm^2$;
- béton dosé à $350 kg/cm^3$.

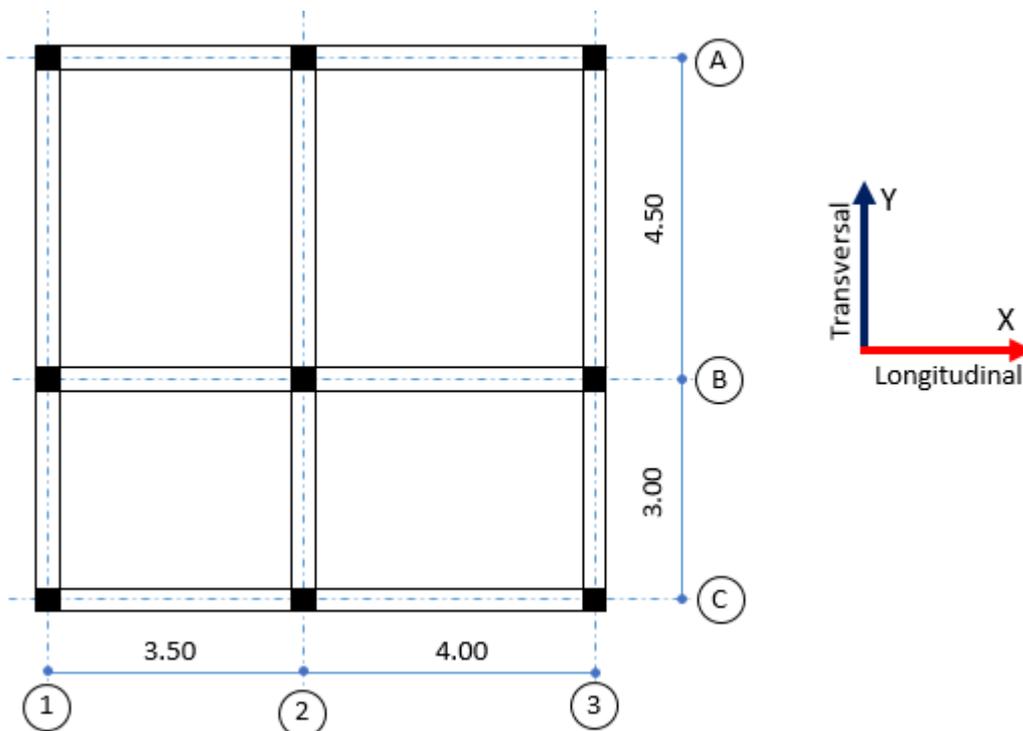


Figure II.9a Vue en plan

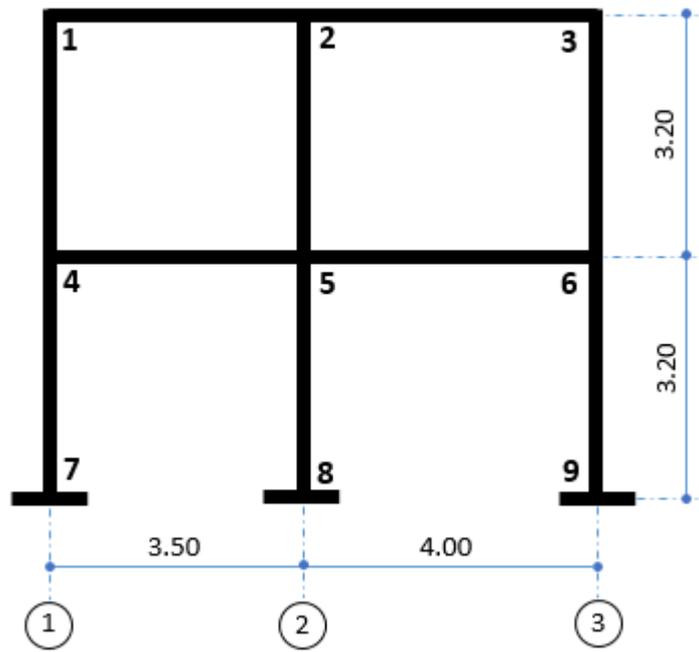


Figure II.9b Portique longitudinal

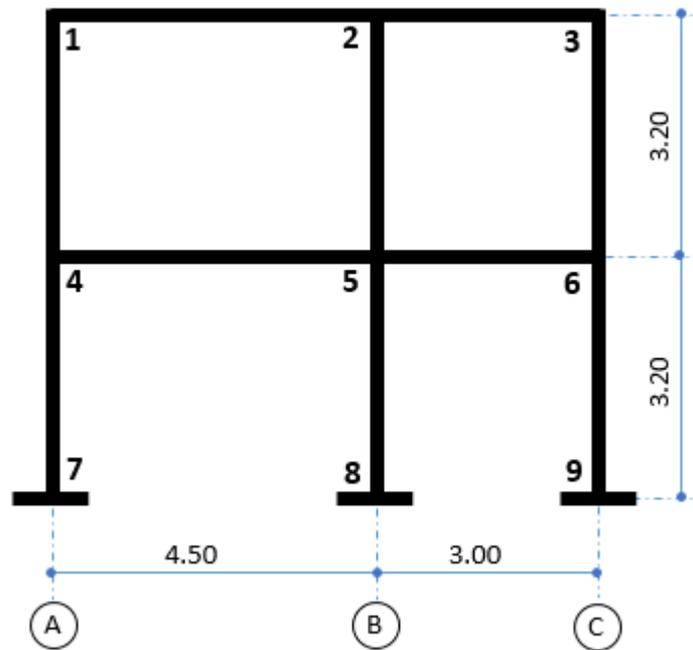


Figure II.9c Portique transversal

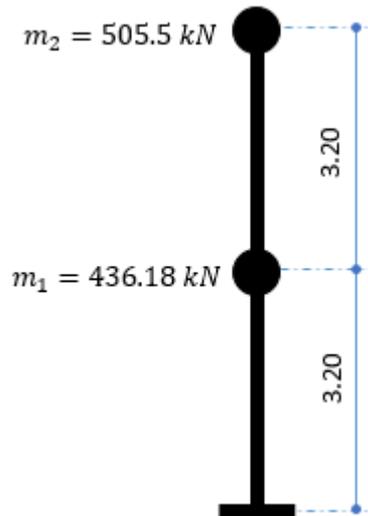


Figure II.9d Modèle discret des masses concentrées

- **Calcul de l'effort sismique V selon (RPA 99/2003)**

$$V = \frac{ADQ}{R} W$$

1.) Coefficient d'accélération de zone A

Groupe d'usage II et la zone II $\Rightarrow A = 0.15$

2.) Facteur d'amplification dynamique D

- On calcule la période de la structure donnée par l'expression $T = C_T h_N^{3/4}$.

Portiques autostables avec remplissage en maçonnerie $\Rightarrow C_T = 0.05$ et $h_N = 6.40m$

Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} T = C_T h_N^{3/4} = 0.05 \times 6.40^{3/4} = 0.201 \text{ sec} \\ \text{et} \\ T = \frac{0.9 h_N}{\sqrt{D}} = \frac{0.9 \times 6.40}{\sqrt{7.80}} = 0.206 \text{ sec} \end{array} \right.$$

Donc on adopte la valeur minimale c.à.d. $T = 0.201 \text{ sec}$

- Site d'implantation est le site 3 $\Rightarrow T_1 = 0.15 \text{ sec}$ et $T_2 = 0.5 \text{ sec}$, alors, on constate que $0 \leq T \leq T_2 \Rightarrow D = 2.5 \times \eta$

On prend pour un système autostable plus un remplissage dense en maçonnerie $\xi = 7\%$

$$\begin{aligned} \eta &= \sqrt{7/(2 + \xi)} = \sqrt{2/(2 + 0.07)} = 0.889 > 0.7 \\ \Rightarrow D &= 2.5 \times \eta = 2.5 \times 0.889 = 2.22 \end{aligned}$$

3.) Facteur de comportement global R

Ce facteur dépend de type de contreventement (voir Tab 4.3 du RPA99/2003).

Dans notre cas pour un remplissage en maçonnerie rigide avec un système de contreventement autostable. $D = 3.5$

4.)Facteur de qualité Q

$$Q = 1 + \sum_1^6 P_q$$

- Conditions minimales des files de contreventement Non observée : 0.0
- Redondance en plan..... Non observée : 0.0
- Régularité en plan..... Observée..... : 0.05
- Régularité en élévation..... Observée..... : 0.05
- Contrôle de qualité de matériau..... Observée..... : 0.05
- Contrôle de l'exécution des travaux..... Observée..... : 0.1

$$\Rightarrow Q = 1 + \sum_1^6 P_q = 1 + (0 + 0 + 0.05 + 0.05 + 0.05 + 0.1) = 1.25$$

5.)Poids de la structure

$$W = m_1 + m_2 = 505.5 + 436.18 = 941.68 \text{ kN}$$

$$V = \frac{ADQ}{R} W = \frac{0.15 \times 2.22 \times 1.25}{3.5} \times 941.68 = 112 \text{ kN}$$

• **Distribution des forces sismiques par étage**

$$F_k = \frac{(V - F_t)w_k h_k}{\sum_{i=1}^n w_i h_i}$$

$$T = 0.201 \text{ sec} < 0.7 \text{ sec} \Rightarrow F_t = 0 \Rightarrow F_k = \frac{V \times w_k \times h_k}{\sum_{i=1}^n w_i h_i}$$

D'où :

$$F_1 = \frac{V \times w_1 \times h_1}{w_1 h_1 + w_2 h_2} = \frac{112 \times 436.18 \times 3.0}{436.18 \times 3.0 + 505.5 \times 6.20} = 32.97 \text{ kN}$$

$$F_2 = \frac{V \times w_2 \times h_2}{w_1 h_1 + w_2 h_2} = \frac{112 \times 505.5 \times 6.20}{436.18 \times 3.0 + 505.5 \times 6.20} = 78.97 \text{ kN}$$

**Application du code Américain UBC

$$V = C \cdot W \text{ et } F_i = C_{V_i} \times V$$

$$C_{V_i} = \frac{w_i h_i^k}{\sum_{i=1}^n w_i h_i^k}$$

Nous avons $T = 0.201 \text{ sec} < 0.5 \text{ sec} \Rightarrow k = 1$

$$C_{V_1} = \frac{w_1 h_1}{w_1 h_1 + w_2 h_2} = \frac{436.18 \times 3.0}{436.18 \times 3.0 + 505.5 \times 6.20} = 0.294$$

$$C_{V_2} = \frac{w_2 h_2}{w_1 h_1 + w_2 h_2} = \frac{505.5 \times 6.20}{436.18 \times 3.0 + 505.5 \times 6.20} = 0.705$$

Alors :

$$F_1 = C_{V_1} \times V = 0.294 \times 112 = 32.928 \text{ kN}$$

$$F_2 = C_{V_2} \times V = 0.705 \times 112 = 78.97 \text{ kN}$$

• **Calcul des rigidités de la structure**

Poteaux : $(30 \times 30) \text{ cm}^2$

Poutres : $(30 \times 40) \text{ cm}^2$

Rigidité linéaire pour les poutres : $k_i = \frac{I_i}{\ell_i}$

Rigidité linéaire pour les poteaux : $k_i = \frac{I_i}{h_{e_i}}$

Rigidité relative des poteaux : $r_i = a_i \cdot \frac{12EI_i}{h_{e_i}^3} = a_i \cdot \frac{12Ek_i}{h_{e_i}^2}$

1.) **Calcul des coefficients correcteurs**

• Etage courant (EC) : $a = \frac{\bar{K}}{2 + \bar{K}}$

• RDC (poteaux encastrés) : $a = \frac{0.5 + \bar{K}}{2 + \bar{K}}$

• **Rigidité suivant la direction Y (transversale)**

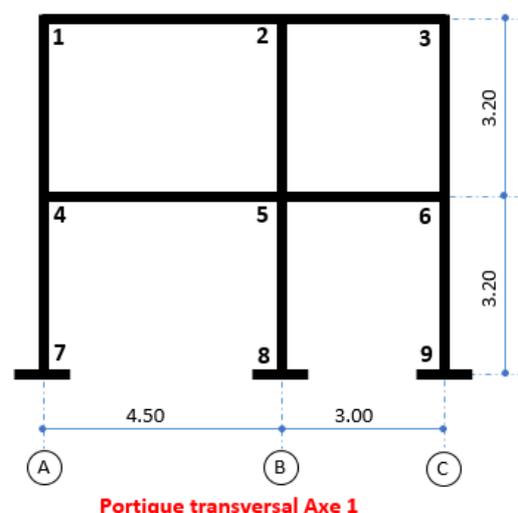
*Inertie par rapport à l'axe XX

$$I_{poutre} = \frac{bh^3}{12} = \frac{30 \times 40^3}{12} = 16 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

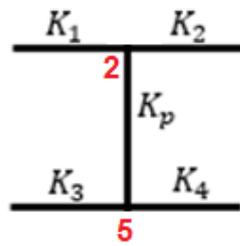
$$I_{poteau} = \frac{a^4}{12} = \frac{30^4}{12} = 6.75 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

Le Tableau II.3 récapitule les résultats des calculs de cette phase. Dans notre cas les poteaux de RDC et de l'étage courant, qu'ils soient des poteaux de rive ou intermédiaires sont

encastrés à la base et en tête. Ainsi, deux cas de figures se sont présentés pour les poteaux de RDC ou de l'étage courant, à savoir :

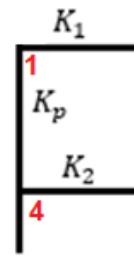


• *Etage courant*



a) *Portique intermédiaire axe B*

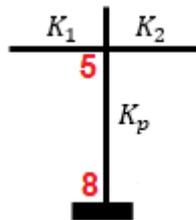
$$a) \quad \bar{k} = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_4}{2k_p}$$



b) *Portique de rive axe A*

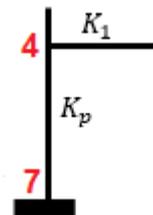
$$b) \quad \bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2k_p}$$

• *Etage RDC*



c) *Poteau RDC intermédiaires axe B*

$$c) \quad \bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{k_p}$$



d) *Poteau RDC de rive axe A*

$$d) \quad \bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2k_p}$$

• Les détails des calculs sont indiqués au Tableau II.4 montré ci-dessous, définissant la rigidité du système suivant la direction transversale (YY) :

**Etage courant

$$k_{poutre_1} = \frac{I_p}{\ell_{p1}} = \frac{16 \times 10^{-4}}{4.50} = 3.55 \times 10^{-4} m^3$$

$$k_{poutre_2} = \frac{I_p}{\ell_{p2}} = \frac{16 \times 10^{-4}}{3.00} = 5.33 \times 10^{-4} m^3$$

$$k_{poteau} = \frac{I_p}{h_e} = \frac{6.75 \times 10^{-4}}{3.0} = 2.25 \times 10^{-4} m^3$$

$$\bar{k}_{(3-6)} = \frac{k_1 + k_3}{2k_p} = \frac{(5.33 + 5.33) \times 10^{-4}}{2 \times 2.25 \times 10^{-4}} = 2.368$$

$$a_{(3-6)} = \frac{\bar{k}_{(3-6)}}{2 + \bar{k}_{(3-6)}} = \frac{2.368}{2 + 2.368} = 0.542$$

$$\dot{r}_{(3-6)} = a_{(3-6)} \times k_{(3-6)} = 0.542 \times \frac{6.75 \times 10^{-4}}{3.0} = 1.219 \times 10^{-4} m^3$$

**Etage RDC

$$k_{(6-9)} = \frac{k_1}{k_p} = \frac{5.33 \times 10^{-4}}{2.25 \times 10^{-4}} = 2.368$$

$$a_{(6-9)} = \frac{0.5 + \bar{k}_{(6-9)}}{2 + \bar{k}_{(6-9)}} = \frac{0.5 + 2.368}{2 + 2.368} = 0.656$$

Élément	barre	I_i (m^3)	k_i (m^3)	k_1 (m^3)	k_2 (m^3)	k_3 (m^3)	k_4 (m^3)	\bar{k} (-)	a_i	$\mathcal{I}'_i = a_i k_i$ (m^3)
Poutres	(2-3)	16×10^{-4}	5.33×10^{-4}	-	-	-	-	-	-	-
	(5-6)	16×10^{-4}	3.55×10^{-4}	-	-	-	-	-	-	-
	(1-2)	16×10^{-4}	3.55×10^{-4}	-	-	-	-	-	-	-
	(4-5)	16×10^{-4}	3.55×10^{-4}	-	-	-	-	-	-	-
Poteaux EC	Rive (1-4)	6.75×10^{-4}	2.25×10^{-4}	5.33×10^{-4}	0	5.33×10^{-4}	0	2.368	0.542	1.219×10^{-4}
	Cent (2-5)	6.75×10^{-4}	2.25×10^{-4}	3.55×10^{-4}	5.33×10^{-4}	3.55×10^{-4}	5.33×10^{-4}	3.946	0.663	1.491×10^{-4}
	Rive (3-6)	6.75×10^{-4}	2.25×10^{-4}	0	3.55×10^{-4}	0	3.55×10^{-4}	1.577	0.612	1.377×10^{-4}
Poteaux RDC	Rive (6-9)	6.75×10^{-4}	2.25×10^{-4}	5.33×10^{-4}	0	0	0	2.368	0.656	1.477×10^{-4}
	Rive (5-8)	6.75×10^{-4}	2.25×10^{-4}	3.55×10^{-4}	5.33×10^{-4}	0	0	3.946	0.747	1.683×10^{-4}
	Rive (5-8)	6.75×10^{-4}	2.25×10^{-4}	0	3.55×10^{-4}	0	0	1.577	0.580	1.306×10^{-4}

Tableau II.4 Résultats récapitulatifs de calcul des rigidités dans la direction Y

- **Calcul des rigidités relatives des portiques transversaux selon la direction Y à l'étage "j"**
- **Portique transversal Axe 3**

$$\mathcal{R}_3^{EC} = \sum_{i=1}^k a_i \frac{12EI_i}{h_e^3} = \frac{12EI_i}{h_e^2} \sum_{i=1}^k a_i k_i = \mathcal{R}_2^{EC} = \mathcal{R}_1^{EC}$$

$$\mathcal{R}_3^{EC} = \frac{12 \times 345 \times 10^3}{(320)^2} (1.219 + 1.491 + 1.377) 10^{-4} \times 10^6 = 16523.61 \text{ kg/cm}$$

$$\mathcal{R}_3^{RDC} = \frac{12 \times 345 \times 10^3}{(320)^2} (1.477 + 1.682 + 1.306) 10^{-4} \times 10^6 = 18051.85 \text{ kg/cm}$$

La rigidité totale suivant la direction Y (sens transversal) est la somme des rigidités relatives des trois axes ou portiques transversaux (1, 2 et 3).

$$R_y^{EC} = \sum_{1}^3 \mathcal{R}_1^{EC} = 3 \times 16523.61 = 49570.83 \text{ kg/cm}$$

$$R_y^{RDC} = \sum_{1}^3 \mathcal{R}_1^{RDC} = 3 \times 18051.85 = 54155.56 \text{ kg/cm}$$

• **Rigidité suivant la direction X(longitudinale)**

****Etage courant**

$$k_{poutre1} = \frac{I_p}{\ell_{p1}} = \frac{16 \times 10^{-4}}{4.0} = 4.0 \times 10^{-4} m^3$$

$$k_{poutre2} = \frac{I_p}{\ell_{p2}} = \frac{16 \times 10^{-4}}{3.50} = 4.751 \times 10^{-4} m^3$$

$$k_{poteau3-6} = \frac{I_p}{h_e} = \frac{6.75 \times 10^{-4}}{3.0} = 2.25 \times 10^{-4} m^3$$

$$\bar{k}_{(3-6)} = \frac{k_1 + k_3}{2k_p} = \frac{(4 + 4) \times 10^{-4}}{2 \times 2.25 \times 10^{-4}} = 1.777$$

$$a_{(3-6)} = \frac{\bar{k}_{(3-6)}}{2 + \bar{k}_{(3-6)}} = \frac{1.777}{2 + 1.777} = 0.470$$

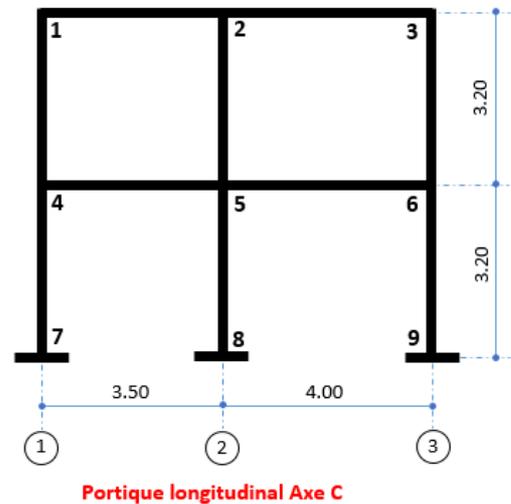
$$r_{(3-6)} = a_{(3-6)} \times k_{(3-6)} = 0.470 \times \frac{6.75 \times 10^{-4}}{3.0} = 1.057 \times 10^{-4} m^3$$

****Etage RDC**

$$\bar{k}_{(6-9)} = \frac{k_1}{k_{p6-9}} = \frac{4 \times 10^{-4}}{2.25 \times 10^{-4}} = 1.777$$

$$a_{(6-9)} = \frac{0.5 + \bar{k}_{(6-9)}}{2 + \bar{k}_{(6-9)}} = \frac{0.5 + 1.777}{2 + 1.777} = 0.602$$

$$r_{(6-9)} = a_{(6-9)} \times k_{(6-9)} = 0.602 \times 2.25 \times 10^{-4} = 1.355 m^3$$



$$\bar{k}_{(5-8)} = \frac{k_1 + k_2}{k_{p5-8}} = \frac{(4 + 4.751) \times 10^{-4}}{2.25 \times 10^{-4}} = 3.889$$

$$a_{(5-8)} = \frac{0.5 + \bar{k}_{(6-9)}}{2 + \bar{k}_{(6-9)}} = \frac{0.5 + 3.889}{2 + 3.889} = 0.745$$

$$\dot{r}_{(5-8)} = a_{(5-8)} \times k_{(5-8)} = 0.745 \times 3.889 \times 10^{-4} = 1.677 \text{ m}^3$$

- Les détails des calculs sont indiqués au Tableau II.5 montré ci-dessous, définissant la rigidité du système suivant la direction longitudinale (XX) :

Élément	barre	I_i (m^3)	k_i (m^3)	k_1 (m^3)	k_2 (m^3)	k_3 (m^3)	k_4 (m^3)	\bar{k} (-)	a_i	$\mathcal{I}_i = a_i k_i$ (m^3)
Poutres	(2-3)	16×10^{-4}	4×10^{-4}	-	-	-	-	-	-	-
	(5-6)	16×10^{-4}	4.75×10^{-4}	-	-	-	-	-	-	-
	(1-2)	16×10^{-4}	4.75×10^{-4}	-	-	-	-	-	-	-
	(4-5)	16×10^{-4}	4.75×10^{-4}	-	-	-	-	-	-	-
Poteaux EC	Rive (1-4)	6.75×10^{-4}	2.25×10^{-4}	0	4.57×10^{-4}	0	4.57×10^{-4}	2.111	0.513	1.155×10^{-4}
	Cent (2-5)	6.75×10^{-4}	2.25×10^{-4}	4.57×10^{-4}	4.0×10^{-4}	4.57×10^{-4}	4.0×10^{-4}	3.889	0.660	1.485×10^{-4}
	Rive (3-6)	6.75×10^{-4}	2.25×10^{-4}	4.0×10^{-4}	0	4.0×10^{-4}	0	1.777	0.470	1.057×10^{-4}
Poteaux RDC	Rive (6-9)	6.75×10^{-4}	2.25×10^{-4}	4.0×10^{-4}	0	0	0	1.777	0.602	1.356×10^{-4}
	Rive (5-8)	6.75×10^{-4}	2.25×10^{-4}	4.57×10^{-4}	4.0×10^{-4}	0	0	3.889	0.745	1.677×10^{-4}
	Rive (5-8)	6.75×10^{-4}	2.25×10^{-4}	0	4.57×10^{-4}	0	0	2.111	0.635	1.428×10^{-4}

Tableau II.5 Résultats récapitulatifs de calcul des rigidités dans la direction X

▪ **Rigidités relatives des portiques longitudinaux selon la direction X à l'étage "j"**

▪ *Portique longitudinal Axe C*

$$\mathcal{R}_3^{EC} = \sum_{i=1}^k a_i \frac{12EI_i}{h_e^3} = \frac{12EI_i}{h_e^2} r_i^{EC}$$

$$\mathcal{R}_3^{EC} = \frac{12 \times 345 \times 10^3}{(320)^2} (1.05 + 1.485 + 1.356) \times 10^{-4} \times 10^6 = 14946.85 \text{ kg/cm}$$

$$\mathcal{R}_X^{EC} = 3 \times \mathcal{R}_3^{EC} = 3 \times 14946.85 = 44840.56 \text{ kg/cm}$$

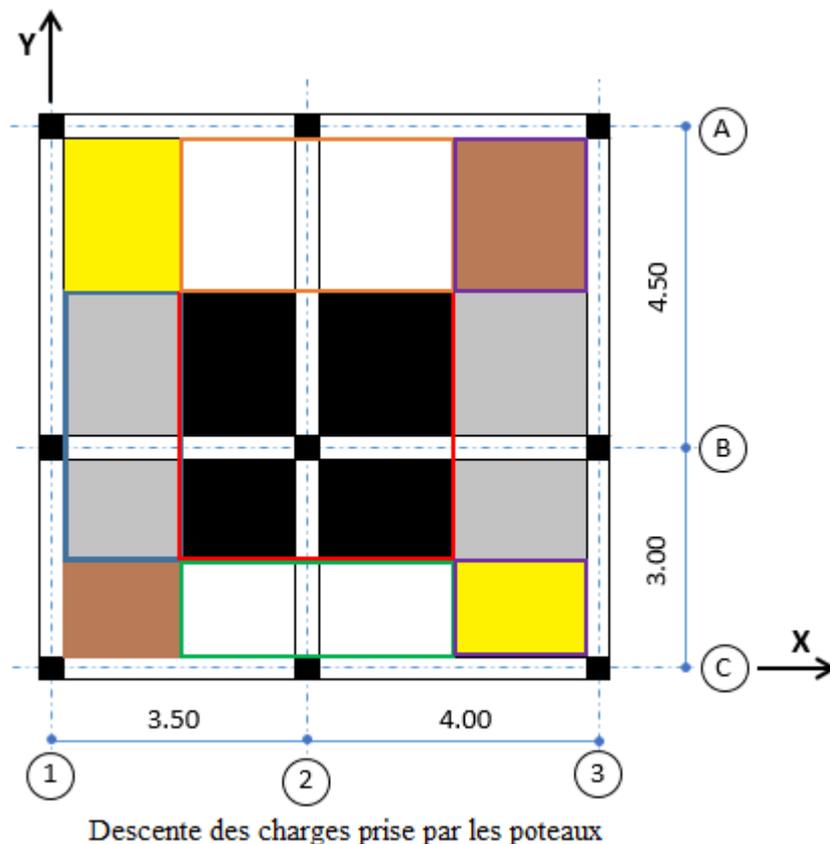
$$\mathcal{R}_3^{EC} = \frac{12 \times 345 \times 10^3}{(320)^2} (1.05 + 1.485 + 1.356) \times 10^{-4} \times 10^6 = 14946.85 \text{ kg/cm}$$

$$\mathcal{R}_3^{RDC} = \frac{12 \times 345 \times 10^3}{(320)^2} (1.356 + 1.677 + 1.428) \times 10^{-4} \times 10^6 = 18035.68 \text{ kg/cm}$$

$$\mathcal{R}_X^{RDC} = 3 \times \mathcal{R}_3^{RDC} = 3 \times 18035.68 = 54107.05 \text{ kg/cm}$$

• **Détermination des coordonnées du centre de masses**

$$x_G = \frac{\sum_{t=1}^k m_t x_t}{\sum_{t=1}^k m_t} = \frac{\sum_{i=1}^k m_i x_i}{\sum_{i=1}^k m_i} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{\sum_{\ell=1}^m m_\ell y_\ell}{\sum_{\ell=1}^m m_\ell} = \frac{\sum_{i=1}^m m_i y_i}{\sum_{i=1}^m m_i}$$



Le Tableau II.6 récapitule la distribution des charges verticales prise par chaque poteau de la structure.

Poteau	Masse (kg)	Poteau	Masse (kg)	Poteau	Masse (kg)
1-A	4421	2-A	5542	3-A	4488
1-B	5699	2-B	9302	3-B	6167
1-C	3488	2-C	4981	3-C	3654

TAB II.6 Répartition des masses par poteau

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=k} m_i} = \frac{(5542 + 9302 + 4981) \times 3.5 + (4421 + 6167 + 3654) \times 7.5}{47742} = 3.70m$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^{i=m} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{i=m} m_i} = \frac{(4421 + 5542 + 4488) \times 7.5 + (5699 + 9302 + 6167) \times 3}{47742} = 3.61m$$

- **Détermination des coordonnées de centre de torsion**

$$x_c = \frac{\sum_{t=1}^{t=k} \mathcal{R}_{jt} x_t}{\sum_{t=1}^{t=k} \mathcal{R}_{jt}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} \mathcal{R}_{iy} x_i}{\sum_{i=1}^{i=k} \mathcal{R}_{iy}} \quad \text{et} \quad y_c = \frac{\sum_{\ell=1}^{\ell=m} \mathcal{R}_{j\ell} y_\ell}{\sum_{\ell=1}^{\ell=m} \mathcal{R}_{j\ell}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=m} \mathcal{R}_{ix} y_i}{\sum_{i=1}^{i=m} \mathcal{R}_{ix}}$$

$$x_c = \frac{\mathcal{R}_{iy}}{3\mathcal{R}_{iy}} (x_1 + x_2) = \frac{\mathcal{R}_{iy}}{3\mathcal{R}_{iy}} (3.50 + 7.50) = 3.67m$$

$$y_c = \frac{\mathcal{R}_{ix}}{3\mathcal{R}_{ix}} (y_1 + y_2) = \frac{\mathcal{R}_{ix}}{3\mathcal{R}_{ix}} (3.0 + 7.50) = 3.50m$$

- **Calcul de la rigidité de torsion par étage**

$$\mathcal{R}_{j\theta} = \sum_{t=1}^{t=k} \mathcal{R}_{jt} (X_t)^2 + \sum_{\ell=1}^{\ell=m} \mathcal{R}_{j\ell} (Y_\ell)^2$$

X_t : Distance d'un portique transversal à l'axe C_Y

Y_ℓ : Distance d'un portique longitudinal à l'axe C_X

$$\mathcal{R}_{j\theta} = 16523.67(367^2 + 17^2 + 383^2) + 14946.85(400^2 + 50^2 + 350^2) = 8.91 \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

- **Répartition des efforts tranchants par étage aux différents portiques**

V_{jX} : Effort tranchant global par étage, engendré par le séisme ou le vent dans le sens 'X' à l'étage 'j'.

V_{jY} : Effort tranchant global par étage, engendré par le séisme ou le vent dans le sens 'Y' à l'étage 'j'.

- **Calcul des excentricités selon le RPA 99/003A**

A chaque niveau et à chaque direction, la résultante des forces horizontales (appliquée au centre des masses) a une excentricité par rapport au centre de torsion C_j , qui ne dépassera pas la plus grande des deux valeurs.

1. 5% de la plus grande dimension du bâtiment à ce niveau (cette excentricité doit être prise en considération de part et d'autre du centre de torsion)
2. Excentricité théorique résultant du plan.

$$e_x^C = (X_C - X_G) = (3.67 - 3.70) = 0.03m$$

$$e_y^C = (Y_C - Y_G) = (3.50 - 3.61) = 0.11m$$

$$e_x = \max\{e_x^C, e_x^{RPA}\} = \max\left\{\begin{array}{l} e_x^{RPA} = 5\% \cdot 7.8 = 0.39m \\ e_x^C = 0.03m \end{array}\right. \Rightarrow e_x = 0.39m$$

$$e_y = \max\{e_y^C, e_y^{RPA}\} = \max\left\{\begin{array}{l} e_y^{RPA} = 5\% \cdot 7.8 = 0.39m \\ e_y^C = 0.11m \end{array}\right. \Rightarrow e_y = 0.39m$$

• **Calcul d'effort tranchant revenant aux portiques**

$$\mathcal{V}_{cx}^{EC} = V_{jX} \frac{\mathcal{R}_{j\ell}}{3\mathcal{R}_{j\ell}} + V_{jX} \times Y_G \frac{\mathcal{R}_{j\ell} \times Y_\ell}{\mathcal{R}_{j\theta}}$$

$$\mathcal{V}_{3x}^{EC} = 0.33 V_{jX} + V_{jX} \times 0 \times \frac{14946.25 \times 350}{8910 \times 10^3} = 0.33 V_{jX}$$

$$\mathcal{V}_{cx}^{EC} = \mathcal{V}_{Ax}^{EC} = \mathcal{V}_{Bx}^{EC} = 0.33 V_{jX} = 0.33 \times 78.97 = 26.06kg$$

$$\mathcal{V}_{3y}^{EC} = 0.33 V_{jy} + V_{jy} \times 0.392 \times \frac{16523.61}{8910 \times 10^3} (750 - 367) \cong 0.33 V_{jX} = 26.06kg$$

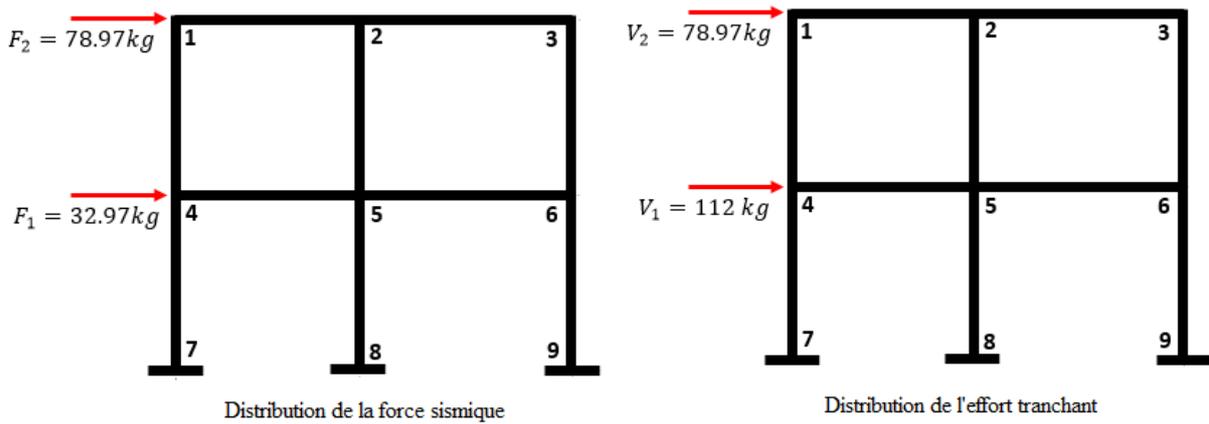
$$\mathcal{V}_{2y}^{EC} = 0.33 V_{jy} + V_{jy} \times 0.392 \times \frac{16523.61}{8910 \times 10^3} (367 - 350) \cong 0.33 V_{jX} = 26.06kg$$

$$\mathcal{V}_{1y}^{EC} = 0.33 V_{jy} + V_{jy} \times 0.392 \times \frac{16523.61}{8910 \times 10^3} (367 + 0) \cong 0.33 V_{jX} = 26.06kg$$

• **Calcul de rigidité de torsion du RDC**

$$\mathcal{R}_{j\theta}^{RDC} = \sum_{t=1}^{t=k} \mathcal{R}_{jt} (X_t)^2 + \sum_{\ell=1}^{\ell=m} \mathcal{R}_{j\ell} (Y_\ell)^2$$

$$\mathcal{R}_{j\theta}^{RDC} = 18051.85(367^2 + 17^2 + 383^2) + 18035.68(400^2 + 50^2 + 350^2) = 10.224 \times 10^9 kg.cm$$



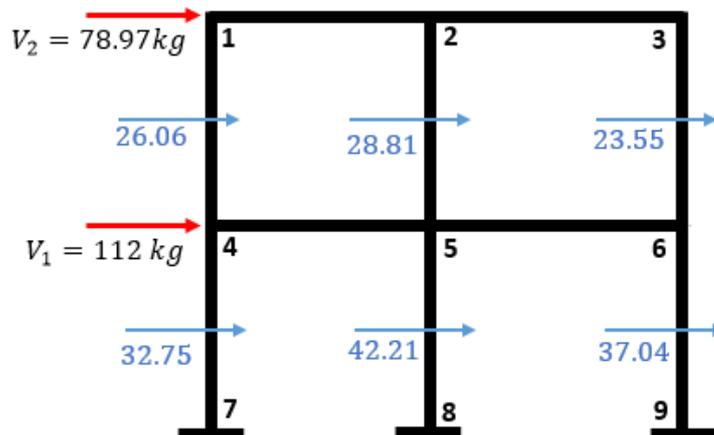
• *Effort tranchant revenant aux poteaux de chaque portique*

Barre	1-4	2-5	3-6	$\sum \dot{\nu} \times 10^3 \times m^3$
EC	1.377	1.491	1.219	4.087
Barre	4-7	5-8	6-9	$\sum \dot{\nu} \times 10^3 \times m^3$
RDC	1.306	1.683	1.477	4.466

Détail de calcul

$$V_{1-4}^{EC} = \frac{V_{3y}^{EC} \times \dot{\nu}_{1-4}}{\sum \dot{\nu}_{EC}} = \frac{78.97 \times 1.377}{4.087} = 26.60 \text{ kg/cm}$$

$$V_{4-7}^{RDC} = \frac{V_{3y}^{EC} \times \dot{\nu}_{4-7}}{\sum \dot{\nu}_{RDC}} = \frac{112 \times 1.306}{4.087} = 32.75 \text{ kg/cm}$$



Effort tranchant par poteau Portique 3

Recommandations :

1. le sens porteur est souvent le sens transversal du bâtiment, le sens longitudinal joue le rôle de chaînage ;

2. le portique longitudinal supporte le (1/2) de la charge répartie entre deux nervures par contre le portique transversal porte le (1/2) de la travée ;
3. les planchers sont toujours calculés sous l'effet des charges verticales.

Ordre de calcul d'un projet

- a) évaluation des charges
- b) prédimensionnement des éléments porteurs et calcul des planchers : terrasse, étage courant et RDC ;
- c) descente des charges ;
- d) étude sismique
- e) calcul de la structure sous l'action de (G, P, S et V) ;
- f) établissement des diagrammes des efforts internes (M, N, T) ;
- g) ferrailage des éléments constituant la structure ;
- h) calcul des escaliers ;
- i) calcul des fondations.

Chapitre 3 : Analyse sismique d'un système élémentaire 1DDL

III.1 INTRODUCTION

Tremblement de terre ou l'analyse sismique est une subdivision de l'analyse des structures qui tente à calculer la réponse des structures assujetties aux excitations sismiques. Plusieurs données sismiques sont nécessaires pour réaliser une analyse sismique des structures. Ces informations sont disponibles sous deux formes à savoir : déterministe, utilisées pour le design et la conception des structures, ou probabiliste utilisées dans l'analyse de risque sismique. La seconde forme consiste à l'étude des structures sujettes aux vibrations aléatoires.

Ce présent chapitre sera consacré à l'investigation de la réponse sismique des structures élémentaires d'un seul degré de liberté (1DDL) sujettes à des excitations dynamiques, exprimées sous forme d'un historique d'accélération ou chargement quelconque.

III.2 QUELQUES DEFINITIONS SUR LA THEORIE DES VIBRATIONS

a) Période de vibration

Est le temps nécessaire pour que le mouvement se répète, désignée par **T** et exprimée en [sec].

b) Cycle de mouvement vibratoire

Mouvement réalisé par un système pendant une période de vibration.

c) Fréquence du mouvement vibratoire

Nombre de cycles réalisés pendant une unité de temps (une seconde), désignée par **f** et exprimée en Hertz ou (1/sec).

d) Pulsation naturelle

Est la fréquence avec laquelle un système vibre sous l'action de ses forces d'inertie (intrinsèques) en l'absence des forces extérieures. Elle désignée par ω_n et exprimée en [rad/sec].

e) Degré de liberté

Nombre de coordonnées indépendantes nécessaires pour décrire le mouvement d'un système vibrant (Fig III.1).

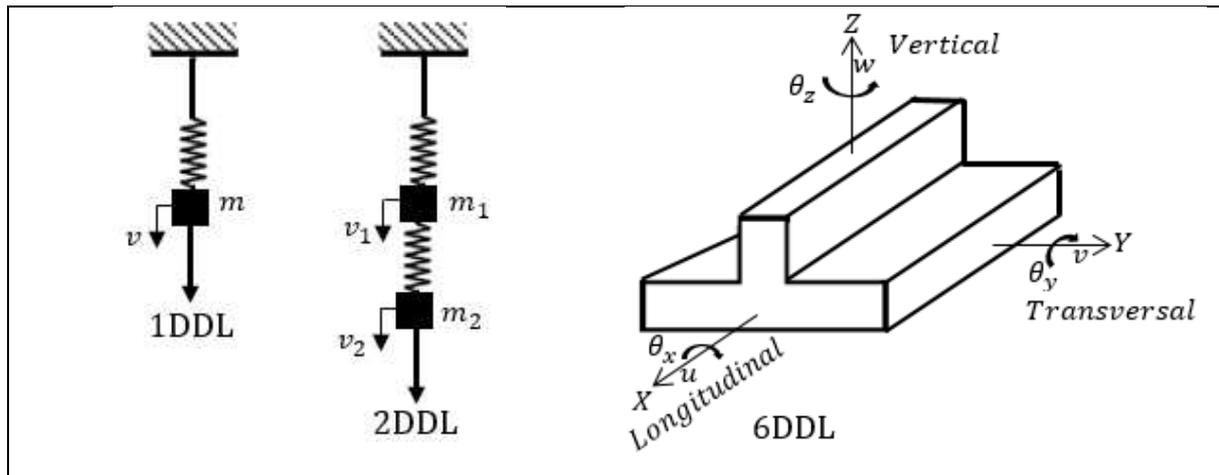


Figure III.1 Présentation des degrés de liberté pour différents systèmes

III.3 MODELISATION D'UN PROBLEME DYNAMIQUE

La modélisation d'un problème dynamique exige la connaissance au préalable du type de problème à étudier, en respectant les étapes suivantes :

a) Définition du modèle physique

a.1) Modèle continu

Dans lequel les propriétés physiques et intrinsèques du modèle (masse (m), inertie (I), module d'élasticité (E)...etc), restent réparties sur un medium (milieu) continu. Elles se sont exprimées sous forme de fonctions mathématiques continues, telles que :

$$m(x) = f(x), \quad I(x) = f(x) \text{ et } E(x) = f(x)$$

a.2) Modèle discret (discontinu)

Dans ce cas les propriétés physiques sont représentées par des valeurs discrètes. Elles sont concentrées à des points bien définis du système (e.g. système discret des masses concentrées) (Fig III.2).



Figure III.2 Système discret de masses concentrées, exemple d'un pont

b) Définition du modèle mathématique

Le modèle mathématique des systèmes physiques cités en haut est exprimé par les équations différentielles selon le type à analyser comme suit :

- pour analyser le modèle continu, on utilise les équations différentielles à dérivées partielles (EDP) ;
- le modèle discret est représenté par des équations différentielles ordinaires du second ordre à coefficients constants (EDO).

c) Réponse du système

Deux réponses des systèmes vibrants peuvent être décrites à savoir :

- une réponse transitoire pour le mode de vibrations libre ;
- une réponse permanente en cas de vibrations forcées.

III.4 EQUATION GENERALE DU MOUVEMENT D'UN SYSTEME 1DDL

Considérons le système élémentaire 1DDL, montré sur la Figure III.3, soumis à une accélération sismique $\ddot{u}_g(t)$. Les caractéristiques m, k et c sont respectivement la masse, la rigidité et l'amortissement du système 1DDL. Sous l'action de chargement sismique, ce système subit un déplacement relatif $u(t)$, une vitesse $\dot{u}(t)$ et une accélération $\ddot{u}(t)$. Les différentes forces agissantes sur le système sont généralement, la force d'inertie, la force élastique ou de rigidité et la force d'amortissement.

$$\begin{cases} F_i = m \ddot{u}(t) ; & \text{Force d'inertie} \\ F_e = k u(t) ; & \text{Force élastique} \\ F_D = c \dot{u}(t) ; & \text{Force d'amortissement} \\ F_s = m \ddot{u}_g(t) ; & \text{Force sismique} \end{cases}$$

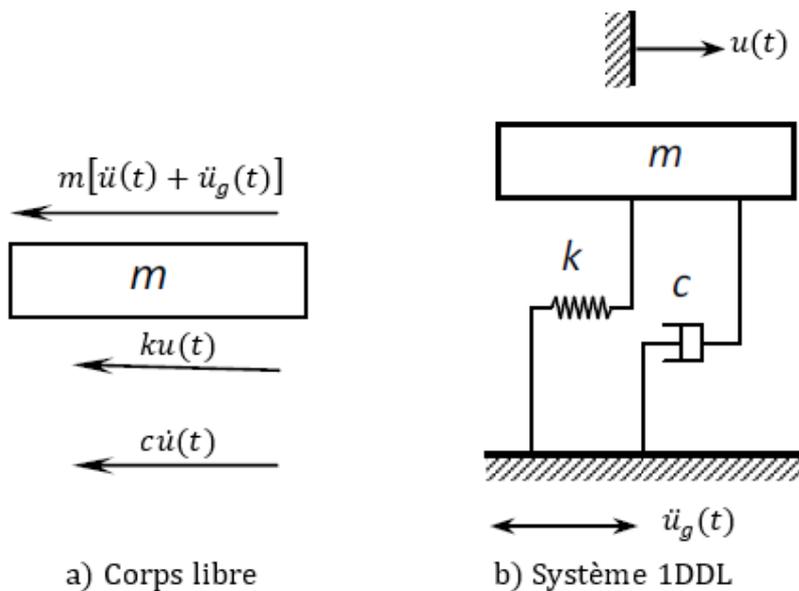


Figure III.3 Modèle analogique d'un système 1DDL

Considérons l'équilibre des différentes forces agissant sur la masse du corps libre montré sur la Figure III.3a, on trouve,

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = -m \ddot{u}_g(t) \quad (\text{III.1})$$

Où $u(t)$ est le déplacement relatif de la masse considérée, $\dot{u}(t)$ sa vitesse et $\ddot{u}(t)$ son accélération. $\ddot{u}_g(t)$ Désigne l'accélération sismique du sol.

III.4.1 Système 1DDL libre sans amortissement

Dans le cas d'une vibration libre ($F_s = 0$) sans amortissement ($c = 0$), l'Equation III.1 devient.

$$m \ddot{u}(t) + k u(t) = 0 \quad (\text{III.2})$$

$$\Leftrightarrow \ddot{u}(t) + \frac{k}{m} u(t) = 0 \quad (\text{III.3})$$

Pour trouver la solution générale de cette équation différentielle ordinaire (EDO), il suffit de trouver deux solutions particulières linéairement indépendantes de la forme.

$$u = e^{rt}$$

On dérive et on remplace dans l'Equation III.2, on trouve.

$$\left(r^2 + \frac{k}{m}\right) e^{rt} = 0 \Rightarrow \left(r^2 + \frac{k}{m}\right) = 0$$

Les racines de l'équation caractéristiques sont alors :

$$r_{1,2} = \mp i \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dans ce cas la solution générale de la forme harmonique est.

$$u = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t \quad (\text{III.4})$$

Où A_1 et A_2 sont des constantes qui peuvent être déterminées à partir des conditions aux limites. Maintenant, dérivons deux fois l'Equation III.4 et on remplace dans l'Equation III.2, on trouve.

$$-\omega_n^2 (A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t) + \frac{k}{m} (A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-\omega_n^2 + \frac{k}{m}\right) (A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t) = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\omega_n^2 + \frac{k}{m}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \omega_n = \mp \sqrt{k/m}$$

Cette relation est très importante dans l'analyse dynamique des structures, du fait elle relie une caractéristique dynamique intrinsèque du système à deux autres paramètres physiques. On peut déduire d'autres relations en conséquence à savoir :

$$\begin{cases} \omega_n \times T = 2\pi \Rightarrow T = 2\pi/\omega_n \\ f = 1/T \Rightarrow f = \omega_n/2\pi \\ \omega_n = \mp \sqrt{k/m} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{m/k} \quad \text{et} \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m} \end{cases}$$

On peut écrire également.

$$\begin{cases} k = \frac{W}{U_{st}}; \text{ où } W \text{ est le poids de la masse et } U_{st} \text{ sa déflexion élastique} \\ m = \frac{W}{g}; \end{cases} \quad g: \text{ accélération de la pesanteur}$$

D'où.

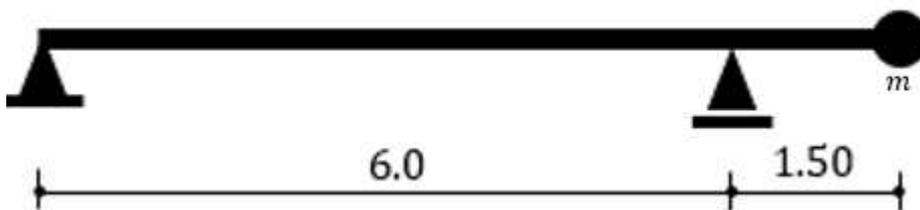
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{W/z_s}{W/g}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g/U_{st}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k \times g}{W}}$$

• *Autres formules*

$$\begin{cases} W = k \times U_{st} = \frac{1}{\delta} \times U_{st} \\ \omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{1/\delta \times m} = \sqrt{g/\delta \times W} = \sqrt{g/\delta \times k \times U_{st}} = \sqrt{g/U_{st}} = \frac{3.132}{\sqrt{U_{st}}} \\ T = 2\pi \sqrt{m/k} = 2\pi \sqrt{k \times U_{st}/k \times g} = 2\pi \sqrt{U_{st}/g} \cong 0.20 \sqrt{U_{st}} \\ f = \omega_n/2\pi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g/U_{st}} \cong \frac{0.50}{\sqrt{U_{st}}} \end{cases}$$

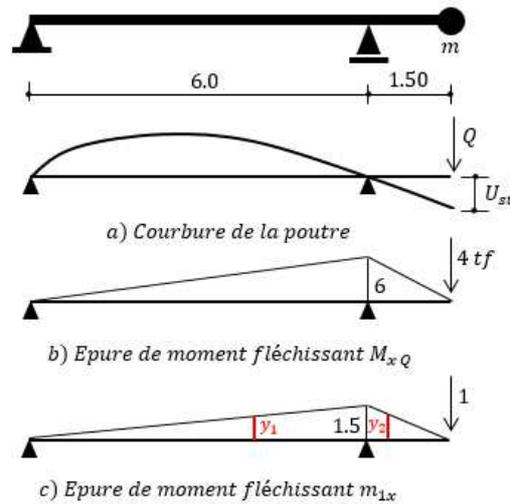
****Application**

Soit la poutre à console, montrée sur la figure ci-dessous et soumise à l'action d'une charge Q . Trouver la pulsation ; la fréquence et la période propres de vibration. $EI = 2500 \text{ tf/m}^2$, $Q = 4 \text{ tf}$, $l = 6 \text{ m}$.



****Solution**

On néglige la masse de la poutre, on a face à un système 1DDL. En premier lieu, on doit calculer la déflexion statique entraînée par la charge Q . Pour ce faire on applique les théorèmes de la RDM classique, tel que le théorème Mohr-Maxwell, utilisant les diagrammes de la charge Q , (M_{xQ}) et celui de la charge unitaire (m_{1x}).



*Calcul des coordonnées y_i

$$\frac{y_1}{\frac{2}{3} \times 6} = \frac{1.5}{6} \Rightarrow y_1 = \frac{2}{3} \times 1.5 = 1.0$$

$$y_1/1.5 = 1.5/1.5 = y_1 = 1.0$$

*Calcul de déflexion statique

$$U_{st} = \int \frac{m_{1x} M_{Qx}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{2}{3} \times 1.5 + \frac{1}{2} \times 6 \times 1.5 \times \frac{2}{3} \times 1.5 \right] = 0.9 \text{ cm}$$

$$\omega_n = \sqrt{g/U_{st}} = \sqrt{981/0.9} \cong 33 \text{ rad/sec}$$

$$T = 2\pi/\omega_n = 2\pi/33 = 0.1903 \text{ sec} \Rightarrow f = 1/T = 5.25 \text{ Htz}$$

III.4.2 Système 1DDL libre avec amortissement

Dans le cas d'une vibration libre ($F_s = 0$) avec amortissement ($c \neq 0$), l'Equation III.1 devient.

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = 0 \quad (\text{III.5})$$

La solution particulière de cette équation différentielle est de la forme $u = e^{rt}$. Dérivons deux fois et remplaçons dans l'Equation III.4, on obtient l'équation caractéristique.

$$\left(r^2 + \frac{c}{m} r + \frac{k}{m} \right) = 0$$

Les racines de cette équation caractéristique sont.

$$r_{1,2} = \frac{-c}{2m} \mp i \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Pour un cas limite d'amortissement (critique), il faut que :

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} = \omega_n^2 \Rightarrow \frac{c}{2m} = \omega_n$$

On note l'amortissement critique par c_c tel que :

$$c_c = 2 m \omega_n$$

Le rapport de l'amortissement actuel c à l'amortissement critique c_c est dénommé *facteur d'amortissement* ξ .

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2 m \omega_n}$$

On peut écrire également.

$$\frac{c}{2 m} = \frac{c}{c_c} \times \frac{c_c}{2 m} = \xi \omega_n \Rightarrow \frac{c}{m} = 2 \xi \omega_n$$

Remplaçons cette dernière relation dans l'Equation III.1, on obtient l'équation de mouvement dans sa forme normalisée.

$$\ddot{u}(t) + 2 \xi \omega_n \dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = -m \ddot{u}_g(t) \quad (\text{III.6})$$

Donc les racines de l'équation caractéristique peuvent être écrites en fonction de facteur d'amortissement comme suite.

$$r_{1,2} = \left(-\xi \mp \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \omega_n = \left(-\xi \mp i\sqrt{1 - \xi^2}\right) \omega_n$$

Avec ω_n pulsation naturelle du système non amortie.

- Pour un facteur d'amortissement $\xi < 1$, la solution de l'équation différentielle est de grande importance pratique. La solution générale est de la forme.

$$u = A \exp\left[\left(-\xi + i\sqrt{1 - \xi^2}\right) \omega_n t\right] + B \exp\left[\left(-\xi - i\sqrt{1 - \xi^2}\right) \omega_n t\right]$$

$$\Leftrightarrow u = A \exp(-\xi \omega_n t) \exp\left(i\sqrt{1 - \xi^2}\right) \omega_n t + B \exp(-\xi \omega_n t) \exp\left(-i\sqrt{1 - \xi^2}\right) \omega_n t$$

Cette expression peut être écrite sous forme trigonométrique comme suite :

$$\Leftrightarrow u = \exp(-\xi \omega_n t) \left[A \cos\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + i A \sin\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + B \cos\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t - B \sin\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t \right]$$

$$\Leftrightarrow u = A \exp(-\xi \omega_n t) \left[C \cos\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + D \sin\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t \right]$$

Avec $C = A + B$ et $D = i(A - B)$

D'où la fréquence naturelle circulaire amortie d'un système 1DDL est donnée par l'expression :

$$\omega_{nd} = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (\text{III.7})$$

L'équation du mouvement d'un système linéaire visqueux amorti 1DDL est une équation différentielle ordinaire de second ordre à coefficients constants. La solution de cette équation pour une accélération spécifique d'un tremblement de terre, donne la réponse de ce système 1DDL.

III.4.3 Système 1DDL forcé sans amortissement

Dans ce cas la masse est excitée par une force perturbatrice $F = F_0 \sin \theta t$, où F_0 est son amplitude et θ sa pulsation. L'Equation III.1 devient.

$$m \ddot{u}(t) + k u(t) = F_0 \sin \theta t \quad (\text{III.8})$$

$$\Leftrightarrow \ddot{u}(t) + \frac{k}{m} u(t) = \frac{F_0}{m} \sin \theta t \Leftrightarrow \ddot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = \frac{F_0}{m} \sin \theta t$$

La réponse est du régime permanent, donc on néglige la solution des vibrations libres. D'où il en résulte la solution générale est de la forme.

$$u(t) = u_0(t) \sin \theta t$$

On dérive deux fois et on remplace dans l'Equation III.8, on obtient.

$$\begin{aligned} -u_0 \theta^2 \sin \theta t + \omega_n^2 u_0 \sin \theta t &= \frac{F_0}{m} \sin \theta t \\ \Leftrightarrow u_0 (\omega_n^2 - \theta^2) \sin \theta t &= \frac{F_0}{m} \sin \theta t \\ \Leftrightarrow u_0 &= \frac{F_0/m}{(\omega_n^2 - \theta^2)} = \frac{F_0/m}{(k/m - \theta^2)} = \frac{F_0}{(k - m\theta^2)} \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Divisons le deuxième membre de l'Equation III.9 par k , on trouve.

$$u_0 = \frac{F_0/k}{\left(1 - \frac{m}{k} \theta^2\right)} = \frac{F_0/k}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega_n}\right)^2} = \frac{u_{st}}{1 - r^2}$$

Où r : rapport des fréquences tel que $r = \frac{\theta}{\omega_n}$ et u_{st} : déflexion statique produite par l'action de la force F , d'amplitude F_0 selon sa direction.

On définit le *facteur d'amplification dynamique* μ par l'expression.

$$\mu = \frac{u_0}{u_{st}} = \frac{1}{1 - r^2} \quad (\text{III.10})$$

μ Dépend du rapport qui existe entre les pulsations ω_n et θ . Trois cas de figures sont possibles pour les limites du facteur d'amplification dynamique μ (Fig III.4)

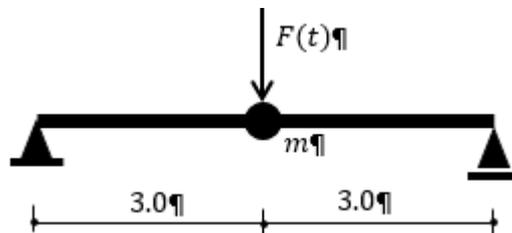
- $r = \frac{\theta}{\omega_n} < 1 \Rightarrow \mu > 0 \Rightarrow$ le mouvement est positif et de même phase de la force ;
- $r = \frac{\theta}{\omega_n} > 1 \Rightarrow \mu < 0 \Rightarrow$ le mouvement est négatif et déphasé par rapport à la force perturbatrice ;
- $r = \frac{\theta}{\omega_n} = 1 \Rightarrow \mu \rightarrow \infty \Rightarrow$ cas de résonance à éviter ;
- Ce facteur d'amplification dynamique, permet de calculer la force statique équivalente à l'effet dynamique de F_0 .

**Application

Déterminer les caractéristiques dynamiques, ainsi que la force statique équivalente à l'action dynamique de la poutre montrée sur la figure ci-dessous. La poutre est soumise à l'action simultanée de la charge statique $Q = m g = 4 \text{ tf}$ et la force dynamique :

$$F(t) = F_0 \sin \theta t$$

Avec : $F_0 = 3 \text{ tf}$, $\theta = 30 \text{ rad/s}$, $EI = 3000 \text{ tf/m}^2$ et $l = 6 \text{ m}$.



**Solution

On calcule la déflexion statique U_{st} induite par la charge statique $Q = 4 \text{ tf}$, en appliquant le théorème de multiplication des diagrammes des moments de Werescheaguine ($M_{Qx} \times m_{1x}$) (voir figure ci-dessous).

$$M_{Q,max} = \frac{Q \cdot L}{4} = \frac{4 \times 6}{4} = 6 \text{ tf} \cdot \text{m}$$

$$m_{1,max} = \frac{1 \cdot L}{4} = \frac{1 \times 6}{4} = 1 \text{ tf} \cdot \text{m}$$

$$U_{st} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 3 \times \frac{2}{3} \times 1.5 \right) \times 2 = \frac{18}{EI} = 0.6 \text{ cm}$$

$$\omega_n = \sqrt{g/U_{st}} = \sqrt{981/0.6} = 40.435 \text{ rad/sec}$$

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{40.435}{2\pi} = 6.435 \text{ Htz}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_n} = 0.1555 \text{ sec}$$

$$r = \frac{\theta}{\omega_n} = \frac{30}{40.435} = 0.742$$

$$\mu = \frac{1}{1 - r^2} = \frac{1}{1 - 0.742^2} = 2.225$$

D'où la force statique équivalente à l'action dynamique est.

$$F_{st,max} = \mu \times F_{dy,max} = 2.225 \times F_0 (\sin \theta t)_{max} = 2.225 \times 3 = 6.675 \text{ tf}$$

*On aura deux cas possibles :

- Sous l'action une force dynamique positive (de bas en haut), on ajoute son effet à la charge statique soit :

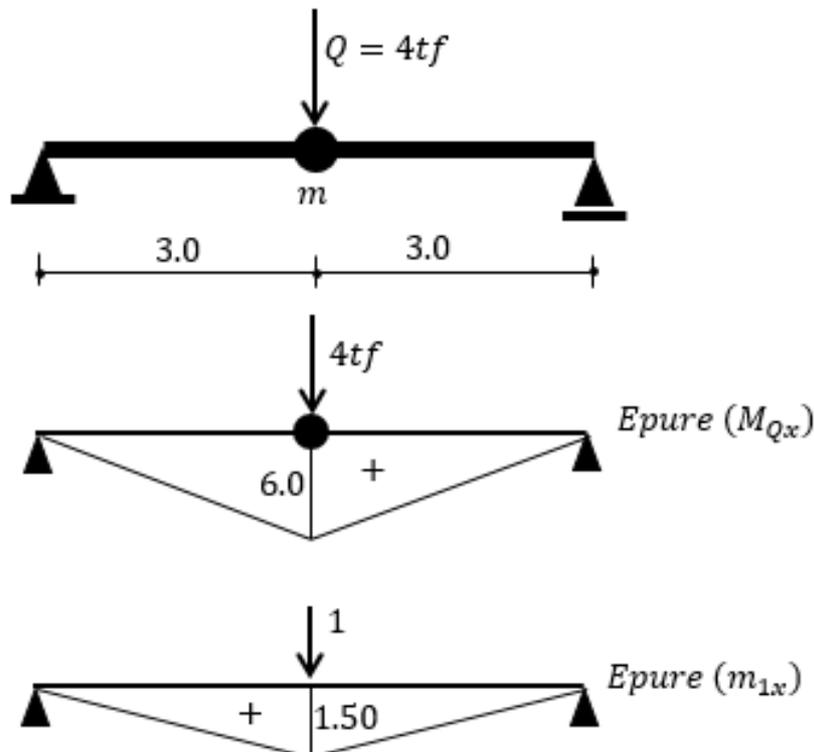
$$F_{cumul}^{(+)} = Q + F_{st,max} = 4 + 6.675 = 10.675 \text{ tf}$$

$$M_{max,Q+F_{st}} = \frac{10.675 \times 6}{4} = 16.012 \text{ tf.m}$$

- Sous l'action une force dynamique négative (de haut en bas), on diminue son effet à la charge statique soit :

$$F_{cumul}^{(-)} = F_{st,max} - Q = 6.675 - 4 = 2.675 \text{ tf}$$

$$M_{max,F_{st}-Q} = \frac{2.675 \times 6}{4} = 4.0125 \text{ tf.m}$$



III.5 ANALYSE DE LA REPONSE SISMIQUE D'UN SYSTEME 1DDL

Pour un historique d'accélération donné (accélérogramme : courbe accélération Vs temps de secousse) du mouvement sismique, la réponse du système viscoélastique (amorti) 1DDL peut être obtenir soit par une analyse du domaine temporel ou une analyse du domaine fréquentiel.

III.5.1 Détermination de la réponse par l'analyse temporelle

Cette méthode permet d'évaluer la réponse du système 1DDL linéaire ou non linéaire. Parmi les méthodes applicables, on citera, l'intégrale de Duhamel et les schémas numériques, basés sur la technique des différences finies de l'intégrale de Newmark et la discrétisation de Runge-Kutta. On s'intéresse dans ce chapitre par la solution donnée par l'intégrale de Duhamel.

III.5.1.1 Réponse d'un système 1DDL par l'intégrale de Duhamel

L'intégrale de Duhamel est utilisée pour définir la réponse d'un système 1DDL, soumis à un mouvement sismique du sol. L'équation du mouvement de ce système sujet à une accélération sismique du mouvement du sol $\ddot{u}_g(t)$ est donnée par l'Equation III.1. La solution peut être divisée en solution homogène et particulière comme suite :

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) \quad (\text{III.11})$$

Où $u_h(t)$: Solution homogène et $u_p(t)$ la solution particulière. La solution homogène ou complémentaire est la réponse du système libre avec amortissement est donnée par l'équation.

$$u_h(t) = g(t)u_0 + h(t)\dot{u}_0$$

Où u_0 et \dot{u}_0 sont respectivement le déplacement initial et la vitesse initiale du système 1DDL (Fig III.4).

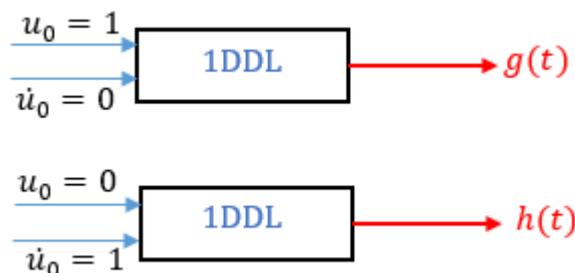


Figure III.4 Réponse d'un système 1DDL aux conditions initiales u_0 et \dot{u}_0

Introduisant les conditions aux limites (Fig III.4) dans la partie de solution homogène, $g(t)$ et $h(t)$, on obtient leurs expressions.

$$g(t) = e^{-\xi\omega_n t} \left[\cos\omega_{nd}t + \frac{\xi\omega_n}{\omega_{nd}} \sin\omega_{nd}t \right] \quad (\text{III.12})$$

$$h(t) = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_{nd}} \sin\omega_{nd}t \quad (\text{III.13})$$

- Pour obtenir la solution particulière de l'Equation III.11, on suppose qu'une accélération irrégulière du sol est appliquée pour un laps de temps très court (Fig III.5). Les vibrations causées par toutes les impulsions sont additionnées pour obtenir la réponse totale.

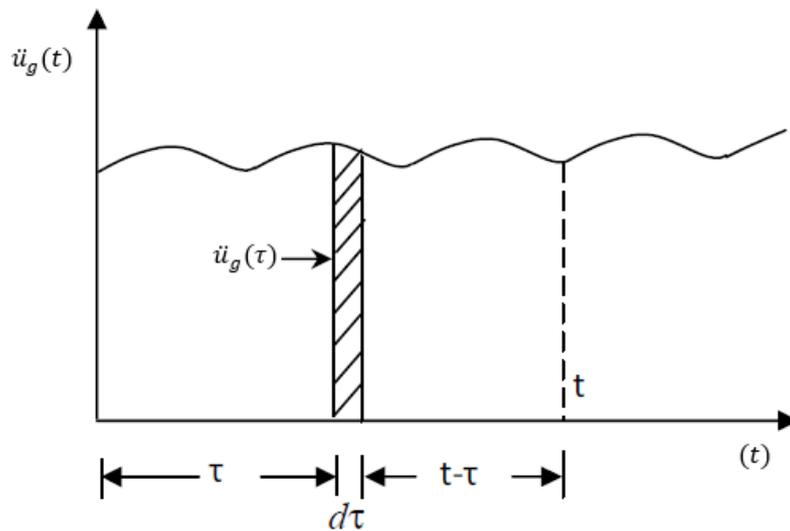


Figure III.5 Impulsion issue de l'accélération sismique

Considérons la vibration causée par une seule impulsion. La deuxième loi de Newton stipule que le changement relatif momentané de la masse, est égal à la force appliquée.

$$\frac{d}{dt}(m\dot{u}(t)) = -m\ddot{u}_g(t) \quad (\text{III.14})$$

Alors, par analogie, pour un changement incrémental temporel $d\tau$ on peut écrire.

$$\frac{d}{d\tau}(m\dot{u}(t)) = -m\ddot{u}_g(\tau) \Rightarrow d(m\dot{u}(t)) = -m\ddot{u}_g(\tau) \quad (\text{III.15})$$

Il à noter qu'un petit changement dans la vitesse ou le déplacement, survenant durant l'intervalle du temps $d\tau$ a un effet négligeable sur l'allure du vibration du système. le changement de la vitesse durant cet interval est.

$$\frac{d}{d\tau}\dot{u}(t) = -\ddot{u}_g(\tau) \Rightarrow d\dot{u}(t) = -\ddot{u}_g(\tau)d\tau \quad (\text{III.16})$$

Donc, pour un changement de déplacement à l'instant t , engendré par l'impulsion au moment τ est donnée par (Figs III.4 & 5).

$$\frac{d}{d\tau} u_p(t) = -\ddot{u}_g(\tau) h(t - \tau) \Rightarrow du_p(t) = -\ddot{u}_g(\tau) d\tau h(t - \tau) \quad (\text{III.17})$$

Ainsi, chaque impulsion montrée sur la Figure III.5 va produire une vibration de cette forme. Sachant que le système est linéaire, l'effet de chaque impulsion est indépendant de l'autre. D'où le mouvement résultant total est obtenu par le principe de superposition, c.à.d.

$$u_p(t) = -\int_0^t \ddot{u}_g(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (\text{III.18})$$

Cette expression est connue sous le nom : **convulsion¹ ou intégrale de Duhamel**. Alors la réponse totale donnée par l'Equation III.11 devient.

$$u(t) = g(t)u_0 + h(t)\dot{u}_0 - \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (\text{III.19})$$

- Pour un système au repos ($u_0 = 0, \dot{u}_0 = 0$), la réponse (Eq. III.19) devient.

$$u(t) = -\int_0^t \ddot{u}_g(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (\text{III.20})$$

Cette solution est connue sous le nom : **solution en domaine temporel** car la réponse est calculée en considérant le temps comme variable.

III.5.1.2 Analyse reccurentielle de la solution temporelle d'un système 1DDL

Pour obtenir les formules reccurentielles d'une solution en domaine temporel, on considère un système 1DDL dont ses déplacement et vitesse sont définis au temps initial t_i et la réponse est requise à l'instant t_{i+1} (Fig III.6). On suppose que u_i et \dot{u}_i sont respectivement le déplacement initial et la vitesse initiale du système.

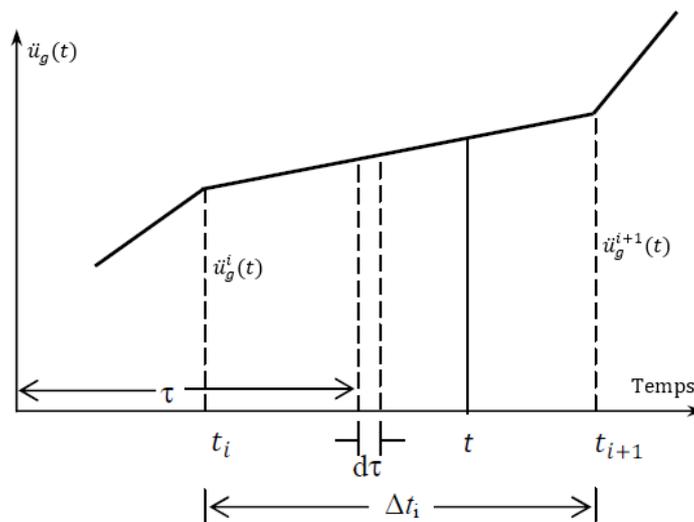


Figure III.6 Variation linéaire de l'accélération du sol durant un pas de temps Δt_i

¹ Intégrale du produit de deux fonctions de même variable décalées l'une à l'autre.

La réponse du système en reproduisant l'Equation III.19 est exprimée comme suite :

$$u(t) = g(t - t_i)u_i + h(t - t_i)\dot{u}_i - \int_{t_i}^t \ddot{u}_g(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (\text{III.19})$$

$$\begin{cases} g(t - t_i) = e^{-\xi\omega_n(t-t_i)} \left[\cos\omega_{nd}(t - t_i) + \frac{\xi\omega_n}{\omega_{nd}} \sin\omega_{nd}(t - t_i) \right] \\ h(t - t_i) = \frac{e^{-\xi\omega_n(t-t_i)}}{\omega_{nd}} \sin\omega_{nd}(t - t_i) \\ \ddot{u}_g(\tau) = \ddot{u}_g^i + \frac{\ddot{u}_g^{i+1} - \ddot{u}_g^i}{\Delta t_i} (\tau - t_i) \\ h(t - \tau) = \frac{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}{\omega_{nd}} \sin\omega_{nd}(t - \tau) \end{cases}$$

Remplaçons $\ddot{u}_g(\tau)$ et $h(t - \tau)$ par ces valeurs dans l'Equation III.19, on obtient.

$$u(t) = g(t - t_i)u_i + h(t - t_i)\dot{u}_i - \int_{t_i}^t \left[\ddot{u}_g^i + \frac{\ddot{u}_g^{i+1} - \ddot{u}_g^i}{\Delta t_i} (\tau - t_i) \right] \left[\frac{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}{\omega_{nd}} \sin\omega_{nd}(t - \tau) \right] d\tau$$

$$u(t) = g(t - t_i)u_i + h(t - t_i)\dot{u}_i + f_1(t - t_i)\ddot{u}_g^i + f_2(t - t_i)\ddot{u}_g^{i+1} \quad (\text{III.20})$$

De même la vitesse du système à l'instant t est donnée par l'expression.

$$\dot{u}(t) = \dot{g}(t - t_i)u_i + \dot{h}(t - t_i)\dot{u}_i + \dot{f}_1(t - t_i)\ddot{u}_g^i + \dot{f}_2(t - t_i)\ddot{u}_g^{i+1} \quad (\text{III.21})$$

Aux instants $t = t_{i+1}$, $u(t) = u_{i+1}$ et $\dot{u}(t) = \dot{u}_{i+1}$. Le déplacement et la vitesse du système sont exprimés comme suit.

$$u_{i+1} = g(\Delta t_i)u_i + h(\Delta t_i)\dot{u}_i + f_1(\Delta t_i)\ddot{u}_g^i + f_2(\Delta t_i)\ddot{u}_g^{i+1} \quad (\text{III.22})$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{g}(\Delta t_i)u_i + \dot{h}(\Delta t_i)\dot{u}_i + \dot{f}_1(\Delta t_i)\ddot{u}_g^i + \dot{f}_2(\Delta t_i)\ddot{u}_g^{i+1} \quad (\text{III.23})$$

Sous forme matricielle ces deux dernières équations peuvent être écrites comme suite.

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1} \\ \dot{u}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g(\Delta t_i) & h(\Delta t_i) \\ \dot{g}(\Delta t_i) & \dot{h}(\Delta t_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ \dot{u}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(\Delta t_i) & f_2(\Delta t_i) \\ \dot{f}_1(\Delta t_i) & \dot{f}_2(\Delta t_i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_g^i \\ \ddot{u}_g^{i+1} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.24})$$

Ou bien

$$\begin{Bmatrix} u_{i+1} \\ \dot{u}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ \dot{u}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_g^i \\ \ddot{u}_g^{i+1} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Ou encore

$$\{\bar{u}_{i+1}\} = [A]\{\bar{u}_i\} + [B]\{\ddot{u}_g^i\} \quad (\text{III.26})$$

Où

$$\{\bar{u}_{i+1}\} = \begin{Bmatrix} u_{i+1} \\ \dot{u}_{i+1} \end{Bmatrix}, \{\bar{u}_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ \dot{u}_i \end{Bmatrix}, \{\ddot{u}_g^i\} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_g^i \\ \ddot{u}_g^{i+1} \end{Bmatrix}, [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ et } [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Les éléments des matrices $[A]$ et $[B]$ sont donnés par Nigam et Jennings (1969).

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= e^{-\xi\omega_n\Delta t_i} \left[\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\omega_{nd}\Delta t_i + \cos\omega_{nd}\Delta t_i \right] \\ a_{12} &= \frac{e^{-\xi\omega_n\Delta t_i}}{\omega_{nd}} \sin\omega_{nd}\Delta t_i \\ a_{21} &= -\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \times e^{-\xi\omega_n\Delta t_i} \sin\omega_{nd}\Delta t_i \\ a_{22} &= e^{-\xi\omega_n\Delta t_i} \left[\cos\omega_{nd}\Delta t_i - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\omega_{nd}\Delta t_i \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.27})$$

$$\left. \begin{aligned} b_{11} &= e^{-\xi\omega_n\Delta t_i} \left[\left(\frac{2\xi^2-1}{\omega_n^2\Delta t_i} + \frac{\xi}{\omega_n} \right) \frac{\sin\omega_{nd}\Delta t_i}{\omega_{nd}} + \left(\frac{2\xi}{\omega_n^3\Delta t_i} + \frac{1}{\omega_n^2} \right) \cos\omega_{nd}\Delta t_i \right] \\ b_{12} &= e^{-\xi\omega_n\Delta t_i} \left[\left(\frac{2\xi^2-1}{\omega_n^2\Delta t_i} \right) \frac{\sin\omega_{nd}\Delta t_i}{\omega_{nd}} + \frac{2\xi}{\omega_n^3\Delta t_i} \cos\omega_{nd}\Delta t_i \right] - \frac{1}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n^3\Delta t_i} \\ b_{21} &= e^{-\xi\omega_n\Delta t_i} \left[\left(\frac{2\xi^2-1}{\omega_n^2\Delta t_i} + \frac{\xi}{\omega_n} \right) \left(\cos\omega_{nd}\Delta t_i - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\omega_{nd}\Delta t_i \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2\xi}{\omega_n^3\Delta t_i} + \frac{1}{\omega_n^2} \right) (\omega_{nd}\sin\omega_{nd}\Delta t_i + \xi\cos\omega_{nd}\Delta t_i) \right] + \frac{1}{\omega_n^2\Delta t_i} \\ b_{22} &= e^{-\xi\omega_n\Delta t_i} \left[\frac{2\xi^2-1}{\omega_n^2\Delta t_i} \left(\cos\omega_{nd}\Delta t_i - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\omega_{nd}\Delta t_i \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\xi}{\omega_n^3\Delta t_i} (\omega_{nd}\sin\omega_{nd}\Delta t_i + \xi\cos\omega_{nd}\Delta t_i) \right] - \frac{1}{\omega_n^2\Delta t_i} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.28})$$

Et en fin la réponse du système 1DDL en termes d'accélération, peut être obtenue en reproduisant l'équation du mouvement.

$$u_{i+1} = \frac{(-c\dot{u}_{i+1} - ku_{i+1} - m\ddot{u}_g^{i+1})}{m} \quad (\text{III.29})$$

**Application

Soit le système 1DDL soumis à un mouvement harmonique d'une accélération $\ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_0 \sin\theta t$. Déterminer la réponse du système moyennant la méthode temporelle. la pulsation naturelle et le facteur d'amortissement critique du système sont respectivement ω_n et ξ .

**Solution

L'équation du mouvement est donnée donc par l'équation.

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_n\dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = -\ddot{u}_0 \sin\theta t$$

De l'Equation III.20, on peut écrire

$$u(t) = -\int_0^t \ddot{u}_g(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$\text{Avec } \ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_0 \sin\theta t \text{ et } h(t-\tau) = \frac{e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}}{\omega_{nd}} \sin\omega_{nd}(t-\tau)$$

D'où.

$$\begin{aligned}
 u(t) &= - \int_0^t \ddot{u}_0 \sin \theta \tau \frac{e^{-\xi \omega_n (t-\tau)}}{\omega_{nd}} \sin \omega_{nd} (t-\tau) d\tau \\
 &= - \frac{\ddot{u}_0}{\omega_n^2} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \sin(\theta t - \Omega)
 \end{aligned}$$

Où, $r = \frac{\theta}{\omega_n}$, et $\Omega = \tan^{-1} \left(\frac{2\xi r}{1-r^2} \right)$

Chapitre 3bis : Rappel Mathématique sur les équations différentielles

Equations différentielles du second ordre

1.1 Equations différentielles homogènes du second ordre à coefficient constants

Sont de la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + qx = 0 \quad (1.1)$$

p et q sont des constantes réelles. Pour trouver l'intégrale (la solution) générale de cette équation, il suffit de trouver deux solutions particulièrement indépendantes. Cherchons les solutions particulières sous la forme :

$$X = e^{kt} \text{ où } k = \text{constante} \quad (1.2)$$

D'où ; $\frac{dx}{dt} = ke^{kt}$ et $\frac{d^2x}{dt^2} = k^2e^{kt}$, substituons ces expressions des dérivées dans l'équation (1) on trouve :

$e^{kt}(k^2 + pk + q) = 0$, comme $e^{kt} \neq 0$, on doit avoir :

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (1.3)$$

Si k est une racine de l'équation (1.3), la fonction e^{kt} sera solution de l'équation (1.1). L'équation est appelée équation caractéristique de l'équation (1.1).

Les racines de l'équation (1.3) sont :

$$\Delta = p^2 - 4q \Rightarrow k_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\text{et, } k_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{-p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Trois cas peuvent se présenter :

1. k_1 et k_2 sont des nombres réels distincts ($k_1 \neq k_2$).
2. k_1 et k_2 sont des nombres complexes.
3. k_1 et k_2 sont des nombres réels égaux ($k_1 = k_2$).

Premier cas : on a pour solution particulières :

$X_1 = e^{k_1t}$ et $X_2 = e^{k_2t}$, ces solutions sont linéairement indépendantes car :

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{e^{k_1t}}{e^{k_2t}} = e^{(k_1 - k_2)t} \neq \text{constante}$$

La solution générale s'écrit par conséquent comme suite :

$$X = C_1 e^{k_1t} + C_2 e^{k_2t}$$

Application. 1.1 :

Trouver la solution générale de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = 0 .$$

Solution :

L'équation caractéristique est comme suite :

$$k^2 + k - 2 = 0, \Delta = 1 - 4(-2) = 9 \Rightarrow k_1 = 1 \text{ et } k_2 = -2$$

Et la solution générale sera :

$$X = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$$

Second cas : étant donné que les racines complexes sont conjuguées, posons :

$$k_1 = \alpha + i\beta \text{ et } k_2 = \alpha - i\beta \text{ où :}$$

$$\alpha = \frac{-p}{2} \text{ et } \beta = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

On peut mettre les solutions particulières sous la forme :

$$X_1 = e^{(\alpha+i\beta)t} \text{ et } X_2 = e^{(\alpha-i\beta)t} \quad (1.4)$$

La solution générale de l'équation (1.1) est :

$$X = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \quad (1.5)$$

Où, C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

Nota :

Si l'équation caractéristique admet deux racines imaginaires pures, on aura :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + qx = 0 \quad \text{avec } p = 0 \text{ et la solution est de la forme :}$$

$$X = e^{kt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = k e^{kt} \text{ et } \frac{d^2x}{dt^2} = k^2 e^{kt}$$

L'équation différentielle devient :

$$e^{kt} (k^2 + q) = 0, \text{ avec } k_{1,2} = \mp i\sqrt{q} = \mp i\beta \text{ et } \alpha = 0.$$

Par conséquent la solution (5) sera de la forme :

$$X = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t$$

Application. 1. 2 :

Soit l'équation différentielle du second ordre définie par l'expression suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

-Trouver l'intégrale et la solution particulière satisfaisant les conditions initiales :

$$(x)_{t=0} = 0 \text{ et } \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 1$$

Solution :

L'équation caractéristique est comme suite :

$$k^2 + 2k + 5 = 0 \Rightarrow \Delta' = 1 - 5 = -4 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \mp 2i \Rightarrow k_1 = -1 + 2i$$

et $k_2 = -1 - 2i$

L'intégrale générale est donc : $X = e^{-1}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$

Cherchons maintenant la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales.

Selon la 1^{ère} condition initiale : $(x)_{t=0} = 0 \Rightarrow 0 = e^{-0}(C_1 * 1 + C_2 * 0) \Rightarrow C_1 = 0$

De la seconde condition initiale : $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 1$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = -e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + e^{-t}(-2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t)$$

$$\Rightarrow 1 = -(C_1 + 0) + 1(0 + 2C_2), \text{ avec } C_1 = 0 \Rightarrow 2C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1/2$$

La solution particulière recherchée est donc :

$$X = \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$$

Application. 1.3 :

Trouver les solutions générale et particulière, satisfaisant les conditions initiales suivantes : $(x)_{t=0} = 0$ et $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 3$, relatives à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0$$

Solution :

L'équation caractéristique est : $k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k \pm 3i$

L'intégrale générale est : $X = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t$

Cherchons maintenant la solution particulière :

$$(x)_{t=0} = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 * 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = -3C_1 \sin 3t + 3C_2 \cos 3t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 3 \Rightarrow 3 = 0 + 3C_2 \Rightarrow C_2 = 1$$

La solution particulière recherchée est donc : $X = \sin 3t$

Troisième cas : l'intégrale générale est de la forme : $X = C_1 e^{k_1 t} + C_2 t e^{k_2 t}$

Application. 1.4 :

Trouver l'intégrale générale de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

Solution :

L'équation caractéristique est : $k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 2$

La solution générale s'écrit comme suite :

$$X = e^{2t}(C_1 + C_2 t)$$

1.2 Equations différentielles non homogènes du second ordre à coefficient constants

Elles sont de la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + qx = f(t) \quad (1.6)$$

1.2.1. Second membre $f(t) = P_n(t)e^{\alpha t}$

1.2.1.1. Cas où α n'est pas racine de l'équation caractéristique : $k^2 + pk + q = 0$

Application. 1.5 :

Trouver les solutions générale et particulière de l'équation différentielle du second ordre

suiivante : $\frac{d^2x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 3x = t$

Solution :

L'équation caractéristique :

$$k^2 + 4k + 3 = 0 \Rightarrow \Delta' = 4 - 3 = 1 \Rightarrow k_1 = -2 + 1 = -1 \text{ et } k_2 = -2 - 1 = -3$$

La solution générale de l'équation différentielle homogène est comme suite :

$$\bar{X} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$$

Comme le second membre de l'équation différentielle non homogène est de la forme : $f(t) = t = t e^{0t}$ et 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique $k^2 + 4k + 3 = 0$, nous cherchons une solution particulière sous la forme : $X^* = Q(t)e^{0t}$

c.à.d. $X^* = A_0 t + A_1$ avec $\frac{dx^*}{dt} = A_0$ et $\frac{d^2 x^*}{dt^2} = 0$

Remplaçons cette solution dans l'équation différentielle proposée on obtient :

$$4A_0 + 3(A_0 t + A_1) = t \Rightarrow (4A_0 + 3A_1) + 3A_0 t = t$$

On fait certaine identification entre les deux membres de l'égalité, on peut écrire :

$$\begin{cases} 4A_0 + 3A_1 = 0 \\ 3A_0 = 1 \end{cases}$$

D'où

$$A_0 = \frac{1}{3} \text{ et } A_1 = -\frac{4}{9} \quad : \text{ Par conséquent : } X^* = \frac{1}{3}t - \frac{4}{9}$$

$$\text{La solution générale } X = \bar{X} + X^* = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t} + \frac{1}{3}t - \frac{4}{9}$$

Application. 1.6 :

Trouver les solutions générale et particulière de l'équation différentielle du second ordre suivante : $\frac{d^2 x}{dt^2} + 9 \frac{dx}{dt} = (t^2 + 1)e^{3t}$

Solution :

- L'équation caractéristique est : $k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k \pm 3i$ et la solution générale de l'équation homogène est : $\bar{X} = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t$

- Le second membre de l'équation donnée $= (t^2 + 1)e^{3t}$ est de la forme : $P_2(t)e^{3t}$
Comme 3 n'est pas racine de l'équation caractéristique $k^2 + 9 = 0$, nous cherchons une solution particulière de la forme : $f(t) = (At^2 + Bt + C)e^{3t}$

Dérivons et substituons dans l'équation $\frac{d^2 x}{dt^2} + 9 \frac{dx}{dt} = (t^2 + 1)e^{3t}$, on aura :

$$A = \frac{1}{18}, B = \frac{-1}{27}, C = \frac{5}{81}, \text{ la solution particulière est de la forme :}$$

$$X^* = \left(\frac{1}{18}t^2 - \frac{t}{27} + \frac{5}{81} \right) e^{3t}$$

et la solution générale de l'équation non homogène sera :

$$X = \bar{X} + X^* = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t + \left(\frac{1}{18}t^2 - \frac{t}{27} + \frac{5}{81} \right) e^{3t}$$

1.2.1.2. Cas où α est racine simple de l'équation caractéristique

Application. 1.7 :

Trouver les solutions générale et particulière de l'équation différentielle du second ordre suivante : $\frac{d^2 x}{dt^2} - 7 \frac{dx}{dt} + 6x = (t - 2)e^t$

Solution :

$$\text{On peut écrire : } \frac{d^2 x}{dt^2} - 7 \frac{dx}{dt} + 6x = (t - 2)e^t = (t - 2)e^{1 \cdot t}$$

L'équation caractéristique : $k^2 - 7k + 6 = 0 \Rightarrow k_1 = 6 \text{ et } k_2 = 1$

La solution générale de l'équation homogène : $\bar{X} = C_1 e^{6t} + C_2 e^t$

On constate que le second membre est de la forme : $P_1 e^{1*t}$ où 1 est racine simple de l'équation caractéristique, nous cherchons une solution particulière sous la forme :

$$X^* = t(At + B)e^t \Rightarrow \text{on tire: } A = \frac{-1}{10}, B = \frac{9}{25} \Rightarrow X^* = t\left(\frac{-1}{10}t + \frac{9}{25}\right)e^t$$

Et la solution générale de l'équation non homogène sera comme suite :

$$X = \bar{X} + X^* = C_1 e^{6t} + C_2 e^t + t\left(\frac{-1}{10}t + \frac{9}{25}\right)e^t$$

1.2.2. Second membre $f(t) = P_n(t)e^{\alpha t} \cos \beta t + Q_n(t)e^{\alpha t} \sin \beta t$

- si $(\alpha + i\beta)$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, la solution particulière de l'équation (6) est de la forme : $X^* = U(t)e^{\alpha t} \cos \beta t + V(t)e^{\alpha t} \sin \beta t$;
- si $(\alpha + i\beta)$ est une racine simple de l'équation caractéristique, la solution particulière de l'équation (6) est : $X^* = t[U(t)e^{\alpha t} \cos \beta t + V(t)e^{\alpha t} \sin \beta t]$;

1.2.3. Second membre $f(t) = M \cos \beta t + N \sin \beta t$, M et N constantes

- si βi n'est pas racine de l'équation caractéristique, la solution particulière de l'équation (6) est de la forme : $X^* = A \cos \beta t + B \sin \beta t$;
- si βi est racine simple de l'équation caractéristique, la solution particulière de l'équation (1.6) est de la forme : $X^* = t(\cos \beta t + B \sin \beta t)$.

Application. 1.8 :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 5x = 2 \cos t$$

$$f(t) = 2 \cos t = M \cos \beta t + N \sin \beta t \Rightarrow M = 2, \text{ et } \beta = 1$$

$$\text{L'équation caractéristique : } k^2 + 2k + 5 = 0 \Rightarrow \Delta' = -4 = \mp 2i \Rightarrow k_1 = -1 + 2i \text{ et } k_2 = -1 - 2i$$

La solution générale de l'équation différentielle homogène sans le second membre est :

$$\bar{X} = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$$

Comme $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, la solution particulière de l'équation non homogène est de la forme : $X^* = A \cos t + B \sin t$, car $\beta = 1$. On dérive et on remplace dans l'équation différentielle proposée, on obtient :

$$\frac{dx^*}{dt} = -A \sin t + B \cos t \quad \text{et} \quad \frac{d^2 x^*}{dt^2} = -A \cos t - B \sin t$$

$$-A \cos t - B \sin t - 2A \sin t + 2B \cos t + 5A \cos t + 5B \sin t = 2 \cos t$$

$$4A \cos t + 4B \sin t - 2A \sin t + 2B \cos t = 2 \cos t$$

$$\Rightarrow (4A + 2B) \cos t + (4B - 2A) \sin t = 2 \cos t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4A + 2B = 2 \\ 4B - 2A = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{2}{5} \text{ et } B = \frac{1}{5}$$

La solution générale de l'équation non homogène est par conséquent comme suite :

$$X = \bar{X} + X^* = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + \frac{2}{5} \cos t + \frac{1}{5} \sin t$$

Application. 1.9 :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = \cos 2t \quad \text{donc on constate que } \beta = 2 \Rightarrow \beta i = 2i$$

L'équation caractéristique : $k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \mp 2i$ on constate que $2i$ est racine de l'équation caractéristique, la solution particulière de l'équation non homogène sera de la forme : $X^* = t(A\cos 2t + B\sin 2t)$, on dérive et on remplace dans l'équation proposée, on obtient : $A = 0, B = \frac{1}{4} \Rightarrow X^* = \frac{t}{4} \sin 2t$

La solution générale : $X = \bar{X} + X^* = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + \frac{t}{4} \sin 2t$

Application. 1.10 :

$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 3e^{2t} \cos t$, donc on constate que $\alpha = 2$ et $\beta = 1$

$k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = \mp 1 \Rightarrow \bar{X} = C_1 e^{-t} + C_2 e^t$

$2 + i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique donc :

$X^* = e^{2t}(A \cos t + B \sin t)$; avec $A = \frac{3}{10}$ et $B = \frac{3}{5}$

$X^* = e^{2t} \left(\frac{3}{10} \cos t + \frac{3}{5} \sin t \right)$

La solution générale de l'équation sera :

$X = \bar{X} + X^* = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + e^{2t} \left(\frac{3}{10} \cos t + \frac{3}{5} \sin t \right)$

Chapitre 4 : Pratiques de l'analyse modale des structures

IV.1 INTRODUCTION

Dans le but de réaliser une analyse sismique et une conception d'une structure à être implantée à un endroit particulier, l'histoire de l'actuel temps des secousses, est requise. Cependant, il n'est pas possible d'avoir tels enregistrements à chaque et tout endroit. De plus, l'analyse de la réponse sismique des structures ne peut pas être réalisée à la base d'une simple valeur de pic d'accélération du sol. Mais elle dépend également la fréquence que contient le mouvement du sol ainsi que leurs propres propriétés dynamiques. Pour surmonter ces difficultés, l'analyse modale est constituée l'une des méthodes les plus cohérentes à analyser le comportement dynamique des structures. Ce présent chapitre sera consacré à l'investigation de la réponse sismique des structures à plusieurs degrés de liberté (N-DDL) sujettes à des excitations dynamiques, exprimées sous forme d'un historique d'accélération ou chargement quelconque.

IV.2 SYSTEME A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTES (N-DDL)

Une structure peut être considérée comme un système oscillant à plusieurs degrés de liberté (N-DDL), lorsqu'on suppose que les masses sont concentrées dans un certain nombre précis de sections.

IV.2.1 Méthode de rigidité (ou méthode de déplacement)

Dans ce cas les forces agissant sur le système seront exprimées par l'intermédiaire des déplacements. Elle se base sur les hypothèses de calcul, suivantes :

- la masse totale de la structure est concentrée au niveau des planchers ;
- les planchers sont infiniment rigides dans leurs plans ;
- les planchers se déplacent horizontalement.

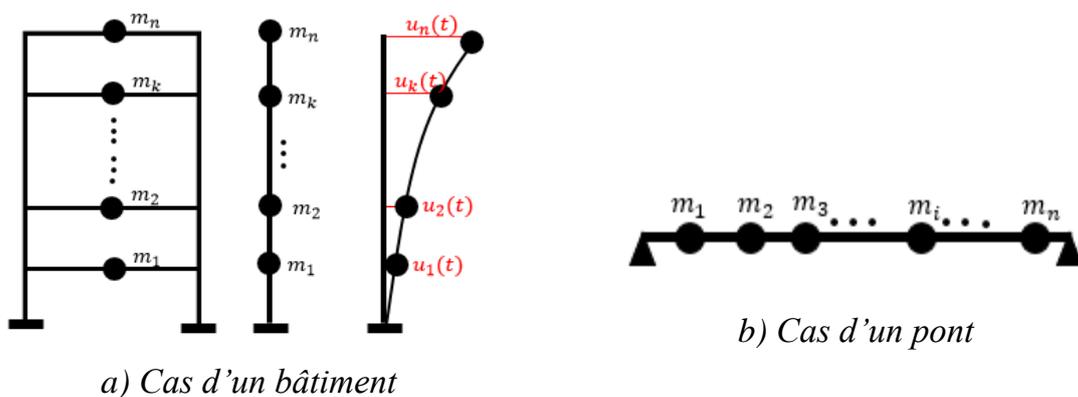


Figure IV.1 Modèle discrétisé des masses concentrées

IV.2.1.1 Etapes de calcul

1. Etablissement de l'équation caractéristique des fréquences

Un système de N-DDL peut être remplacé par N-systèmes de 1DDL. Cette notion permet d'aboutir à un système matriciel décrivant N -équations découplées du mouvement tel que.

$$[m]\{\ddot{u}(t)\} + [c]\{\dot{u}(t)\} + [k]\{u(t)\} = \{F(t)\} \quad (\text{IV.1})$$

Où $[m]$: Matrice des masses globales (réelles), matrice carrée ($n \times n$). $[k]$ Matrice de rigidité ($n \times n$) et tridiagonale. $[c]$ Matrice d'amortissement ($n \times n$) et tridiagonale. $\{u(t)\}$ Vecteur de déplacement relatif, $\{\dot{u}(t)\}$ vecteur de la vitesse relative, $\{\ddot{u}(t)\}$ vecteur d'accélération relative.

La méthode la plus utilisée pour résoudre ce système d'équations est dite méthode de superposition modale/ ou décomposition modale, qui permet d'aboutir à un système matriciel décrivant N – équations découplées du mouvement.

Pour trouver la forme de l'équation de fréquences, on suppose que la solution particulière de l'équation différentielle ordinaire (EDO) décrivant le mouvement d'un système de N-DDL, libre et sans amortissement est comme suite.

$$[m]\{\ddot{u}(t)\} + [k]\{u(t)\} = \{0\} \quad (\text{IV.2})$$

$$\{u\} = \{A\}\sin(\omega t + \varphi)$$

On dérive deux fois et on remplace dans l'équation IV.2, on trouve.

$$\{[k] - \omega_i^2[m]\}\{A_i\} = \{0\} \quad i = 1,2,3 \dots n \quad (\text{IV.3})$$

Cette équation représente un système d'équations linéaires homogènes. Pour que ce système ayant des solutions non nulles, il faut que son déterminant soit nul.

$$|[k] - \omega_i^2[m]| = \{0\} \quad (\text{IV.4})$$

L'Equation IV.4 est appelée *équation caractéristique des fréquences*, et les valeurs obtenues :

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \dots \dots < \omega_n$$

Sont appelées les fréquences propres. ω_1 Est dite fréquence fondamentale, ceci implique également pour les périodes du mouvement que :

$$T_1 > T_2 > T_3 \dots > T_n, \text{ Avec } \omega_i = \frac{2\pi}{T_i}. \text{ On aura pour chaque,}$$

$$\omega_i \rightarrow \text{un vecteur propre } \{\phi_i\}$$

2. Détermination des matrices de rigidité, amortissement et masses

• Matrice de rigidité

Soit un système de masses concentrées, représentant une structure à trois étages. La matrice de rigidité recherchée du système, est de la forme générale suivante :

$$[k] = [k_{ij}]$$

Où k_{ij} représente un élément de la matrice $[k]$ et défini comme suit : *rigidité de la masse m_i (point i) nécessaire pour s'opposer à un déplacement unitaire imposé à la masse m_j (point j).*

*pour déterminer les éléments k_{ij} de la matrice $[k]$, on procède de la manière suivante.

On impose à la masse m_i un déplacement linéaire et unitaire $u_i = 1$, (où $i = 1, 2, \dots, n$) et on fixe les autres masses (Fig IV.2).

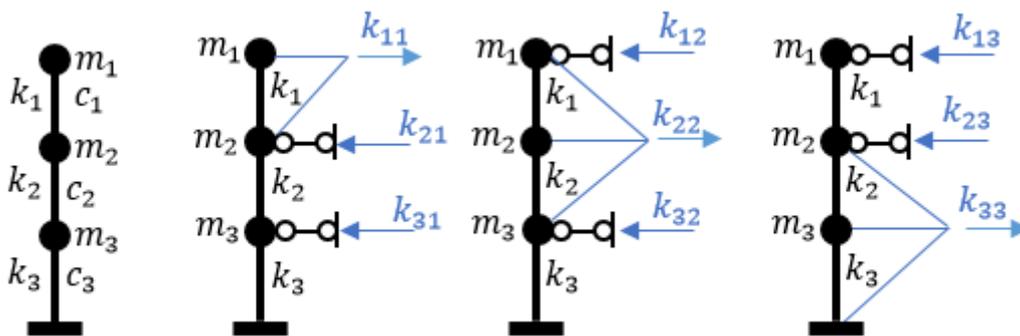


Figure IV.2 Méthode de détermination des éléments de la matrice de rigidité

De cette figure, on aura alors :

$$\begin{aligned} k_{11} &= k_1; & k_{21} &= -k_1 & \text{et} & k_{31} &= 0 \\ k_{12} &= -k_1; & k_{22} &= k_1 + k_2 & \text{et} & k_{32} &= -k_2 \\ k_{13} &= 0; & k_{23} &= -k_2 & \text{et} & k_{33} &= k_2 + k_3 \end{aligned}$$

D'où, la matrice de rigidité de ce système à trois masses concentrées.

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

D'une manière générale pour cette disposition des masses concentrées (m_1 : masse du plancher terrasse). **Dans le cas où l'ordre est inversé c.à.d. m_1 devient la masse du plancher RDC, toutes ces expressions des éléments de rigidité ou d'amortissement c_{ij} seront différentes.**

Alors, on peut déduire de cette configuration (Fig IV.2) pour le cas général que :

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= k_1 \\
 k_{ij} &= -k_i ; \text{ pour } i = j - 1 \\
 k_{ij} &= k_{i-1} + k_i ; \text{ pour } i = j \\
 k_{ij} &= k_j ; \text{ pour } i = j + 1
 \end{aligned}$$

Les autres éléments de la matrice $[k]$ sont nuls. On s'aperçoit que la matrice $[k]$ est matrice carrée de $(n \times n)$, symétrique et tridiagonale.

• **Matrice d'amortissement**

D'une façon analogique, la matrice d'amortissement est déduite. Elle est également carrée de $(n \times n)$, symétrique et tridiagonale. On traite ici une matrice d'amortissement d'un système de quatre masses concentrées par exemple.

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

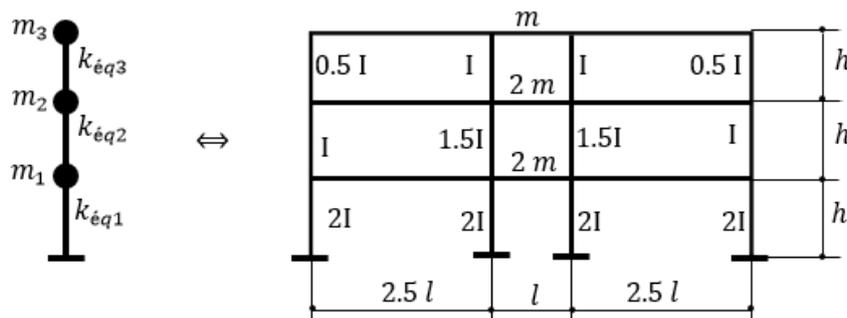
• **Matrice des masses**

La matrice des masses globales ou physiques (réelles) est aussi une matrice carrée de $(n \times n)$ symétrique mais diagonale et non tridiagonale.

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

****Application**

Soit l'ossature montrée sur la figure ci-dessous. Déterminer les vecteurs propres en utilisant la méthode de rigidité (ou de déplacement). On suppose que les poutres ayant une rigidité constante.



****Solution**

Le calcul des fréquences et vecteurs propres se fera à l'aide de l'équation caractéristique des fréquences de fréquences.

$$|[k] - \omega_i^2[m]| = \{0\}$$

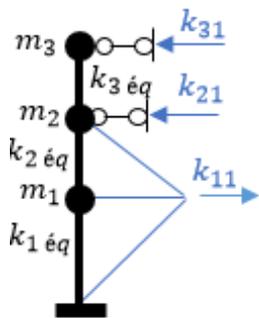
Sachant que (voir chapitre II) que pour un poteau de RDC ou EC, doublement encasturé

on a : $k = \frac{12EI}{h^3}$

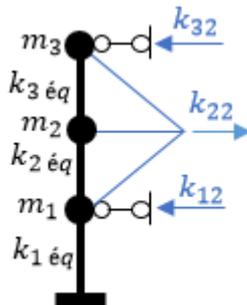
$$\Rightarrow k_{\acute{e}q1} = 2 \left(\frac{12EI}{h^3} + \frac{12EI}{h^3} + \frac{12EI}{h^3} + \frac{12EI}{h^3} \right) = \frac{96EI}{h^3}$$

$$k_{\acute{e}q2} = \frac{12EI}{h^3} + \frac{3}{2} \frac{12EI}{h^3} + \frac{3}{2} \frac{12EI}{h^3} + \frac{12EI}{h^3} = \frac{60EI}{h^3}$$

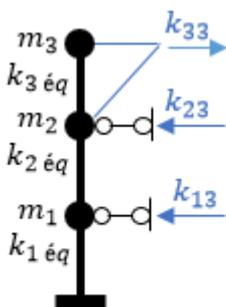
$$k_{\acute{e}q3} = \frac{1}{2} \frac{12EI}{h^3} + \frac{12EI}{h^3} + \frac{12EI}{h^3} + \frac{1}{2} \frac{12EI}{h^3} = \frac{36EI}{h^3}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} k_{11} = k_{1\acute{e}q} + k_{2\acute{e}q} = \frac{96EI + 60EI}{h^3} = \frac{96EI}{h^3} \\ k_{21} = -k_{2\acute{e}q} = -\frac{60EI}{h^3} \\ k_{31} = 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} k_{32} = -k_{3\acute{e}q} = -\frac{36EI}{h^3} \\ k_{22} = k_{2\acute{e}q} + k_{3\acute{e}q} = \frac{60EI + 36EI}{h^3} = \frac{96EI}{h^3} \\ k_{12} = -k_{2\acute{e}q} = -\frac{60EI}{h^3} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} k_{33} = k_{3\acute{e}q} = \frac{36EI}{h^3} \\ k_{23} = -k_{3\acute{e}q} = -\frac{36EI}{h^3} \\ k_{13} = 0 \end{cases}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \frac{12EI}{h^3} \begin{bmatrix} 13 & -5 & 0 \\ -5 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

*La matrice des masses

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*L'équation caractéristique des fréquences

$$| \{ [k] - \omega_i^2 [m] \} | = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{12EI}{h^3} \begin{bmatrix} 13 & -5 & 0 \\ -5 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} - \omega_i^2 \times m \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

Posons $\alpha = \frac{mh^3}{12EI} \omega_i^2$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} 13 & -5 & 0 \\ -5 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} (13 - 2\alpha) & -5 & 0 \\ -5 & (8 - 2\alpha) & -3 \\ 0 & -3 & (3 - 2\alpha) \end{vmatrix} = 0$$

Après développement on aura :

$$4\alpha^3 - 54\alpha^2 - 187\alpha - 120 = 0$$

Soient les racines de ce polynômes d'ordre trois.

$$\alpha_1 = \frac{mh^3}{12EI} \omega_1^2 = 0.827 \Rightarrow \omega_1 = 3.15 \sqrt{\frac{EI}{mh^3}}$$

$$\alpha_2 = \frac{mh^3}{12EI} \omega_2^2 = 4.366 \Rightarrow \omega_2 = 7.238 \sqrt{\frac{EI}{mh^3}}$$

$$\alpha_3 = \frac{mh^3}{12EI} \omega_3^2 = 4.366 \Rightarrow \omega_3 = 9.984 \sqrt{\frac{EI}{mh^3}}$$

On constate que $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$. Les racines du polynôme peuvent être aisément moyennant MATLAB via l'instruction `roots(poly)`.

Exemple de calcul rapide des racines d'un polynôme moyennant MATLAB

Soit l'équation polynomiale

$$x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - x + 4 = 0$$

Il suffit de déclaré un vecteur contenant les coefficients du polynôme :

`>> poly = [1 3 -8 12 -1 4];`

Et après la fonction `roots` de MATLAB

`>> roots(poly)`

`ans =`

```

-5.0623
1.1051 + 1.1056 i
1.1051 - 1.1056 i
-0.0739 + 0.5638 i
-0.0739 - 0.5638 i

```

- Les vecteurs propres seront déduits à partir de l'équation générale :

$$\{[k] - \omega_i^2[m]\}\{\phi_i\} = \{0\}$$

Avec

$$\begin{cases} \{\phi_1\} = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{pmatrix} \\ \{\phi_2\} = \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{pmatrix} \\ \{\phi_3\} = \begin{pmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Cette équation se transforme à un système linéaire de trois équations à trois inconnues.

Au début, on suppose que $\phi_{11} = \phi_{12} = \phi_{13} = 1.0$

*Alors pour $\alpha_1 = 0.827$, le système deviendra.

$$\begin{bmatrix} (13 - 2\alpha_1) & -5 & 0 \\ -5 & (8 - 2\alpha_1) & -3 \\ 0 & -3 & (3 - 2\alpha_1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (13 - 2\alpha_1) \times \phi_{11} - 5\phi_{21} = 0 \\ -5 \times \phi_{11} + (8 - 2\alpha_1)\phi_{21} - 3\phi_{31} = 0 \\ 0 \times \phi_{11} - 3\phi_{21} + (3 - 2\alpha_1)\phi_{31} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_{11} = 1.0 \\ \phi_{21} = 2.269 \\ \phi_{31} = 3.134 \end{cases} \Rightarrow \{\phi_1\} = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 2.269 \\ 3.134 \end{pmatrix}$$

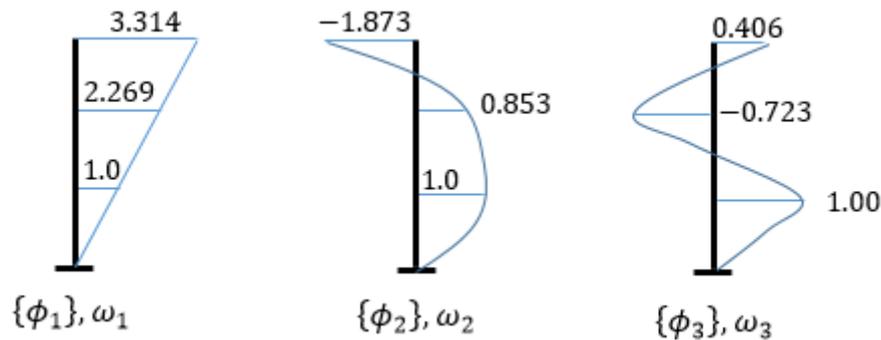
NOTA : Les valeurs du premier vecteur propre sont toujours positives

On procède de la même manière, on trouve.

$$\begin{cases} \phi_{12} = 1.0 \\ \phi_{22} = 0.853 \\ \phi_{32} = -1.873 \end{cases} \Rightarrow \{\phi_2\} = \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.853 \\ -1.873 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \phi_{13} = 1.0 \\ \phi_{23} = -0.723 \\ \phi_{33} = 0.406 \end{cases} \Rightarrow \{\phi_3\} = \begin{pmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ -0.723 \\ 0.406 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs propres peuvent être présentés graphiquement comme suit :



3. Calcul des caractéristiques modales

a) Condition d'orthogonalité

Une propriété importante dans la dynamique de structures. Considérons l'équation des fréquences :

$$\begin{aligned} \{[k] - \omega_i^2[m]\}\{A_i\} &= \{0\} \\ \Leftrightarrow [k]\{A_i\} - \omega_i^2[m]\{A_i\} &= \{0\} \end{aligned}$$

Le premier terme de cette égalité représente la force élastique ou de rappel $F_s = [k]\{A_i\}$, tandis que la quantité $F_I = \omega_i^2[m]\{A_i\}$ est la force d'inertie. Dans le cas où le système est soumis à une vibration libre provoqué par ses forces d'inertie qui entraînent des déplacements $\{A_i\}$.

- *Rappel sur le théorème de Betti*

Soient la poutre représentée sur la Figure IV.3, soumise à un système de chargement progressif de forces concentrées P_1 puis P_2 .

Ces forces sont appliquées progressivement l'une après l'autre aux sections 1 et 2. La charge P_1 produit un déplacement Δ_{11} dans la section 1 et Δ_{21} dans la section 2.

L'énergie potentielle produite par la charge P_1 est. $T_{P_1} = \frac{1}{2}P_1\Delta_{11}$.

Supposons maintenant que la poutre ainsi déformée, on maintient la force P_1 et on applique dans la section 2 une force P_2 . Sous l'effet de cette deuxième force, la poutre se déforme encore. Ainsi la force P_2 une déformation Δ_{12} dans la section 1 et une déformation Δ_{22} à la section 2. L'énergie potentielle produite par la charge P_2 est :

$$T_{P_2} = \frac{1}{2}P_2\Delta_{22} + P_1\Delta_{12}$$

A la fin le travail produit par les deux forces P_1 et P_2 est.

$$T_{P_1+P_2} = \frac{1}{2}P_1\Delta_{11} + P_1\Delta_{12} + \frac{1}{2}P_2\Delta_{22}$$

Le terme intermédiaire ($P_1\Delta_{12}$) provient du fait que dans la deuxième phase de déformation, la force P_1 a parcouru le déplacement Δ_{12} avec toute son intensité, donc il n'est pas affecté par le coefficient 1/2.

*Si on change l'ordre de chargement, c.à.d. on commence par P_2 à la section 2 puis P_1 à la section 1, on aura donc.

$$T_{P_2} = \frac{1}{2}P_2\Delta_{22}$$

On ajoute la force P_1 de la même façon on aura :

$$T_{P_1} = \frac{1}{2}P_1\Delta_{11} + P_2\Delta_{21}$$

A la fin le travail produit par les deux forces P_2 et P_1 est.

$$T_{P_2+P_1} = \frac{1}{2}P_2\Delta_{22} + P_2\Delta_{21} + \frac{1}{2}P_1\Delta_{11}$$

Sachant que

$$T_{P_1+P_2} = T_{P_2+P_1} \Rightarrow P_1\Delta_{12} = P_2\Delta_{21}$$



Figure IV.3 Présentation graphique du théorème de Betti

Donc d'après le théorème de Betti, on peut écrire.

$$\{F_{Im}\}^T \{A_n\} = \{F_{In}\}^T \{A_m\}$$

Avec :

$$\begin{cases} \{F_{Im}\}^T = \omega_m^2 \{A_m\}^T [M] \\ \{F_{In}\}^T = \omega_n^2 \{A_n\}^T [M] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \omega_m^2 \{A_m\}^T [M] \{A_n\} = \omega_n^2 \{A_n\}^T [M] \{A_m\}$$

Comme le résultat est un scalaire :

$$\Rightarrow \{A_m\}^T \{A_n\} = \{A_n\}^T \{A_m\}$$

$$e.g. [1 \quad 2 \quad 3] \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{Bmatrix} = [2 \quad 4 \quad 5] \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} = 2 + 8 + 15 = 25$$

$$\Leftrightarrow \omega_m^2 [M] \{A_m\} \{A_n\}^T = \omega_n^2 [M] \{A_m\} \{A_n\}^T$$

$$\Leftrightarrow (\omega_m^2 - \omega_n^2)[M]\{A_m\}\{A_n\}^T = 0; \text{ avec } \omega_m \neq \omega_n$$

$$\Rightarrow \{A_n\}^T [M] \{A_m\} = 0$$

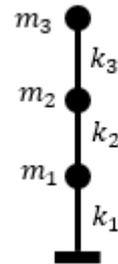
Cette dernière expression est dite première condition d'orthogonalité par rapport à la masse globale. Généralement elle est exprimée en termes des vecteurs propres par rapport à la masse et à la rigidité comme suite.

$$\begin{cases} \{\phi_n\}^T [M] \{\phi_m\} = 0 & \rightarrow \text{1ère condition d'orthogonalité par rapport à la masse} \\ \{\phi_n\}^T [k] \{\phi_m\} = 0 & \rightarrow \text{1ère condition d'orthogonalité par rapport à la rigidité} \end{cases}$$

**Application

Soit le système de trois masses concentrées montré sur la figure ci-contre. On demande de :

- déterminer les vecteurs propres $\{\phi_1\}$, $\{\phi_2\}$ et $\{\phi_3\}$;
- vérifier la première condition d'orthogonalité par rapport à la masse et la rigidité.



Données : $m_1 = 3.6 \text{ t}$, $m_2 = 2.7 \text{ t}$, $m_3 = 1.8 \text{ t}$

$k_1 = 3.24 \times 10^3 \text{ kN/m}$, $k_2 = 2.16 \times 10^3 \text{ kN/m}$, $k_3 = 1.08 \times 10^3 \text{ kN/m}$

**Solution

*Etablissement de la matrice de rigidité (voir détail application précédente).

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5400 & -2160 & 0 \\ -2160 & 3240 & -1080 \\ 0 & -1080 & 1080 \end{bmatrix}$$

On constate que $k_{ij} = k_{ji}$

*Matrice des masses

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6 & 0 & 0 \\ 0 & 2.7 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8 \end{bmatrix}$$

*Equation caractéristiques des fréquences

$$\left| \begin{bmatrix} 5400 & -2160 & 0 \\ -2160 & 3240 & -1080 \\ 0 & -1080 & 1080 \end{bmatrix} - \omega_i^2 \begin{bmatrix} 3.6 & 0 & 0 \\ 0 & 2.7 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{bmatrix} (5400 - 3.6 \omega_i^2) & -2160 & 0 \\ -2160 & (3240 - 2.7 \omega_i^2) & -1080 \\ 0 & -1080 & (1080 - 1.8 \omega_i^2) \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \left(1 - \frac{\omega_i^2}{1500}\right) & -0.4 & 0 \\ -0.4 & \left(0.6 - \frac{\omega_i^2}{2000}\right) & -0.20 \\ 0 & -0.20 & \left(0.2 - \frac{\omega_i^2}{3000}\right) \end{vmatrix} = 0$$

Posons $A = \frac{\omega_i^2}{1500}$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} (1 - A) & -0.4 & 0 \\ -0.4 & \left(0.6 - \frac{4}{3}A\right) & -0.20 \\ 0 & -0.20 & \left(0.2 - \frac{A}{2}\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow A^3 - 2.2 A^2 - 1.2 A - 0.128 = 0$$

Les racines sont: $A_1 = 0.1365$, $A_2 = 0.65$ et $A_3 = 1.1414$, où $A_1 < A_2 < A_3$

A_1 Correspond à la période la plus longue (la fréquence dominante).

$$A_1 = 0.1365 = \frac{\omega_1^2}{1500} \Rightarrow \omega_1 = 14.3 \text{ rad/s}$$

$$A_2 = 0.65 = \frac{\omega_2^2}{1500} \Rightarrow \omega_2 = 31.2 \text{ rad/s}$$

$$A_3 = 1.414 = \frac{\omega_3^2}{1500} \Rightarrow \omega_3 = 46 \text{ rad/s}$$

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \Rightarrow T_1 > T_2 > T_3$$

*Calcul du 1^{er} mode de vibration

$$\omega_1 = 14.3 \text{ rad/s}$$

$$\{[k] - \omega_1^2[M]\}\{A_1\} = \{0\}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} (5400 - 3.6 \times 14.3^2) & -2160 & 0 \\ -2160 & (3240 - 2.7 \times 14.3^2) & -1080 \\ 0 & -1080 & (1080 - 1.8 \times 14.3^2) \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 4663.84 & -2160 & 0 \\ -2160 & 2687.8 & -1080 \\ 0 & -1080 & 711.92 \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ \bar{A}_{21} \\ \bar{A}_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Avec $\bar{A}_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}}$ et $\bar{A}_{31} = \frac{A_{31}}{A_{11}}$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2160 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2687.8 & -1080 \\ -1080 & 711.92 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{A}_{21} \\ \bar{A}_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \bar{A}_{21} \\ \bar{A}_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2160 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2687.8 & -1080 \\ -1080 & 711.92 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} \bar{A}_{21} \\ \bar{A}_{31} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} 711.92 & -1080 \\ 1080 & 2687.8 \end{bmatrix} \times \frac{1}{747150.154} \begin{Bmatrix} -2160 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.06 \\ 3.12 \end{Bmatrix}$$

**Rappel du calcul matriciel*

$A^{-1} = \frac{A^*}{D}$, A^{-1} est la matrice inverse de A , A^* sa matrice adjointe et D son déterminant.

$$\Rightarrow \{A_1\} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 2.06 \\ 3.12 \end{Bmatrix} \Rightarrow 3.12 \begin{Bmatrix} 0.30 \\ 0.644 \\ 1.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{Bmatrix} = \{\phi_1\}$$

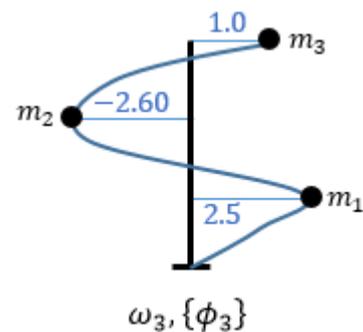
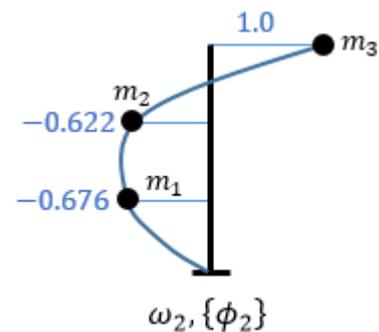
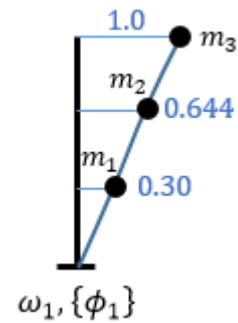
**Deuxième mode de vibration*

On procède de la même façon, on obtient.

$$\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.676 \\ -0.622 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$$

**Troisième mode de vibration*

$$\{\phi_3\} = \begin{Bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.50 \\ -2.60 \\ 1.0 \end{Bmatrix}$$



**Vérification de la 1^{ère} condition d'orthogonalité*

$$\{\phi_1\}^T [M] \{\phi_2\} = [0.3 \quad 0.644 \quad 1.0] \begin{bmatrix} 3.6 & 0 & 0 \\ 0 & 2.7 & 0 \\ 0 & 0 & 1.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.676 \\ -0.622 \\ 1.0 \end{Bmatrix} = -0.0116 \cong 0$$

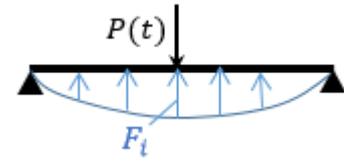
**Vérification de la seconde condition d'orthogonalité*

$$\{\phi_1\}^T [k] \{\phi_2\} = [0.3 \quad 0.644 \quad 1.0] \begin{bmatrix} 5.4 & -2.16 & 0 \\ -2.16 & 2.687 & -1.08 \\ 0 & -1.08 & 7.12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.676 \\ -0.622 \\ 1.0 \end{Bmatrix} = 6.26 \neq 0$$

Alors la matrice $[\phi]$ est orthogonale par rapport à la matrice de rigidité.

4. Détermination des caractéristiques modales ou généralisées

Le système montré sur la Figure ci-contre possède un nombre infini de degrés de liberté. Il existe une approche permettant de réduire le nombre de DDL. Cette approche est basée sur l'hypothèse que la déformée de la poutre peut être représentée par la somme des fonctions représentant chacune d'elles, une déformée possible du système. Ces fonctions sont appelées déplacements généralisés de la structure (système).



Chaque déformée est représentée par une série trigonométrique de Fourier.

$$V(u) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n \times \pi \times u}{L}$$

b_n : Coefficient de la série trigonométrique de Fourier. Cette méthode limite le nombre de termes de la série. Exemple de b_1, b_2 et b_3 qui permettent une représentation satisfaisante de point de vue pratique de la déformation de la poutre (Fig IV.4).

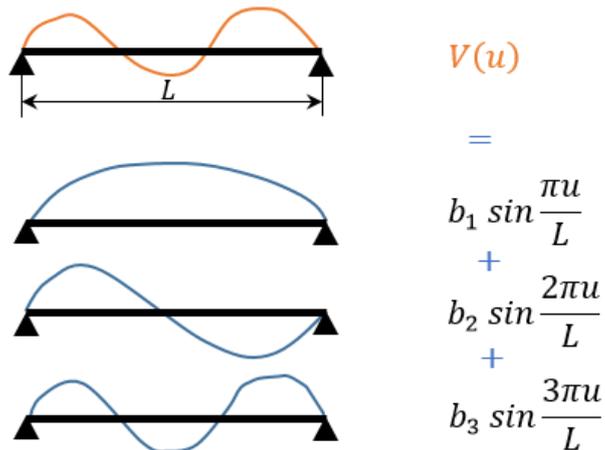
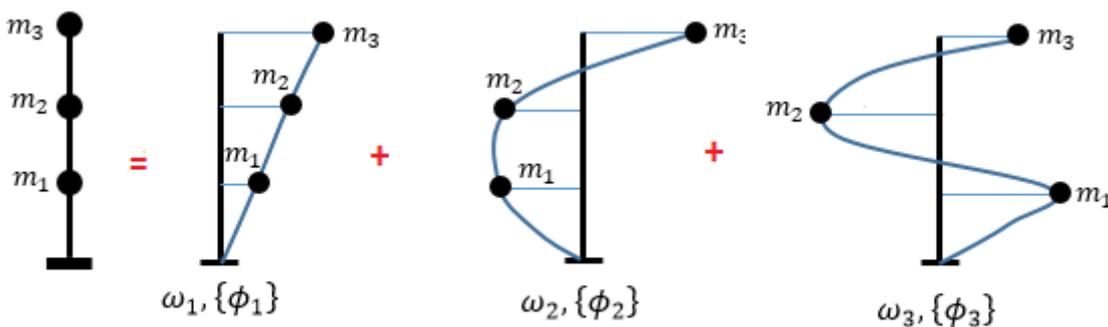


Figure IV.4 Déplacements généralisés

Pour les éléments verticaux (bâtiment) on aura la même chose, comme il est indiqué à la figure ci-dessous.



On note :

$\{u_1\} = \{\phi_1\}y_1$, $\{u_2\} = \{\phi_2\}y_2$ et $\{u_3\} = \{\phi_3\}y_3$. De manière générale $\{u_n\} = \{\phi_n\}y_n$
 $\{u\}$: Vecteur des coordonnées géométriques ou déplacement réel.

y_n : Coordonnées généralisées ou modales ou fonctions des déformées.

✚ la réponse globale du système s'obtient en superposant les réponses de n modes indépendants de vibration. Ainsi la réponse globale en termes de vecteurs de déplacement d'un système à plusieurs DDL est exprimée comme.

$$\{u\} = \{\phi_1\}y_1 + \{\phi_2\}y_2 + \dots + \{\phi_n\}y_n = [\Phi]\{y_n\} \quad (IV.5)$$

Dans laquelle, $\{y(t)\}$ représente le vecteur du déplacement modal et $[\Phi]$ matrice des vecteurs propres ($[\Phi] = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$). Elle n'est pas singulière, c.à.d. elle admet une matrice inverse.

$\{u\} = [\Phi]\{y_n\}$, multipliant cette quantité par $\{\phi_n\}^T [M]$, on aura :

$$\begin{aligned} \{\phi_n\}^T [M]\{u\} &= \{\phi_n\}^T [M][\Phi]\{y_n\} \\ &= \{\phi_n\}^T [M][\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_n\}]\{y_n\} \\ &= \{\phi_n\}^T [M][\{\phi_1\}y_1, \{\phi_2\}y_2, \dots, \{\phi_n\}y_n] \\ &= \{\phi_n\}^T [M]\{\phi_1\}y_1 + \{\phi_n\}^T [M]\{\phi_2\}y_2 + \dots + \{\phi_n\}^T [M]\{\phi_n\}y_n \\ \Rightarrow \{\phi_n\}^T [M]\{u\} &= \{\phi_n\}^T [M]\{\phi_n\}y_n \end{aligned}$$

Puisque tous les termes de cette égalité sont nuls, en appliquant la première condition d'orthogonalité. Donc on peut écrire.

$$\begin{aligned} \{\phi_n\}^T [M]\{u\} &= \{\phi_n\}^T [M]\{\phi_n\}y_n \\ \{\phi_n\}^T [M]\{u\} &= \{\phi_n\}^T [M][\Phi]\{y_n\} \\ \Rightarrow [M]\{\phi_n\}^T [\Phi]\{y_n\} &= \{\phi_n\}^T [M]\{\phi_n\}y_n \end{aligned}$$

Et ;

$$y_n = \frac{\{\phi_n\}^T [M]\{u\}}{\{\phi_n\}^T [M]\{\phi_n\}} \quad (IV.6)$$

De même ;

$$\begin{aligned} \{\phi_n\}^T [k]\{\phi_n\}y_n &= \{\phi_n\}^T [k][\Phi]\{y_n\} \\ y_n &= \frac{\{\phi_n\}^T [k]\{u\}}{\{\phi_n\}^T [k]\{\phi_n\}} \quad (IV.7) \end{aligned}$$

L'équation de mouvement d'un système forcé sans amortissement devient.

$$\{\phi_n\}^T [M][\Phi]\{\ddot{y}_n\} + \{\phi_n\}^T [k][\Phi]\{y_n\} = \{\phi_n\}^T \{F(t)\}$$

Posons :

$M_n = \{\phi_n\}^T [M] \{\phi_n\}$, $k_n = \{\phi_n\}^T [k] \{\phi_n\}$ et $F_n = \{\phi_n\}^T F(t)$, tels que :

M_n , k_n et F_n sont respectivement, masse, rigidité et force modales.

De même l'expression de l'amortissement modal peut être déduite comme suite :

$$c_n = \{\phi_n\}^T [c] \{\phi_n\}$$

alors nous abouti à n -équations linéaires pour un système forcé sans amortissement.

$$M_n \ddot{y}_n + k_n y_n = F_n(t) \Leftrightarrow \begin{cases} M_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 = F_1(t) \\ M_2 \ddot{y}_2 + k_2 y_2 = F_2(t) \\ \vdots \\ M_n \ddot{y}_n + k_n y_n = F_n(t) \end{cases} \quad (\text{IV.8})$$

*Pour un système forcé avec amortissement, l'équation générale est comme suite :

$$M_n \ddot{y}_n + c_n \dot{y}_n + k_n y_n = F_n(t) \Leftrightarrow \ddot{y}_n + 2\xi \omega_n \dot{y}_n + \omega_n^2 y_n = \frac{F_n(t)}{M_n} \quad (\text{IV.9})$$

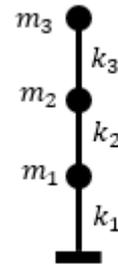
Avec

$$c_n = 2\xi \omega_n M_n = \{\phi_n\}^T [c] \{\phi_n\} \text{ et } \omega_n^2 = \frac{k_n}{M_n}$$

**Application

Soit un système libre non amorti de trois masses concentrées, montré sur la figure ci-contre, telles que $m_1 = 354.4 \text{ kg.s}^2/m$, $m_2 = 265.8 \text{ kg.s}^2/m$ et $m_3 = 177.2 \text{ kg.s}^2/m$. Le système est soumis aux

conditions initiales suivantes : $\{u_0\} = \begin{Bmatrix} 0.76 \\ 1.02 \\ 1.3 \end{Bmatrix} \text{ cm}$ et $\{\dot{u}_0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 22.9 \\ 0 \end{Bmatrix}$. La



matrice des rigidités du système est :

$$[k] = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times 1063 \times 10^3 \text{ N/m}$$

*Déterminer les caractéristiques modales du système ainsi que sa réponse en termes des déplacements réels à l'instant $t = 5 \text{ sec}$

**Solution

$$\text{*Matrice de masses : } [M] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 177.2 \text{ kg.s}^2/m$$

$$\text{*Matrice de rigidités : } [k] = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times 1063 \times 10^3 \text{ N/m}$$

$$\text{*Equation caractéristique des fréquences : } | \{ [k] - \omega_i^2 [m] \} | = 0$$

Les valeurs propres sont $\omega_1 = 14.5 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 31.1 \text{ rad/s}$ et $\omega_3 = 46 \text{ rad/s}$.

$$\text{*Matrice des vecteurs propres } [\Phi] = [\{\phi_1\} \quad \{\phi_2\} \quad \{\phi_3\}] = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.676 & 2.47 \\ 0.644 & -0.601 & -2.57 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

**Calcul de réponse du système*

Équation du mouvement pour un système libre non amorti est.

$$M_n \ddot{y}_n + k_n y_n = 0 \quad \text{Où } M_n = \{\phi_n\}^T [M] \{\phi_n\}$$

$$\begin{cases} M_1 = \{\phi_1\}^T [M] \{\phi_1\} = [0.3 \quad 0.644 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 177.2 \times \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.644 \\ 1.0 \end{pmatrix} = 1.8 \times 177.2 \times 10^3 \\ M_2 = \{\phi_2\}^T [M] \{\phi_2\} = [-0.676 \quad -0.601 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 177.2 \times \begin{pmatrix} -0.676 \\ -0.601 \\ 1.0 \end{pmatrix} = 2.45 \times 177.2 \times 10^3 \\ M_3 = \{\phi_3\}^T [M] \{\phi_3\} = [2.47 \quad -2.57 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 177.2 \times \begin{pmatrix} 2.47 \\ -2.57 \\ 1.0 \end{pmatrix} = 23.1 \times 177.2 \times 10^3 \end{cases}$$

Posons.

$$[M]' = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 & 0 & 0 \\ 0 & 2.45 & 0 \\ 0 & 0 & 23.1 \end{bmatrix} \times 177.2 \times 10^3$$

ATTENTION !

La formule IV.7 est donnée pour un scalaire y_n . Lorsque cette coordonnée devient un vecteur $\{y_n\}$ les termes de la formule changent du scalaire au vecteur et de vecteur à une matrice, d'où :

$$\{y_n\} = \frac{[\Phi]^T [M] \{u_n\}}{[M]'}$$

Revenons à l'exercice on aura :

$$\{y_0\} = \frac{[\Phi]^T [M] \{u_0\}}{[M]'} = \frac{\begin{bmatrix} 0.3 & -0.676 & 2.47 \\ 0.644 & -0.601 & -2.57 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.76 \\ 1.02 \\ 1.30 \end{pmatrix} \times 177.2 \times 10^3}{\begin{bmatrix} 1.8 & 0 & 2 \\ 0 & 2.45 & 0 \\ 0 & 0 & 23.1 \end{bmatrix} \times 177.2 \times 10^3} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ -0.27 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

De même :

$$\{\dot{y}_0\} = \frac{[\Phi]^T [M] \{\dot{u}_0\}}{[M]'} = \frac{\begin{bmatrix} 0.3 & -0.676 & 2.47 \\ 0.644 & -0.601 & -2.57 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 22.9 \\ 0 \end{pmatrix} \times 177.2 \times 10^3}{\begin{bmatrix} 1.8 & 0 & 2 \\ 0 & 2.45 & 0 \\ 0 & 0 & 23.1 \end{bmatrix} \times 177.2 \times 10^3} = \begin{pmatrix} -3.01 \\ -3.8 \\ 12.27 \end{pmatrix}$$

Pour un système libre non amorti, la solution à l'instant t a la forme trigonométrique suivante.

$$y_n(t) = \frac{\dot{y}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + y_0 \cos \omega_n t$$

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= \frac{\dot{y}_{01}}{\omega_1} \sin \omega_1 t + y_{01} \cos \omega_1 t \\ \Leftrightarrow y_2(t) &= \frac{\dot{y}_{02}}{\omega_2} \sin \omega_2 t + y_{02} \cos \omega_2 t \\ y_3(t) &= \frac{\dot{y}_{03}}{\omega_3} \sin \omega_3 t + y_{03} \cos \omega_3 t \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= \frac{-3.01}{14.5} \sin 14.5 \times 5 + 0.05 \cos 14.5 \times 5 \\ \Leftrightarrow y_2(t) &= \frac{-3.8}{31.1} \sin 31.1 \times 5 - 0.27 \cos 31.1 \times 5 \\ y_3(t) &= \frac{12.7}{46} \sin 46 \times 5 + 1.5 \cos 46 \times 5 \end{aligned} \right\} = \begin{pmatrix} -0.189 \\ 0.195 \\ -1.175 \end{pmatrix} \text{ cm}$$

*Calcul des déplacements réels

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.676 & 2.47 \\ 0.644 & -0.606 & -2.57 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -0.189 \\ 0.195 \\ -1.175 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3.091 \\ 2.779 \\ -1.169 \end{pmatrix} \text{ cm} \end{aligned}$$