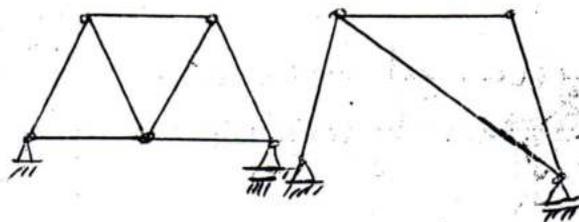


les treillis isostatique

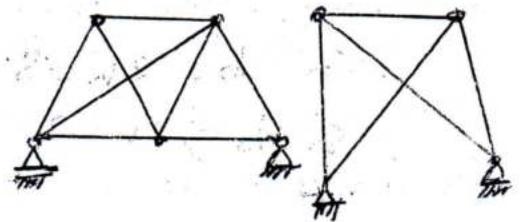
Définition : On appelle systèmes articulés ou à treillis des systèmes composés de barres rectilignes assemblées entre elles par leurs extrémités au moyen d'articulation ; elles sont les nœuds du système. Les systèmes articulés peuvent être tridimensionnels ou plans, notre étude se limitera aux systèmes plans.

Le poids propre des barres est négligé. Les charges extérieures seront généralement appliquées aux nœuds ; dans ce cas les barres sont tendues ou comprimées.

Le problème posé par le calcul des systèmes articulés est la détermination des réactions et des efforts dans les barres. Rappelons que les équations de la statique sont au nombre de trois. Si ces trois équations suffisent pour déterminer les réactions d'appui, le système articulé est dit extérieurement isostatique. S'il existe des réactions surabondantes, le système est dit extérieurement hyperstatique. Une fois connues les réactions d'appui, si on peut déterminer tous les efforts dans les barres du système est dit intérieurement isostatique. nous nous bornons à l'étude de tels systèmes.



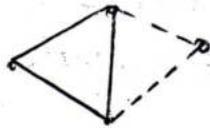
systèmes isostatique
intérieure t



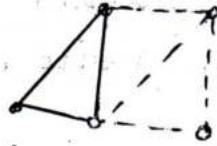
système hyperstatique
intérieure t.

2/ propriétés des systèmes articulés isostatiques :

a/- la forme la plus simple et la plus usuelle des systèmes plans articulés est le réseau triangulaire, tracé à partir d'un triangle initial en ajoutant chaque fois un nouveau nœud au moyen de deux barres.



2 triangles



3 triangles

Triangle initial

3 barres

3 nœuds

2 triangles

5 barres

4 nœuds

3 triangles

7 barres

5 nœuds

⋮

p triangles

$2p+1$ barres

$p+2$ nœuds

Notons b le nombre de barres et n le nombre de nœuds, nous avons :

$$n = p + 2 \quad \text{et} \quad b = 2p + 1.$$

Éliminons p entre ces deux relations :

$$\underline{b = 2n - 3}$$

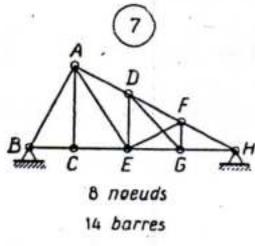
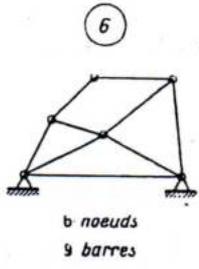
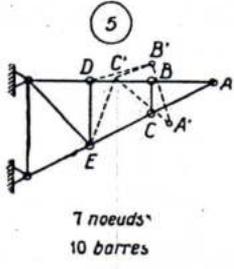
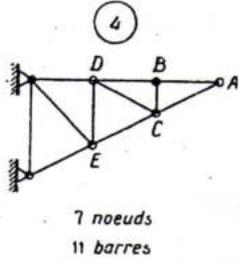
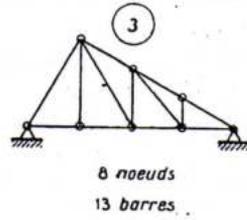
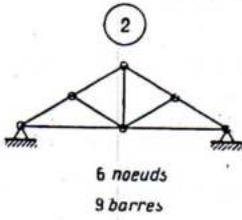
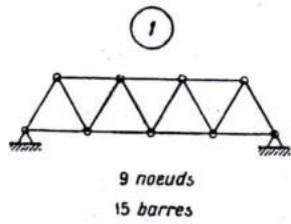
cette condition est nécessaire et suffisante pour l'obtention d'un système isostatique hyperstatif de triangles.

Si $b < 2n - 3$

système est mécanisme

Si $b > 2n - 3$

système hyperstatif intérieurement.



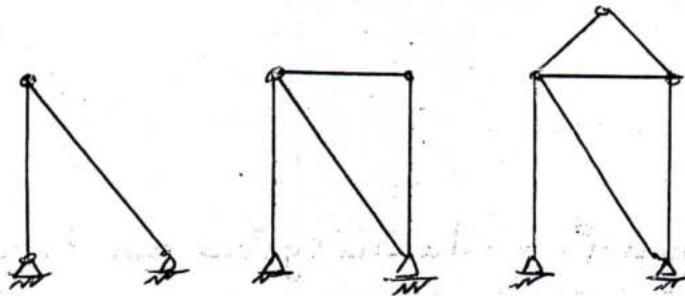
la figure ① montre un système non trianglé de configuration instable. Il est clair que les forces extérieures peuvent le déformer considérablement. un tel système instable ne peut pas être étudié puisque sa configuration n'est pas statiquement déterminée.

par contre la figure ⑥ montre un système indéformable statiquement déterminé, de forme stable, que l'on peut étudier bien qu'il ne soit pas entièrement trianglé.

la figure ⑦ montre un système trianglé dans lequel la suppression de la barre EF, qui n'entraîne la

Suppression d'un nœud, ne rend pas le système déformable. La barre EF est une barre surabondante qui rend le système hyperstatique intérieurement. On constatera que dans tous les schémas précédents qui constituent des exemples de systèmes trianglés stables, statiquement déterminés il existe une relation simple entre le nombre de nœuds n et le nombre de barres b . Cette relation générale est $b = 2n - 3$ qu'on a démontrée.

b) - le système est lié au support par des articulations complètes; on ajoute chaque fois deux barres au système existant. on ne compte pas les nœuds de liaisons externes.



1 triangle 2 triangles 3 triangles

1 Triangle 2 barres 1 nœuds

2 triangles 4 barres 2 nœuds

3 triangles 6 barres 3 nœuds

p triangles $2p$ barres p nœuds

la condition nécessaire est suffisante pour l'absence d'un système isostatique. s'écrit: $b = 2n$

$s \cdot b < 2n$ le système est un mécanisme.
 $s \cdot b > 2n$ le système est hyperstatique.

3/ calcul des efforts dans les truelles isostatiques :

3.1. hypothèses de calcul :

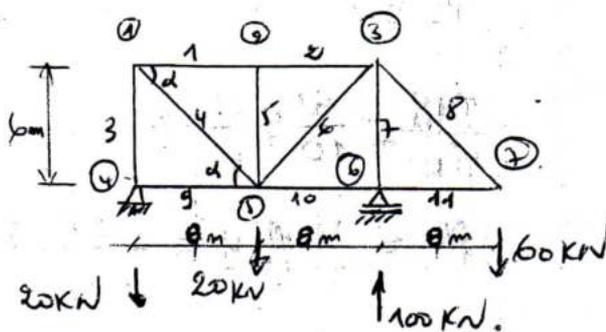
- les charges extérieures sont appliquées aux nœuds.
- le poids propre des barres est négligé. Quand il est nécessaire de tenir compte du poids propre des barres ou dans le cas où une force extérieure est appliquée sur une barre en un point distinct des nœuds, ce poids propre ou cette force sera réparti sur les deux nœuds extrêmes de la barre.

3.2. la méthode d'équilibre des nœuds :

on dispose de deux équations de la statique

$$\sum x_i = 0, \quad \sum y_i = 0$$

On doit déterminer le nœud avec lequel on doit commencer à combiner d'avoir au plus deux inconnues.



$$\cos \alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$H_4 = 0, \quad V_4 = -20 \text{ kN}, \quad V_6 = 100 \text{ kN}$$

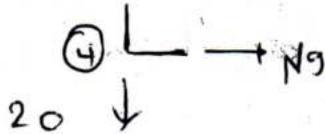
le chemin à suivre :

4 → 1 → 2 → 5 → 6 → 3 et 7.

Il y a d'autres axes à suivre :

lorsque metton le noeud 4 il faut montrer toutes les forces en actions, il est intéressant de montrer des forces internes agissant en traction et après avoir calculer ces forces on change leurs sens si elles sont négatives.

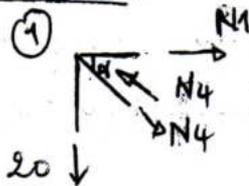
le noeud 4 :



$$\sum y = 0 \quad N_3 - 20 = 0 \quad N_3 = 20 \text{ KN}$$

$$\sum x = 0 \quad N_9 = 0$$

le noeud 1 :



$$\sum y_i = 0$$

$$-20 + N_4 y = 0$$

$$N_4 y = -20 \text{ KN}$$

$$N_4 y = N_4 \sin \alpha$$

$$N_4 = \frac{-20}{\sin \alpha} = -33,33 \text{ KN}$$

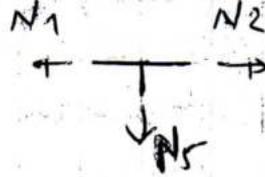
$$\sum x_i = 0$$

$$N_1 - N_4 x = 0$$

$$N_1 - \frac{4}{5} N_4 = 0 \quad N_1 = \frac{4}{5} N_4$$

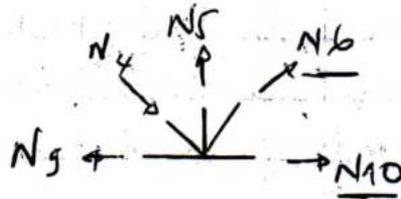
$$N_1 = 26,66 \text{ kN}$$

noeud ②:

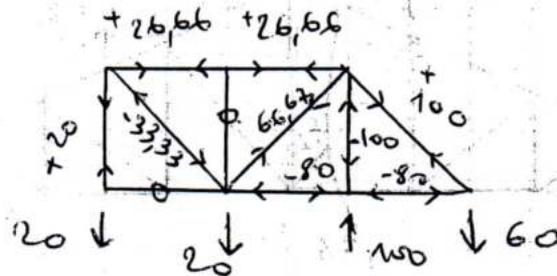


N_1 déterminée on calcule N_2 et N_5 .

noeud ⑤



N_9, N_4, N_5 déterminés on calcule N_6 et N_{10} .



3.3 la methode des sections ou methode de Ritter,

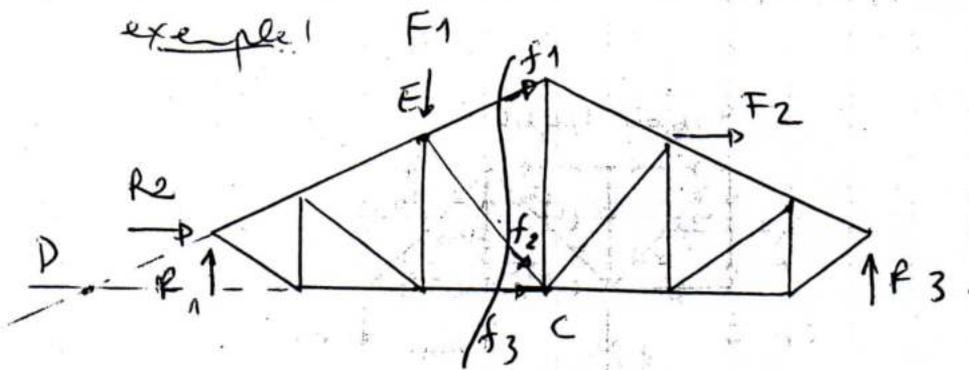
on coupe la poutre triangulée par une section fictive qui la separe en deux troncons distincts, et qui rencontre au plus 3 barres dont les sollicitations sont inconnues. On isole l'un des troncons et on ecrit qu'il est en equilibre sous l'action des forces connues et des forces inconnues (forces internes des barres coupés).

on a souvent intérêt à n'écrire que les équations de moments. pour que chaque équation ne contienne qu'une seule inconnue, on opère de la façon suivante chaque fois que c'est possible.

pour obtenir l'effort dans une barre coupée, on prend comme centre des moments, le point de rencontre des deux autres barres coupées.

la particularité de cette méthode est qu'elle permet de déterminer la force intérieure d'une barre quelle barre choisie, sans calculer les autres forces.

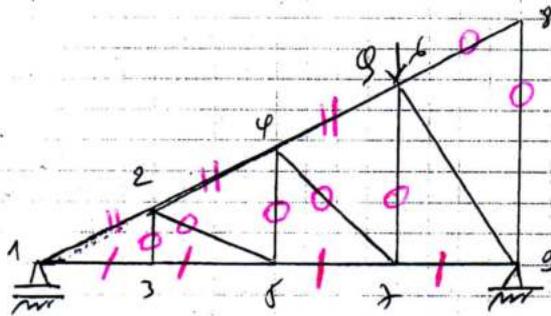
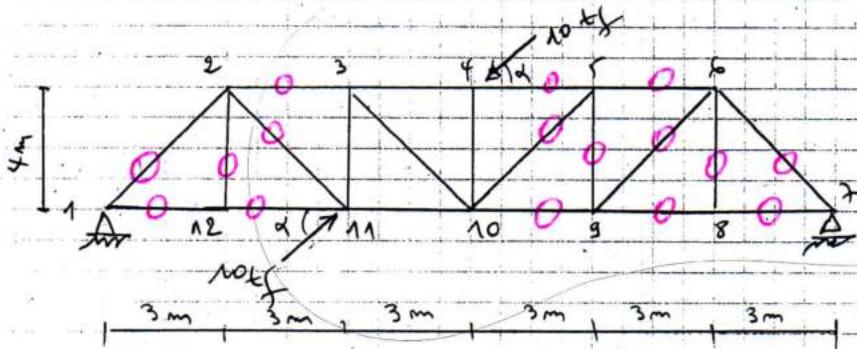
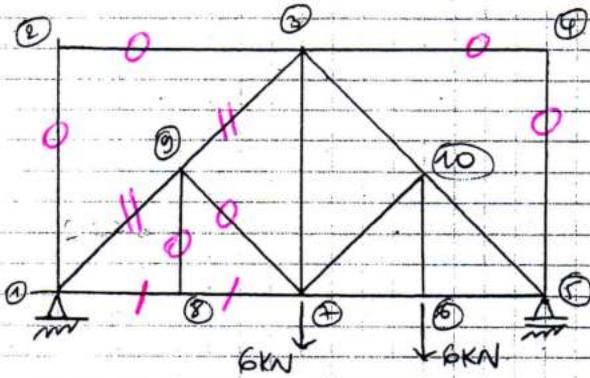
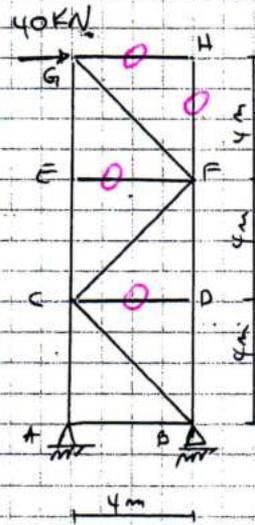
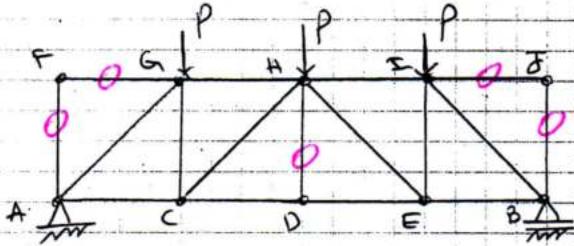
donc on choisit une section appropriée (3 inconnues ou maximum) et on applique les équations de la statique.



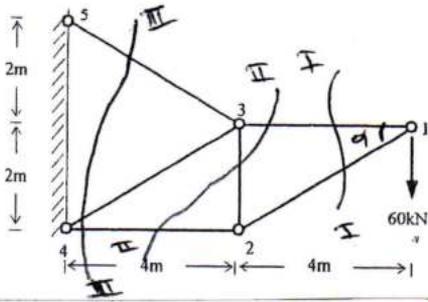
la partie gauche est en équilibre sous l'action des forces connues R_1 , R_2 et F_1 et des actions dans les barres inconnues f_1 , f_2 , f_3 .

en écrivant que les moments sont nuls en C, D, E nous obtenons respectivement f_1 , f_2 et f_3 .

Ex: Trouver les barres à efforts nul pour les structure en treillis suivantes.



Ex: En utilisant la méthode des sections, Trouver des efforts dans toutes les barres du Treillis.

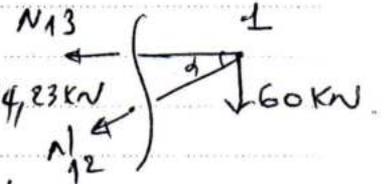


$$l_{12} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4,472 \text{ m}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{4,472} = 0,894 \quad \sin \alpha = \frac{2}{4,472} = 0,447$$

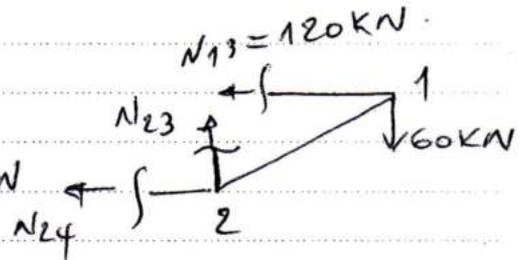
Sectin 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum N / 3 = 0 \quad + N_{12} \sin \alpha \cdot 4 + 60 \cdot 4 = 0 \quad N_{12} = -134,23 \text{ kN} \\ \sum N / 2 = 0 \quad 60 \cdot 4 - N_{13} \cdot 2 = 0 \quad N_{13} = 120 \text{ kN} \end{array} \right.$$



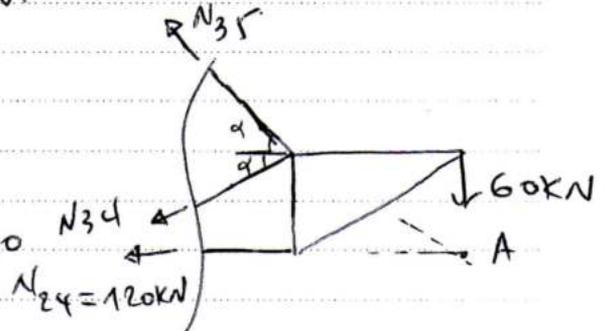
Sectin 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum M / 3 = 0 \quad - N_{24} \cdot 2 - 60 \cdot 4 = 0 \quad N_{24} = -120 \text{ kN} \\ \sum y_i = 0 \quad N_{23} - 60 = 0 \quad N_{23} = 60 \text{ kN} \end{array} \right.$$



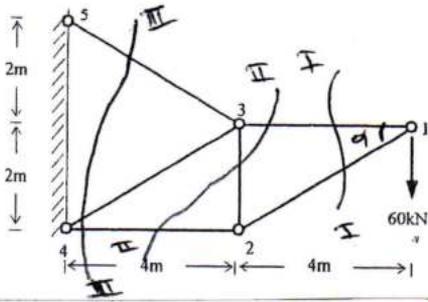
Sectin 3:

$$\sum N / 4 = 0 \quad - N_{35} \cos \alpha \cdot 2 - N_{35} \sin \alpha \cdot 4 + 60 \cdot 8 = 0 \quad N_{35} = 134,23 \text{ kN}$$



$$\sum N / A = 0 \quad N_{34} = 0$$

Ex: En utilisant la méthode des sections, Trouver des efforts dans toutes les barres du Treillis.

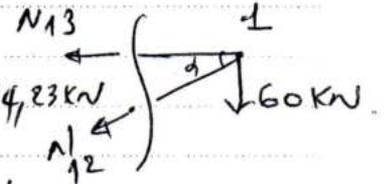


$$l_{12} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4,472 \text{ m}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{4,472} = 0,894 \quad \sin \alpha = \frac{2}{4,472} = 0,447$$

Section 1:

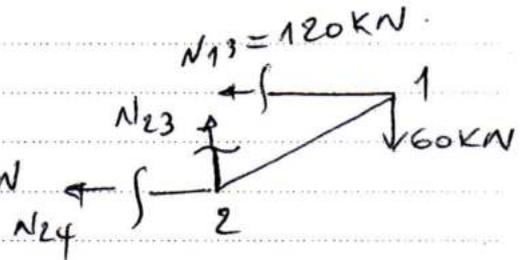
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum N / \perp = 0 \quad + N_{12} \sin \alpha \cdot 4 + 60 \cdot 4 = 0 \quad N_{12} = -134,23 \text{ kN} \\ \sum N / \parallel = 0 \quad 60 \cdot 4 - N_{13} \cdot 2 = 0 \quad N_{13} = 120 \text{ kN} \end{array} \right.$$



Section 2:

$$\sum M / \perp = 0 \quad - N_{24} \cdot 2 - 60 \cdot 4 = 0 \quad N_{24} = -120 \text{ kN}$$

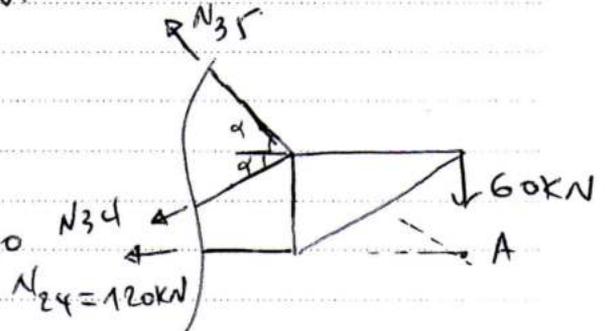
$$\sum y_i = 0 \quad N_{23} - 60 = 0 \quad N_{23} = 60 \text{ kN}$$



Section 3:

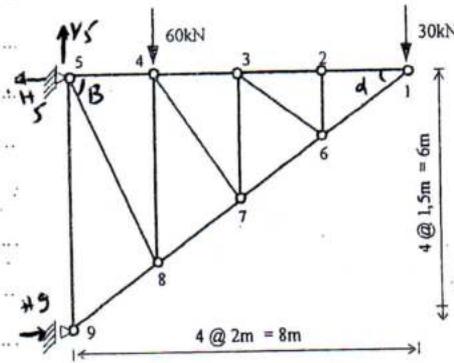
$$\sum N / \perp = 0 \quad - N_{35} \cos \alpha \cdot 2 - N_{35} \sin \alpha \cdot 4 + 60 \cdot 8 = 0$$

$$N_{35} = 134,23 \text{ kN}$$



$$\sum N / A = 0 \quad N_{34} = 0$$

Ex: En utilisant la methode des noeuds, Trouver les efforts des barres de la poutre en treillis ci-dessous.



$$\sum \Pi / 5 = 0 \quad 60 \cdot 2 + 30 \cdot 8 - H_9 \cdot 6 = 0 \quad H_9 = 60 \text{ kN}$$

$$\sum \Pi / 9 = 0 \quad 60 \cdot 2 + 30 \cdot 8 - H_5 \cdot 6 = 0 \quad H_5 = 60 \text{ kN}$$

$$\sum \mathcal{F}_i = 0 \quad V_5 - 60 - 30 = 0 \quad V_5 = 90 \text{ kN}$$

$$l_{16} = \sqrt{2^2 + 1.5^2} = 2.5 \text{ m}, \quad \sin \alpha = \frac{1.5}{2.5} = 0.6, \quad \cos \alpha = \frac{2}{2.5} = 0.8$$

$$l_{58} = \sqrt{4.5^2 + 2^2} = 4.92 \text{ m}, \quad \sin \beta = \frac{2}{4.92} = 0.406, \quad \cos \beta = \frac{4.5}{4.92} = 0.914$$

chemin de t: 1, 2, 6, 3, 7, 4, 8, 5. (à vérifier)

par inspection on peut trouver les barres à efforts égaux, et les barres à efforts nuls.

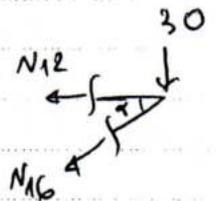
• noeud 2: $N_{26} = 0$, $N_{21} = N_{23}$ (noeud 2 non chargé car porte deux barres alignées donc $N_{21} = N_{23}$, et la troisième barre est à effort nul. $N_{26} = 0$.)

• noeud 6: $N_{16} = N_{67}$, $N_{36} = 0$.

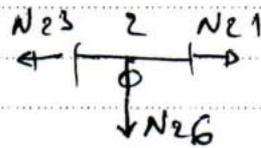
• noeud 3: $N_{23} = N_{34}$, $N_{37} = 0$.

• noeud 7: $N_{67} = N_{78}$, $N_{74} = 0$.

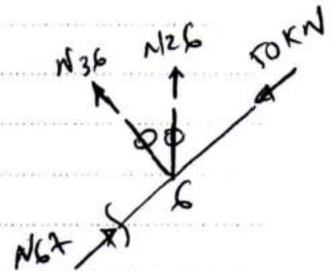
le noeud 1: $\sum \mathcal{F}_x = 0 \quad N_{12} + N_{16} \cos \alpha = 0 \quad N_{12} = 40 \text{ kN}$
 $\sum \mathcal{F}_y = 0 \quad 30 + N_{16} \sin \alpha = 0 \quad N_{16} = -50 \text{ kN}$



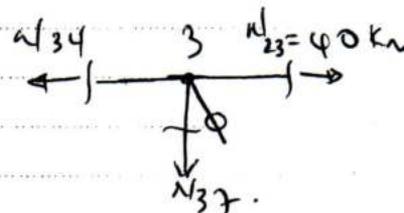
le noeud 2: $N_{21} = N_{23} = 40 \text{ kN}$
 $N_{26} = 0$



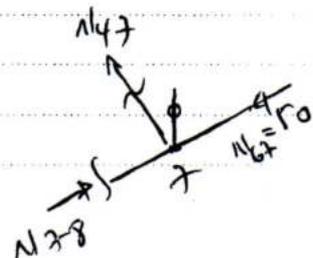
le noeud 6: $N_{67} = N_{16} = +50 \text{ kN}$ (compression)
 $N_{36} = 0$



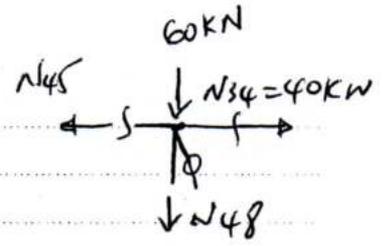
le noeud 3: $N_{34} = N_{23} = 40 \text{ kN}$
 $N_{37} = 0$



le noeud 7: $N_{78} = N_{67} = +50 \text{ kN}$ (compression)
 $N_{74} = 0$



le noeud 4: $\sum x_i = 0 \Rightarrow -N_{45} + 40 = 0 \Rightarrow N_{45} = 40 \text{ kN}$
 $\sum y_i = 0 \Rightarrow 60 + N_{48} = 0 \Rightarrow N_{48} = -60 \text{ kN}$

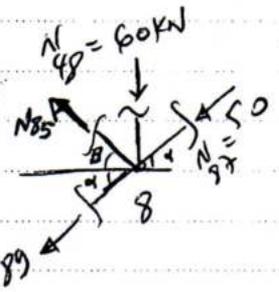


le noeud 8:

$\sum x_i = 0 \Rightarrow 50 \text{ end} + N_{89} \text{ end} + N_{85} \cos \beta = 0$

$\sum y_i = 0 \Rightarrow -50 \sin \alpha - 60 + N_{85} \sin \beta - N_{89} \sin \alpha = 0$

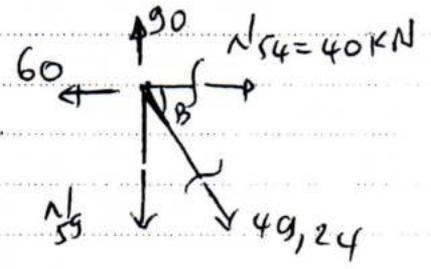
$N_{89} = -74,99 \text{ kN}, \quad N_{85} = 49,24 \text{ kN}$



le noeud 5:

$\sum y_i = 0 \Rightarrow -N_{59} - 49,24 \sin \beta + 90 = 0$

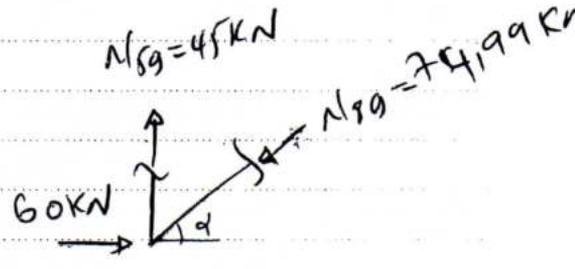
$N_{59} = 45 \text{ kN}$



Verification le noeud 9:

$\sum x_i = 60 - 74,99 \cos \alpha = 0 \quad \checkmark$

$\sum y_i = 45 - 74,99 \sin \alpha = 0 \quad \checkmark$



Méthodes énergétiques

1. Généralités

Soit un corps élastique, on amène ce système d'un état initial (1) à un état final (2) par l'application d'un ensemble de forces extérieures, le corps est déformé élastiquement et prend une nouvelle position d'équilibre(2)

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre deux instants correspondants à l'état initial et l'état final donne :

$$W_{ext} + w_{int} = 0 \quad (1)$$

W_{ext} travail des forces extérieures, w_{int} travail des forces intérieures

Par définition on appelle l'énergie de déformation le travail des forces intérieures changé de signe. Si on représente par w l'énergie de déformation on a : $w = -w_{int}$

Et l'équation (1) s'écrit : $w_{ext} = w$

On dit alors que pendant la déformation élastique d'un solide le travail des forces extérieures est égal à l'énergie de déformation du solide.

2. Travail des forces extérieures

- Sollicitation de traction pure

On considère une barre rectiligne de longueur l , l'intensité de la force de traction croît lentement et progressivement de zéro à la valeur maximale F . Soit x l'allongement de la barre obtenu lorsque la force maximale F est atteinte. L'allongement x et la force sont deux grandeurs proportionnelles. L'aire du triangle OAB représente le travail de la force de traction.

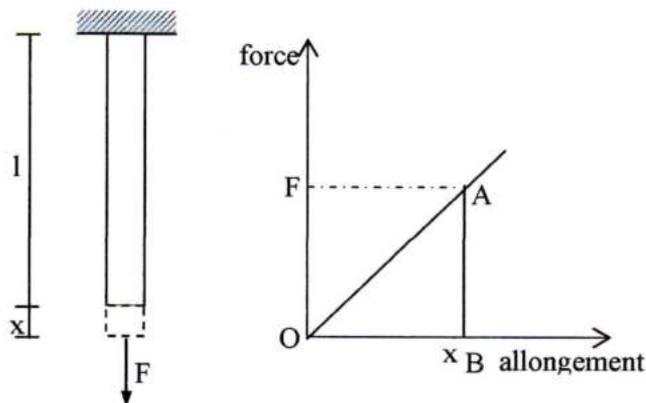


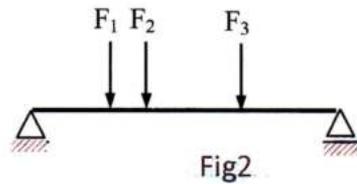
Fig1

Le travail des forces extérieures :

$$w_{ext} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} F \cdot x$$

- Sollicitation de flexion

On considère une poutre sollicitée par trois forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, soit y_1, y_2, y_3 les flèches des forces extérieures F_1, F_2, F_3 .



Le travail des forces extérieures :

$$w_{ext} = \frac{1}{2} F_1 \cdot y_1 + \frac{1}{2} F_2 \cdot y_2 + \frac{1}{2} F_3 \cdot y_3$$

- Sollicitation de cisaillement

On considère un solide sollicité en cisaillement simple sous l'action de l'effort tranchant T, la dénivellation C1D1 par rapport à CD est j.

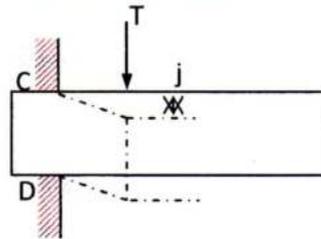


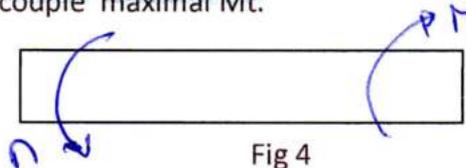
Fig3

Le travail de l'effort tranchant :

$$w_{ext} = \frac{1}{2} T \cdot j$$

- Sollicitation de torsion

On considère l'élément rectiligne de longueur l, de section circulaire constante, auquel on applique un couple de torsion croissant lentement et progressivement de zéro à la valeur maximale M_t . Soit α l'angle de torsion total avec un couple maximal M_t .



Le travail du couple de torsion :

$$w_{ext} = \frac{1}{2} M_t \cdot \alpha$$

3. Energie de déformation

L'énergie de déformation W dans le cas d'un élément de volume V soumis à un ensemble de contraintes $((\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ est donnée par :

$$w = \int_v \left[\frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] dv$$

- Sollicitation de tension

Soit une barre de longueur l et de section constante A , soumise à une force de tension P à chaque extrémité. Si l'axe de la barre est l'axe x , on a $\sigma_x = \frac{N}{A}$, les autres contraintes étant nulles.

$$w = \int_v \left[\frac{1}{2E} (\sigma_x^2) \right] dv = \frac{1}{2E} \int_0^l \left(\frac{N}{A} \right)^2 A dx = \frac{N^2 l}{2AE}$$

- Sollicitation de flexion

Soit une outre droite de longueur l et de moment d'inertie I , soumise à des charges transversales engendrant une flexion. Si on considère que $\sigma_x = \frac{M}{I} y$ et les autres contraintes sont nulles.

L'énergie liée aux contraintes de cisaillement est négligeable comparativement à l'énergie associée à la contrainte normale. L'expression de l'énergie de déformation s'écrit :

$$w = \int_v \left[\frac{1}{2E} (\sigma_x^2) \right] dv = \int_0^l \int_A \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dA dx = \int_0^l \left[\frac{M^2}{2EI^2} \int y^2 dA \right] dx = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx$$

- Sollicitation de cisaillement

Soit un solide sollicité en cisaillement simple sous l'effet de l'effort tranchant : $\tau = \frac{T}{A}$

L'expression de l'énergie de déformation s'écrit :

$$w = \int_v \left[\frac{1}{2G} (\tau^2) \right] dv = \int \frac{1}{2G} \frac{T^2}{A^2} A dx = \int_0^l \frac{T^2}{2GA} dx$$

(dans le cas de la flexion) Si on considère l'énergie liée aux contraintes de cisaillement on $\tau = \frac{TS'}{Ib}$

$$w = \int_v \left[\frac{1}{2G} (\tau^2) \right] dv = \int \frac{1}{2G} \frac{T^2 S^2}{I^2 b^2} dv = \int_0^l \frac{T^2}{2GI^2} \int \left(\frac{S^2}{b^2} \right) dA dx = \int_0^l \frac{T^2}{2GA I^2} \int \left(\frac{S^2}{b^2} \right) dA dx$$

$$w = K \int_0^l \frac{T^2}{2GA} dx$$

- Sollicitation de torsion

On considère l'élément rectiligne de longueur l , de section circulaire constante de rayon r , soumis à un couple de torsion à ses extrémités. On a $\tau = \frac{M_t r}{I_p}$

L'expression de l'énergie de déformation s'écrit :

$$w = \int_v \left[\frac{1}{2G} (\tau^2) \right] dv = \int_v \left[\frac{1}{2G} \left(\frac{M_t^2 r^2}{I_p^2} \right) \right] dA dx = \int_0^l \left(\frac{M_t^2}{2GI_p^2} \int_A r^2 dA \right) dx = \int_0^l \frac{M_t^2}{2GI_p} dx$$

Pour une poutre soumise en une section courante aux 4 éléments de réduction (N, T, M_t, M_f) l'énergie de déformation sera par l'application de superposition

$$w = \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + K \frac{T^2}{GA} + \frac{M_t^2}{GI_p} + \frac{M_f^2}{EI} \right) dx$$

L'expression plus générale de l'énergie de déformation :

$$w = \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + K_y \frac{T_y^2}{GA} + K_z \frac{T_z^2}{GA} + \frac{M_t^2}{GI_p} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} \right) dx$$

4. Théorème de réciprocité des travaux (théorème de Betti)

On considère une poutre simple soumise en deux états à une force concentrée. La charge, les efforts intérieurs et les déformations relatifs à ces deux états sont affectés d'indices 1 et 2. La figure 5a, visualise le premier état du système, et la figure 5b, le deuxième.

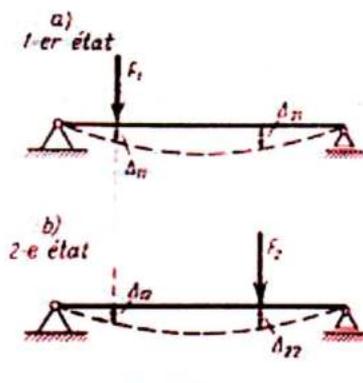


Fig5

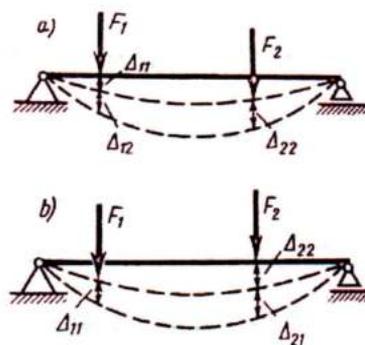


Fig6

Le déplacement dans le sens de la charge en premier état produit par cette même charge est noté Δ_{11} . Le déplacement dans le sens de la charge en deuxième état produit par l'action de la charge du premier état est noté Δ_{21} . Les notations du déplacement en deuxième état sont données par la figure dont les notations comportent deux mêmes indices Δ_{11} , Δ_{22} , sont dits principaux et ceux de la forme Δ_{12} , Δ_{21} sont dits accessoires.

O, applique à la poutre les forces F_1 et F_2 , l'ordre de leur application étant différent.

1. On applique d'abord la charge F_1 , puis on soumet la poutre déformée à la force F_2 , (fig. 6 a).

On calcule le travail effectué dans ces conditions par les forces extérieures

Le travail de la force F_1 sur son déplacement Δ_{11} produit par cette même force est $w_{11} = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11}$

. Le travail effectué par la force F_2 , sur son propre déplacement Δ_{22} est $w_{22} = \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22}$

Le travail auxiliaire de la force F_1 sur le déplacement Δ_{12} dû à la force F_2 est $w_{12} = F_1 \Delta_{12}$

Dans le calcul de w_{12} le facteur $1/2$ disparaît, du fait que la force F_1 sur le déplacement Δ_{12} effectue un travail tout en restant constante.

Le travail total réalisé par les forces extérieures suivant le premier mode de sollicitation :

$$W_1 = w_{11} + w_{22} + w_{12}$$

2. On charge maintenant la poutre dans une autre succession : On applique d'abord la force F_2 , puis la force F_1 , (fig. 6 b).

Le travail effectué par la force F_2 sur son propre déplacement Δ_{22} $w_{22} = \frac{1}{2} F_2 \Delta_{22}$

Le travail de la force F_1 , sur son propre déplacement Δ_{11} , $w_{11} = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11}$

Le travail de la force F_2 , sur le déplacement Δ_{21} est $w_{21} = F_2 \Delta_{21}$

Le travail total en deuxième mode de sollicitation : $W_2 = w_{22} + w_{11} + w_{21}$

Le travail des forces ne dépend pas de l'ordre de leur application. Par conséquent :

$$W_1 = W_2, \text{ d'où } w_{12} = w_{21}, F_1 \Delta_{12} = F_2 \Delta_{21}$$

Ceci démontre le théorème de la réciprocité des travaux virtuels des forces extérieures.

D'une façon analogue, on peut démontrer la réciprocité du travail virtuel des forces intérieures

Le travail virtuel, W_{12}^i d'un élément de poutre de longueur dx vaut (Fig7 c, d)

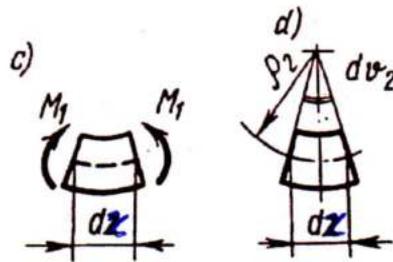


Fig7

$$dw_{12}^i = M_1 d\theta_2$$

$$d\theta_2 = \frac{dx}{\rho_2}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_2}{EI} \quad \text{donc} \quad d\theta_2 = \frac{M_2 dx}{EI}$$

Par conséquent :

$$dw_{12}^i = \frac{M_1 M_2}{EI} dx$$

le travail virtuel w_{12}^i pour toute la poutre de longueur l :

$$w_{12}^i = \int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dx \quad (a)$$

Ou M_1 , et M_2 sont les valeurs courantes des moments fléchissant en premier et en deuxième états.

D'une façon analogue, on peut montrer que le travail des forces intérieures en deuxième état sur les déplacements produits par les forces intérieures du premier état peut se calculer d'après la formule

$$w_{21}^i = \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dx \quad (b)$$

En comparant les expressions (a) et (b), on voit qu'en effet :

$$w_{12}^i = w_{21}^i \quad \text{puisque} \quad \int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dx = \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dx$$

Ceci démontre la réciprocité du travail virtuel des forces intérieures.

En utilisant la loi de la conservation de l'énergie, on peut montrer que le travail supplémentaire des forces extérieures est égal en valeur absolue au travail supplémentaire des forces intérieures:

$$w_{12} = w_{12}^i .$$

Lorsque le système est soumis à la force F_1 , les forces extérieures effectuent le travail ,

$$w_{11} = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} , \text{ et les forces intérieures, le travail } w_{11}^i = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx$$

En vertu de la loi de la conservation de l'énergie, on a :

$$\frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx$$

Pour la sollicitation ultérieure du système par la force F2, on a, d'une façon analogue, l'égalité :

$$\frac{1}{2} F_2 \Delta_{22} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_2^2}{EI} dx$$

D'autre part, lorsque le système subit la force F2, le travail complémentaire réalisé par la force F1 est : $w_{12} = F_1 \Delta_{12}$

et par les forces intérieures $w_{12}^i = \int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dx$

En vertu de la loi de la conservation de l'énergie, le travail w_{12} doit être égal au travail w_{12}^i :

$w_{12} = w_{12}^i$; d'une façon analogue, $w_{21} = w_{21}^i$

Ce qui vient d'être dit implique également : $w_{12} = w_{21} = w_{12}^i = w_{21}^i$

5. Détermination des déplacements par la méthode de Mohr.

On suppose, par exemple, qu'il soit nécessaire de calculer le déplacement vertical du point B de la poutre représentée sur la figure (8 a). On note par 1 l'état donné. On choisit un état auxiliaire de la même poutre à force unitaire (adimensionnelle) appliquée au point B dans la direction du déplacement cherché. On désigne par 2 l'état auxiliaire (fig. 8 b).

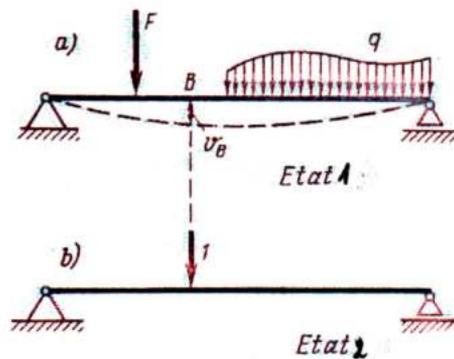


Fig8

On calcule le travail des forces extérieures et intérieures de l'état auxiliaire sur les déplacements résultant de l'action des forces de l'état de sollicitation

Le travail des forces extérieures est égal au produit de la force unitaire par le déplacement cherché v_B : $w_{21} = 1 \cdot v_B$

et le travail des forces intérieures, à l'intégrale

$$w_{21}^i = w_{21}^i = \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dx$$

On a $w_{21} = w_{21}^i$ ou

$$v_B = \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dx$$

C'est ce qu'on appelle l'intégrale de **Mohr** qui permet de calculer le déplacement en un point quelconque d'un système déformé linéairement

Dans cette formule sous le signe d'intégration le produit $M_2 M_1$, est positif si les deux moments fléchissant sont de même signe, et négatif si M_2 et M_1 ont des signes différents.

Si le déplacement angulaire était déterminé pour le point B, il faudrait en état 2 appliquer au point B un moment égal à l'unité.

Si tout déplacement (angulaire ou linéaire) est noté Δ , l'intégrale de Mohr s'écrit:

$$\Delta = \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dx \quad (c)$$

Dans le cas général, l'expression analytique de M_2 et M_1 , peut différer suivant les tronçons différents de la poutre ou, en général, d'un système élastique. C'est pourquoi, au lieu de (c), on peut utiliser une formule plus générale

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dx \quad (d)$$

Si les barres du système travaillent à la flexion et à la traction, il faut utiliser la formule

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M_2 M_1}{EI} dx + \sum \int_0^l \frac{N_2 N_1}{EA} dx \quad (e)$$

Dans le cas particulier, où les barres travaillent seulement à la traction ou à la compression (treillis), la formule des déplacements devient

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{N_2 N_1}{EA} dx \quad (f)$$

Dans cette formule, le produit $N_2 N_1$, est positif si les deux efforts sont une traction ou une compression.

Ordinairement, comme le montrent les calculs comparatifs, le calcul des portiques dans lesquels les barres travaillent simultanément à la flexion et à la traction (compression), les déplacements peuvent être déterminés en ne tenant compte que des moments fléchissant, l'action des efforts normaux étant très faible.

Dans les cas courants on peut ne pas prendre en compte l'action des efforts tranchants.

Le calcul immédiat de l'intégrale de Mohr peut être remplacé par le mode grapho-analytique ou la méthode de multiplication des diagrammes, ou encore la règle de Vérechtchaguine.

Donc , pour déterminer les déplacements, on a la formule de Vérechtchaguine suivante :

$$\Delta_{21} = \frac{A_1 M_{2c}}{EI}$$

On admet que la quantité $A_1 M_{2c}$ est positive si les deux diagrammes sont du même côté de la barre, et négative s'ils se trouvent sur des côtés différents. Le résultat positif de la multiplication des diagrammes signifie que la direction du déplacement coïncide avec la direction de la force (ou du moment) unitaire

Pour les barres de section variable, la règle de Vérechtchaguine de la multiplication des diagrammes est inapplicable du fait que EI ne peut déjà plus être sortie du signe d'intégration. Il faut alors exprimer la quantité EI comme fonction de l'abscisse de la section et calculer l'intégrale de Mohr

Lorsque la rigidité de la barre change par gradins, l'intégration (ou la multiplication des diagrammes) se fait pour chaque tronçon isolément, puis les résultats sont sommés.

7. Le théorème de Castigliano

On considère un corps élastique pour lequel le système qui comporte les forces concentrées $p_i (i=1, \dots, n)$ et les réactions constitue le système I. On augmente la valeur d'une force quelconque (exemple p_R) d'une petite quantité Δp_R , l'ensemble comportant l'augmentation de charge Δp_R et les variations des réactions constitue le système II.

$$\sum_{i=1}^n (\bar{p}_i)_I (\Delta \bar{\delta}_i)_{II} = (\Delta \bar{p}_R)_{II} (\bar{\delta} R)_I \quad (7.1)$$

$(\Delta \bar{\delta}_i)_{II}$: représente le déplacement du point d'application de la force p_i causé par l'augmentation de la charge Δp_R .

$(\bar{\delta} R)_I$: le déplacement du point d'application de la force p_R du a l'ensemble des forces initiales.

On Calcule l'accroissement de l'énergie de déformation Δw qui résulte de l'augmentation de charge Δp_R .

$$\Delta w = \frac{1}{2} (\Delta \bar{p}_R)_{II} (\Delta \bar{\delta} R)_{II} + \sum_{i=1}^n (\bar{p}_i)_I (\Delta \bar{\delta}_i)_{II} \quad (7.2)$$

On remplace le second terme de droite par son équivalent

$$\Delta w = \frac{1}{2} (\Delta \bar{p}_R)_{II} (\Delta \bar{\delta} R)_{II} + (\Delta \bar{p}_R)_{II} (\bar{\delta} R)_I$$

Si on divise par Δp_R on obtient :

$$\frac{\Delta w}{\Delta p_R} = \frac{1}{2} \frac{(\Delta \bar{p}_R)}{\Delta p_R} (\Delta \bar{\delta} R) + \frac{(\Delta \bar{p}_R)}{\Delta p_R} (\bar{\delta} R)$$

Lorsque $\Delta p_R \rightarrow 0$ $\frac{1}{2} \frac{(\Delta \bar{p}_R)}{\Delta p_R} (\Delta \bar{\delta} R) \rightarrow 0$

Et on peut pouvons écrire :

$$\frac{\Delta w}{\Delta p_R} = \lim_{\Delta p_R \rightarrow 0} \frac{(\overline{\Delta p_R})}{\Delta p_R} (\overline{\delta R})$$

$\frac{(\overline{\Delta p_R})}{\Delta p_R}$ représente le vecteur unitaire dans la direction p_R .

Le produit scalaire de $\overline{\delta R}$ par ce vecteur unitaire fournit la composante du déplacement du point d'application de p_R dans la direction de p_R .

On appelle cette composante δR , et on obtient la relation fondamentale du théorème de Castigliano.

$$\frac{\partial w}{\partial p_R} = \delta R$$

De façon identique, on peut montrer qu'avec un moment M on obtient :

$$\frac{\partial w}{\partial M} = \theta$$

Où θ est l'angle de rotation autour de l'axe du moment, au point d'application du moment.

Le théorème de Castigliano s'énonce :

La dérivée de l'énergie de déformation par rapport à l'une des forces extérieures appliquées est égale à la projection du déplacement du point d'application de cette force suivant sa ligne d'action.

La dérivée de l'énergie de déformation par rapport à l'un des couples extérieurs appliqués est égale à la projection de la rotation du point d'application de ce couple suivant son axe.

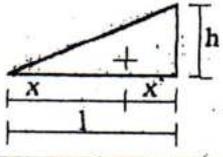
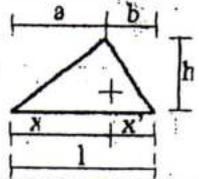
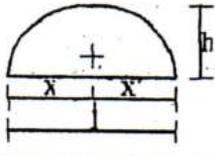
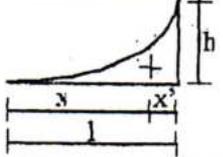
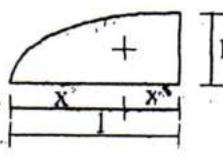
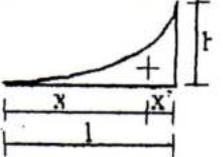
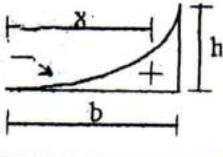
Application du théorème de Castigliano aux systèmes hyperstatiques

Théorème de Ménabrea

Le théorème de Castigliano indique que la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à une force quelconque appliquée à un système en équilibre est égale à la projection du déplacement du point d'application de cette force suivant sa ligne d'action. Dans le cas où on considère la réaction d'un appui, le déplacement de cette réaction est nul. Il faut donc en conclure que la dérivée partielle de l'énergie de déformation.

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial p} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial M} = 0 \end{cases}$$

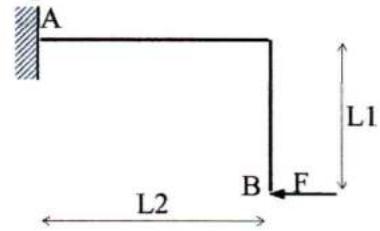
AIRES ET CENTRES DE GRAVITE

Forme	Aspect graphique	A	x	x'
Triangle		$\frac{1}{2}lh$	$\frac{2}{3}l$	$\frac{1}{3}l$
Triangle		$\frac{1}{2}lh$	$\frac{1}{3}(l+a)$	$\frac{1}{3}(l+b)$
Degré II		$\frac{2}{3}lh$	$\frac{1}{2}l$	$\frac{1}{2}l$
Degré II		$\frac{1}{3}lh$	$\frac{3}{4}l$	$\frac{1}{4}l$
Degré II		$\frac{2}{3}lh$	$\frac{5}{8}l$	$\frac{3}{8}l$
Degré III		$\frac{1}{4}lh$	$\frac{4}{5}l$	$\frac{1}{5}l$
Cas général	$y=lx^n$ 	$\frac{bh}{n+1}$	$\frac{n+1}{n+2}b$	-

Déformation des structures élastiques

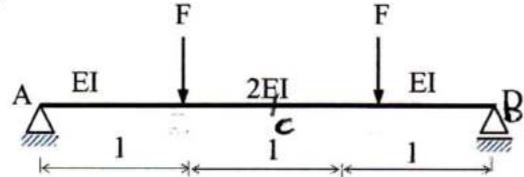
Ex01 : Déterminer le déplacement vertical, horizontal et angulaire de la section B.

(En utilisant l'intégrale de Mohr et la méthode de Verechtchaguine).

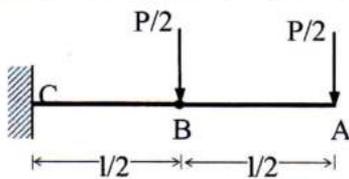


Ex02 : Déterminer d'après la méthode de Verechtchaguine

l'angle de rotation sur l'appui gauche A et la flèche au milieu de la poutre.

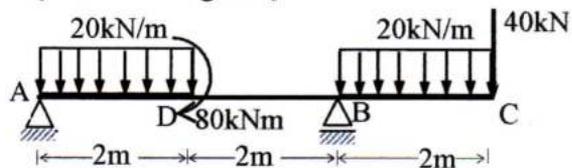


Ex03 : Déterminer la flèche en A. (Castigliano)

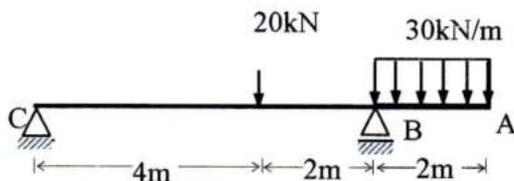


Ex04 : Déterminer la flèche au point D

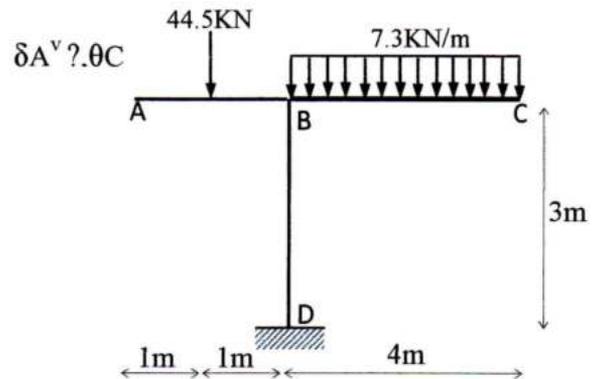
(Verechtchaguine).



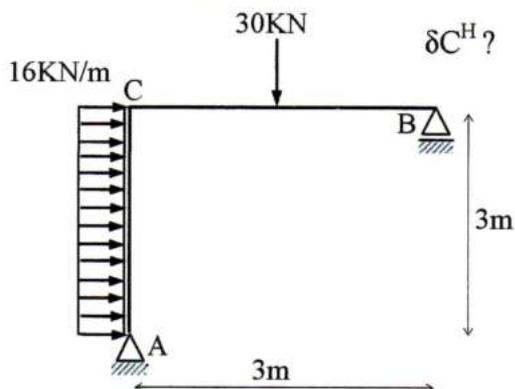
Ex05: Calculer le déplacement du point A, et la rotation en B. (Castigliano)



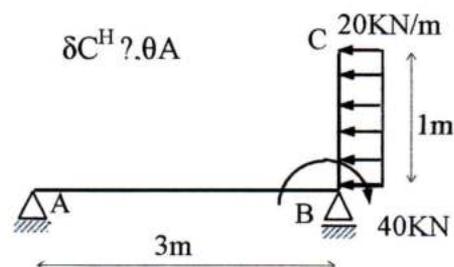
Ex06 : Calculer le déplacement vertical du point A, et la rotation en C.



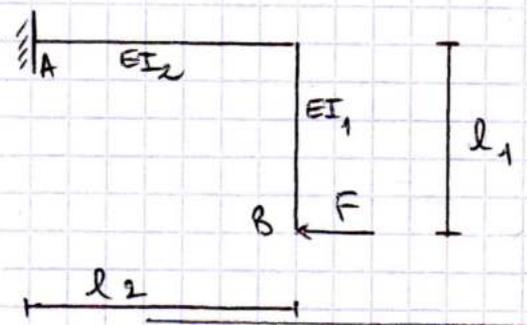
Ex07 : Calculer le déplacement horizontal du point C



Ex08 : Calculer le déplacement horizontal du point C, et la rotation en A.



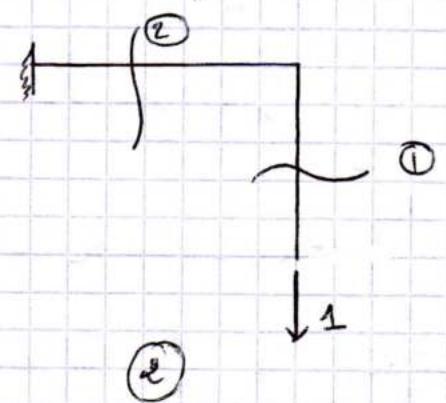
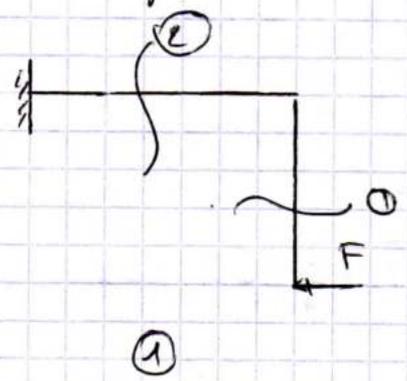
Ex: Déterminer le déplacement vertical, horizontal et angulaire de la section B. (En utilisant l'intégrale de Mohr et la méthode de Vereschkaiguine.)



Δ_B^V ? Δ_B^H ? Θ_B ?

1/ l'intégrale de Mohr: on suppose

Δ_B^V une force unitaire verticale en B.



$$M_1(x) = -Fx \quad 0 \leq x \leq l_1$$

$$M_2(x) = -Fl_1 \quad 0 \leq x \leq l_2$$

$$m_1(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq l_1$$

$$m_2(x) = -1 \cdot x \quad 0 \leq x \leq l_2$$

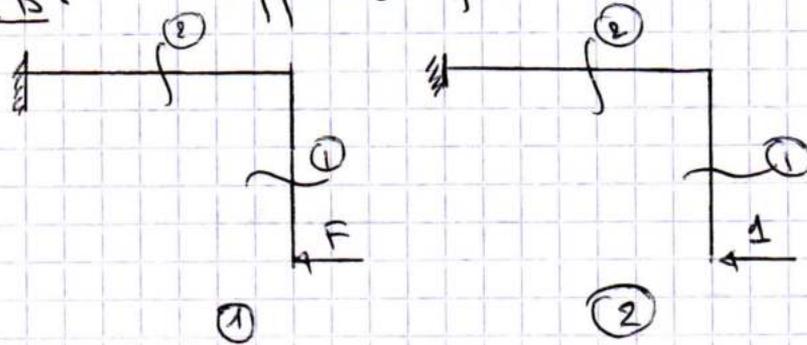
$$\Delta_B^V = \frac{1}{EI_1} \int_0^{l_1} M_1 m_1 dx + \frac{1}{EI_2} \int_0^{l_2} M_2(x) m_2(x) dx$$

$$\Delta_B^V = \frac{1}{EI_1} \int_0^{l_1} (-Fx)(0) dx + \frac{1}{EI_2} \int_0^{l_2} (-Fl_1)(-x) dx$$

$$\Delta_B^V = \frac{1}{EI_2} \int_0^{l_2} (Fl_1 x) dx$$

$$\Delta_B^V = \frac{1}{EI_2} Fl_1 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{l_2} = \frac{Fl_1 l_2^2}{2EI_2}$$

Δ_B^H ? on suppose une force unitaire horizontale en B.



$$M_1(u) = -Fx \quad 0 \leq x \leq l_1$$

$$m_1(u) = -1 \cdot x \quad 0 \leq x \leq l_1$$

$$M_2(u) = -Fl_1 \quad 0 \leq x \leq l_2$$

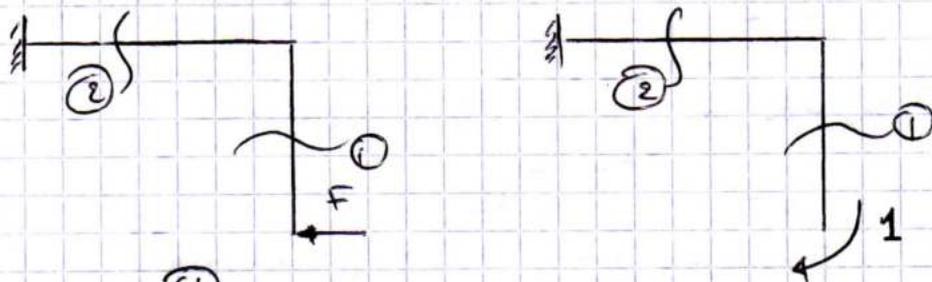
$$m_2(u) = -1 \cdot l_1 \quad 0 \leq x \leq l_2$$

$$\Delta_B^H = \frac{1}{EI_1} \int_0^{l_1} M_1(u) m_1(u) dx + \frac{1}{EI_2} \int_0^{l_2} M_2(u) m_2(u) dx$$

$$= \frac{1}{EI_1} \int_0^{l_1} (-Fx)(-x) dx + \frac{1}{EI_2} \int_0^{l_2} (-Fl_1)(-l_1) dx$$

$$\Delta_B^H = \frac{1}{EI_1} \left(\frac{Fx^3}{3} \right) \Big|_0^{l_1} + \frac{1}{EI_2} (Fl_1^2 x) \Big|_0^{l_2} = \frac{1}{EI_1} \frac{Fl_1^3}{3} + \frac{1}{EI_2} Fl_1^2 l_2$$

θ_B ? on suppose un moment unitaire en B.



$$M_1(u) = -Fx \quad 0 \leq x \leq l_1$$

$$m_1(u) = -1 \quad 0 \leq x \leq l_1$$

$$M_2(u) = -Fl_1 \quad 0 \leq x \leq l_2$$

$$m_2(u) = -1 \quad 0 \leq x \leq l_2$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI_1} \int_0^{l_1} M_1(u) m_1(u) dx + \frac{1}{EI_2} \int_0^{l_2} M_2(u) m_2(u) dx$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI_1} \int_0^{l_1} (-Fx)(-1) dx + \frac{1}{EI_2} \int_0^{l_2} (-Fl_1)(-1) dx$$

$$= \frac{1}{EI_1} \left(\frac{Fx^2}{2} \right) \Big|_0^{l_1} + \frac{1}{EI_2} (Fl_1 x) \Big|_0^{l_2}$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI_1} \frac{Fl_1^2}{2} + \frac{1}{EI_2} Fl_1 l_2$$

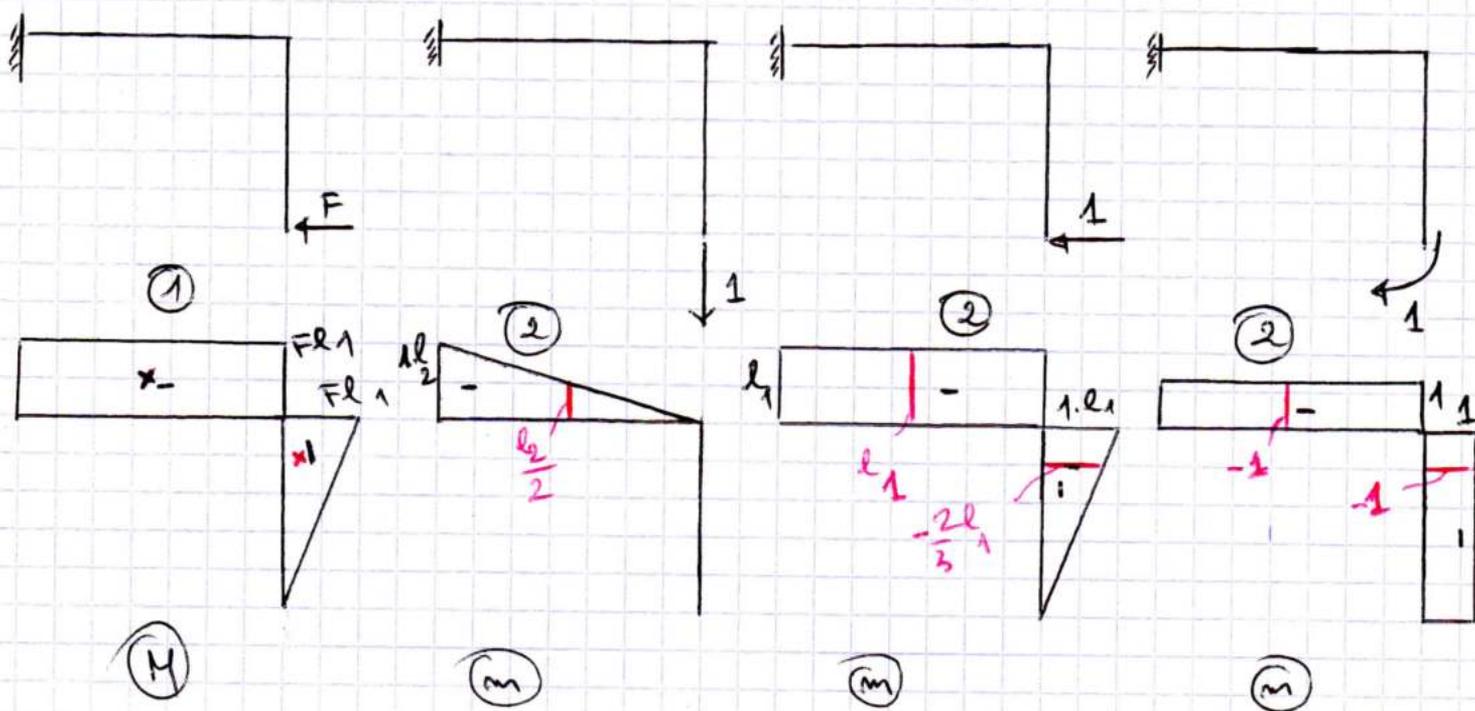
2/ Verécht + chargimhe :

pour calculer Δ_B^V : on suppose une force verticale en B (force unitaire)

" Δ_B^H : " une force unitaire horizontale en B.

" θ_B : " un moment unitaire en B.

Ensuite on trace les diagrammes des moments flexionnant des 4 cas (état initial + 3 cas supposés).



$$\Delta = \frac{A_1 M_2 c}{EI}$$

$$\Delta_B^V = \frac{1}{EI_2} \left((-Fl_1) l_2 \right) \left(\frac{l_2}{2} \right) = \frac{1}{EI_2} \frac{Fl_1 l_2^2}{2}$$

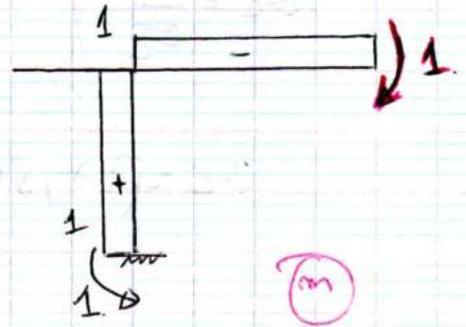
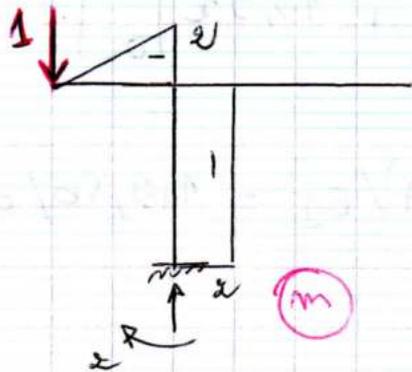
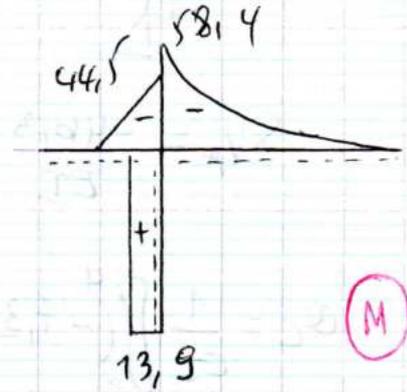
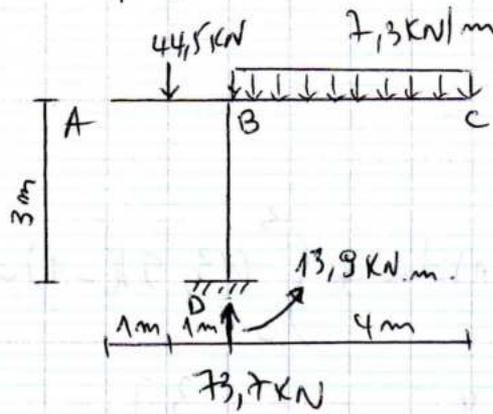
$$\begin{aligned} \Delta_B^H &= \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} (-Fl_1) l_1 \right) \left(\frac{-2}{3} l_1 \right) + \frac{1}{EI_2} \left((-Fl_1) (l_2) \right) (-l_1) = \\ &= \frac{1}{EI_1} \frac{Fl_1^3}{3} + \frac{1}{EI_2} Fl_1^2 l_2 \end{aligned}$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI_1} \left(\frac{1}{2} (-Fl_1) l_1 \right) (-1) + \frac{1}{EI_2} \left((-Fl_1) (l_2) \right) (-1)$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI_1} \frac{Fl_1^2}{2} + \frac{1}{EI_2} Fl_1 l_2$$

ex: En utilisant la methode de Vereschtaguine calculer:

δ_A^V , θ_C



$$\delta_A^V = \frac{1}{EI} \left(\left(\frac{1}{2} \cdot 44,5 \cdot (1) \cdot \left(-\frac{5}{3} \right) \right) + (13,9 \cdot 3) \cdot (-2) \right) = \frac{(37,08 - 83,4)}{EI} = -\frac{46,32}{EI}$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \left(\left(-\frac{1}{3} \cdot 58,4 \cdot 4 \right) \cdot (-1) + (13,9 \cdot 3) \cdot (1) \right) = \frac{77,86 + 41,7}{EI} = \frac{119,56}{EI}$$

En utilisant Nowi:

$$\delta_A^V = \frac{1}{EI} \left[\int_1^2 -44,5(x-1)(-x) dx + \int_0^3 (13,9)(-2) dx \right]$$

$$\delta_A^V = \frac{1}{EI} \left[\int_1^2 (44,5x^2 - 44,5x) dx + \int_0^3 -27,8 dx \right]$$

$$\frac{1}{EI} \left[\left(\frac{44,5x^3}{3} - \frac{44,5x^2}{2} \right) \Big|_1^2 + (-27,8x) \Big|_0^3 \right]$$

$$\delta_A^V = \frac{1}{EI} \left[(118,66 - 89) - (14,83 - 22,25) + (-83,4) \right]$$

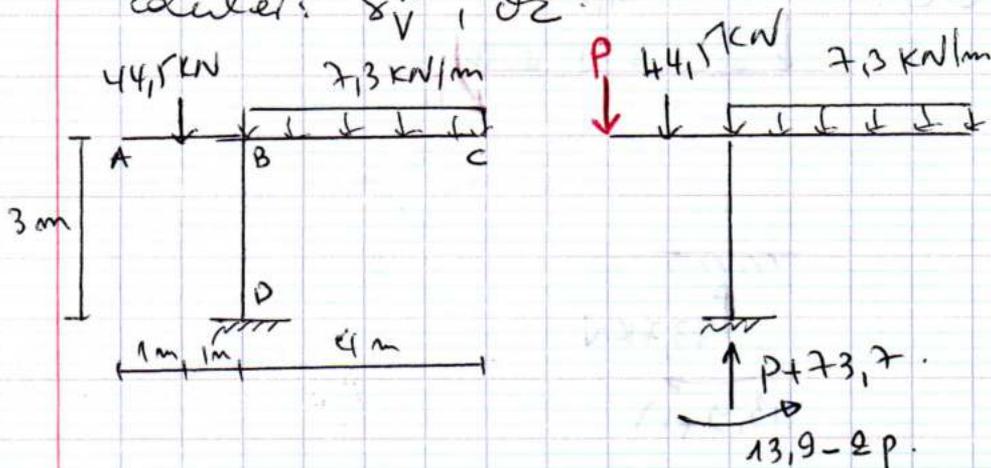
$$\delta_{VA} = \frac{-46,32}{EI}$$

$$\varphi_C = \frac{1}{EI} \left[\int_0^4 \left(-7,3 \frac{x^2}{2} \right) (-1) dx + \int_0^3 (13,9) (-1) dx \right]$$

$$\varphi_C = \frac{1}{EI} \left[\frac{7,3x^3}{6} \Big|_0^4 + 13,9x \Big|_0^3 \right]$$

$$\varphi_C = (77,86 + 41,7) / EI = 119,56 / EI$$

Ex: En utilisant la methode de Castigliano
calculer: δ_V^A , θ_Z .



$$M_1(x) = -7,3 \frac{x^2}{2} \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \quad \frac{\partial M_1}{\partial P} = 0$$

$$M_2(x) = -px \quad 0 \leq x \leq 1 \text{ m} \quad \frac{\partial M_2}{\partial p} = -x$$

$$M_2(x) = -px - 44,5(x-1) \quad 1 \leq x \leq 2 \quad \frac{\partial M_2}{\partial p} = -x$$

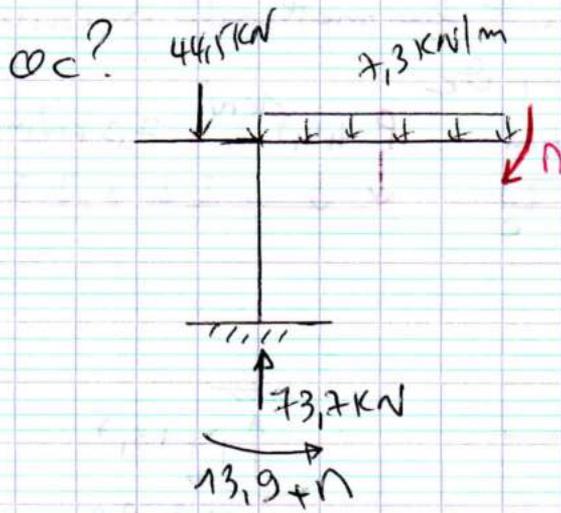
$$M_3(x) = 13,9 - 2p \quad 0 \leq x \leq 3 \quad \frac{\partial M_3}{\partial p} = -2$$

$$\delta_V^A = \frac{1}{EI} \left[\int_1^2 -44,5(x-1)(-x) dx + \int_0^3 (13,9)(-2) dx \right]$$

$$\delta_V^A = \frac{1}{EI} \left[\int_1^2 (44,5x^2 - 44,5x) dx + \int_0^3 -27,8 dx \right]$$

$$\delta_V^A = \frac{1}{EI} \left[\left. \frac{44,5x^3}{3} - \frac{44,5x^2}{2} \right|_1^2 + \left. -\frac{27,8x}{1} \right|_0^3 \right]$$

$$\delta_V^A = \frac{-46,32}{EI}$$



$$M_1(x) = -n - \frac{7.3x^2}{2} \quad 0 \leq x \leq 4 \text{ m} \quad \frac{\partial M_1}{\partial n} = -1.$$

$$M_2(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \frac{\partial M_2}{\partial n} = 0.$$

$$M_2(x) = -44.5(x-1) \quad 1 \leq x \leq 2 \quad \frac{\partial M_2}{\partial n} = 0.$$

$$M_3(x) = 13.9 + n \quad 0 \leq x \leq 3 \quad \frac{\partial M_3}{\partial n} = 1.$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \left[\int_0^4 \left(-\frac{7.3x^2}{2} \right) (-1) dx + \int_0^3 (13.9)(1) dx \right]$$

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \left[\frac{7.3x^3}{6} \Big|_0^4 + 13.9x \Big|_0^3 \right]$$

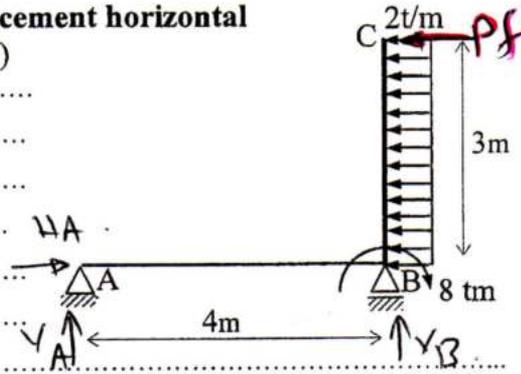
$$\theta_C = \frac{1}{EI} (77.86 + 41.7)$$

$$\theta_C = \frac{119.56}{EI}$$

Nom : Prénoms : Section : Groupe :

castigliano
Exo #2 (6.5 points) : En utilisant la méthode de Castigliano, Calculer le déplacement horizontal du point C. EI = constante. (L'effet de l'effort normal étant négligeable)

on suppose une force fictive Pf en C



$$\sum H_A = 0 \quad H_A = Pf + 2 \cdot 3 \cdot 1,5 = Pf + 9$$

$$\sum M/A = 0$$

$$-V_B \cdot 4 + 8 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 - Pf \cdot 3 = 0$$

$$V_B = \frac{8 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 - Pf \cdot 3}{4} = -0,25 - 0,75 Pf = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} Pf$$

$$\sum M/B = 0 \quad V_A \cdot 4 + 8 - 2 \cdot 3 \cdot 1,5 - Pf \cdot 3 = 0$$

$$V_A = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1,5 - 8 + Pf \cdot 3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} Pf$$

$$\Delta_C^H = \frac{1}{EI} \left(\int_0^4 n_1 \frac{\partial n_1}{\partial Pf} dx + \int_0^3 n_2 \frac{\partial n_2}{\partial Pf} dx \right)$$

$$n_1 = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} Pf \right) x \quad 0 \leq x \leq 4 \quad \frac{\partial n_1}{\partial Pf} = \frac{3}{4} x$$

$$n_2 = Pf x + \frac{2x^2}{2} \quad 0 \leq x \leq 3 \quad \frac{\partial n_2}{\partial Pf} = x$$

Pf=0 (parce que réellement elle n'existe pas)

$$\Delta_C^H = \frac{1}{EI} \left(\int_0^4 \left(\frac{1}{4} x \right) \left(\frac{3}{4} x \right) dx + \int_0^3 \left(\frac{2x^2}{2} \right) (x) dx \right)$$

$$\Delta_C^H = \frac{1}{EI} \left(\int_0^4 \frac{3}{16} x^2 dx + \int_0^3 x^3 dx \right)$$

$$\Delta_C^H = \frac{1}{EI} \left(\frac{3x^3}{3 \cdot 16} \Big|_0^4 + \frac{x^4}{4} \Big|_0^3 \right) = \left(\frac{4}{16} + \frac{3}{4} \right) \frac{1}{EI}$$

$$\Delta_C^H = \frac{1}{EI} (4 + 20,25) = \frac{24,25}{EI}$$

les structures hyperstatiques (statiquement indéterminées)

Structures isostatiques et hyperstatiques

Les structures peuvent être isostatiques et hyperstatiques. On considère une structure isostatique si on peut déterminer les réactions des appuis ainsi que les efforts internes à n'importe quel point de la structure en utilisant seulement les équations d'équilibre de la statique.

Dans le cas où le nombre d'équations de la statique ne suffit pas pour déterminer les réactions et les efforts, on est en présence d'une structure hyperstatique.

Liaisons surabondantes

On appelle liaisons surabondantes, les liaisons supplémentaires qu'il faudrait supprimer du système hyperstatique pour obtenir un système isostatique. On a deux types de liaisons surabondantes :

- Les liaisons surabondantes extérieures que l'on retrouve dans les appuis (les réactions).
- Les liaisons surabondantes intérieures sont celles qui proviennent des contours fermés.

Le nombre de liaisons surabondantes représente le degré d'hyperstaticité du système.

Calcul du degré d'hyperstaticité

Il existe plusieurs méthodes pour calculer ce degré: méthode de la suppression des liaisons surabondantes, la méthode de l'arbre ouvert, la méthode des contours fermés.

Les conditions d'équilibre écrites pour chaque barre conduit à 3 équations. Soit $\sum Li$ le nombre d'inconnues introduit par l'ensemble des liaisons on a : le degré d'hyperstaticité est donné par la formule suivante

$$d = \sum Li - 3b \quad d : \text{degré d'hyperstaticité} ; \sum Li \text{ le nombre d'inconnues} ; b : \text{nombre de barres}$$

Méthode des contours fermés

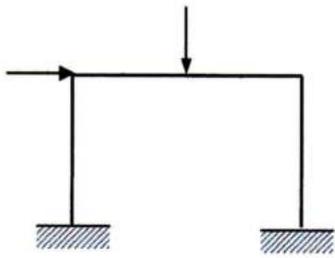
Un contour fermé est un ensemble de barres encastées entre elles ou avec le terrain. Le degré d'hyperstaticité est égal à 3.

Pour une structure formée de plusieurs contours fermés, le degré d'hyperstaticité est égal à $3C$ ou C est le nombre de contours fermés. L'existence d'une articulation réduit le degré d'hyperstaticité de 1 et l'existence d'un appui simple réduit le degré d'hyperstaticité de 2.

le degré d'hyperstaticité est donné par la formule suivante :

$$d = 3c - 1a - 2s$$

c: Le nombre de contours fermés de la structure a: Le nombre d'appuis doubles
 s: Le nombre d'appuis simples

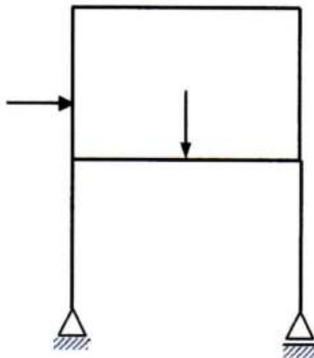


Structure hyperstatique

Extérieurement

$$d=6+6-3.3=3$$

Donc 3 fois hyperstatique

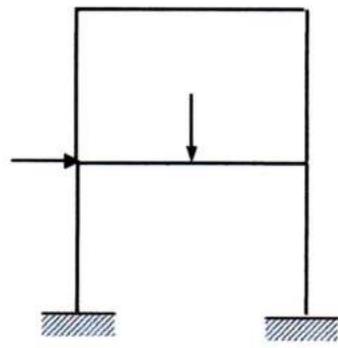


Structure hyperstatique

intérieurement

$$d=3+18-3.6=3$$

Donc 3 fois hyperstatique



Structure hyperstatique

intérieurement et extérieurement

$$d=6+18-3.6=6$$

Donc 6 fois hyperstatique

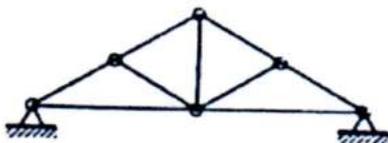
Structures en treillis

La formule ci-dessous permet de déterminer le degré d'hyperstaticité dans le cas des systèmes en treillis :

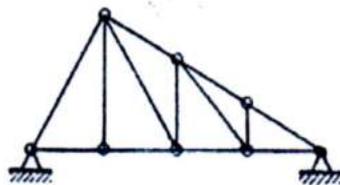
$$d = b + l - 2n$$

b : nombre de barres ; l : nombre de liaisons ; n : nombre de nœuds

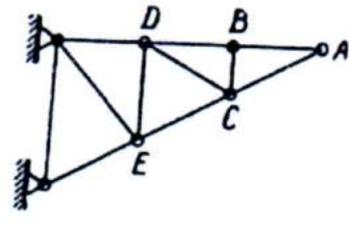
Applications :



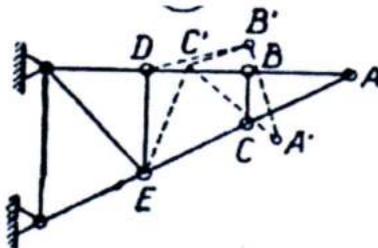
6 nœuds
9 barres



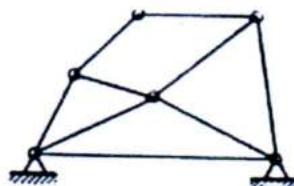
8 nœuds
13 barres



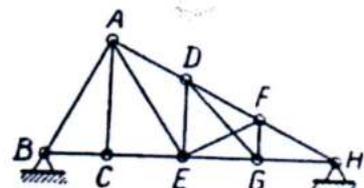
7 nœuds
11 barres



7 nœuds
10 barres



6 nœuds
9 barres



8 nœuds
14 barres

les pontes cantilever:



$$W = 3c - 1a - 2s$$

$$= 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0$$

$$W = 3Li - 3b$$

$$= 5 + 4 - 3 \cdot 3$$

$$= 0$$



$$W = 3c - 1a - 2s$$

$$= 3 \cdot 3 - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 0$$

$$W = 5 + 4 - 3 \cdot 3 = 0$$

Lex L_i $3b$.



$$W = 3c - 1a - 2s$$

$$= 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 0$$

$$= 0$$

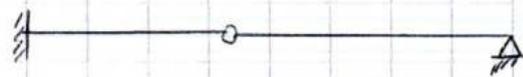
$$W = 3Li - 3b$$

$$5 + 4 - 3 \cdot 3 = 0$$



$$W = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2$$

$$W = 6 + 2 - 3 \cdot 2 = 2$$



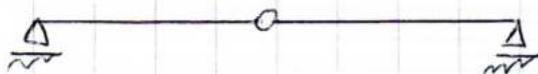
$$W = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1$$

$$W = 5 + 2 - 3 \cdot 2 = 1$$



$$W = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 2$$

$$W = 5 - 3 \cdot 1 = 2$$



$$W = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -2$$

$$W = 2 + 2 - 3 \cdot 2 = -2$$

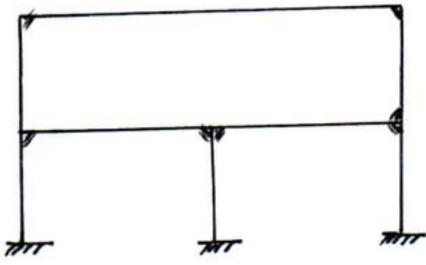


$$W = 3 \cdot 1 = 3$$

$$W = 6 - 3 \cdot 1 = 3$$

$$\textcircled{1} \omega = 3c - 1a - 2s$$

$$\textcircled{2} \omega = \sum Li - 3b$$

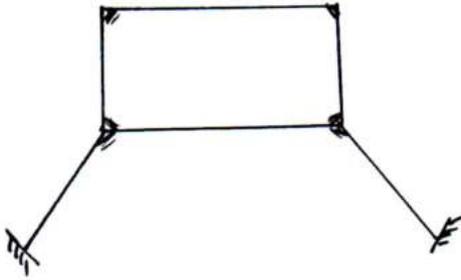


$$\textcircled{1} \omega = 3c - 1a - 2s$$

$$\omega = 3 \cdot 3 = 9$$

$$\textcircled{2} \omega = \sum Li - 3b$$

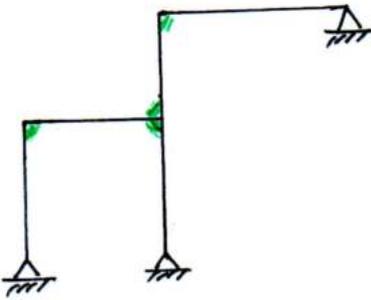
$$\omega = 9 + 24 - 3 \cdot 8 = 9$$



$$\textcircled{1} \omega = 3 \cdot 2 = 6$$

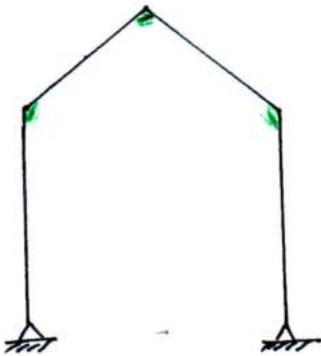
$$\textcircled{2} \omega = 6 + 18 - 3 \cdot 6 = 6$$

$$(\omega = 2 \cdot c = 2 \cdot 3 = 6)$$



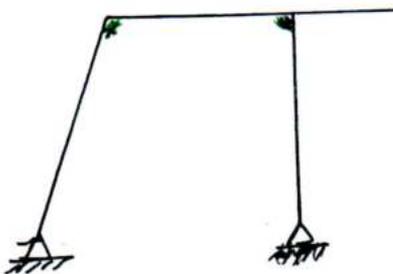
$$\omega = 2 \cdot 3 - 1(3) = 3$$

$$\omega = 6 + 12 - 3(5) = 3$$



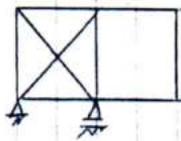
$$\omega = 3 \cdot 1 - 1(2) = 1$$

$$\omega = 4 + 9 - 3(4) = 1$$



$$\omega = 3(1) - 1(2) = 1$$

$$\omega = 4 + 6 - 3(3) = 1$$

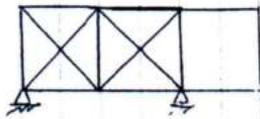


$b=9, n=6$

$$w = b + l - 2n$$

$$= 9 + 3 - 2 \cdot 6 = 0.$$

isostatique mais elle
présente une partie instable

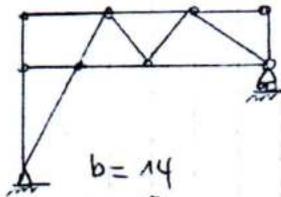


$b=14, n=8$

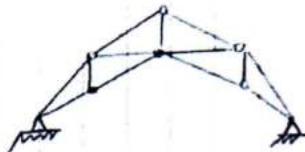
$$w = 14 + 3 - 2 \cdot 8$$

$$= 1.$$

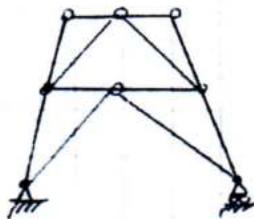
hyperstatique mais elle
présente une partie instable



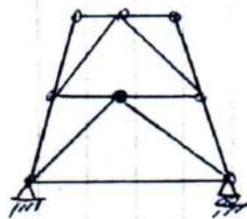
$b=14$
 $n=9$
mécanisme.



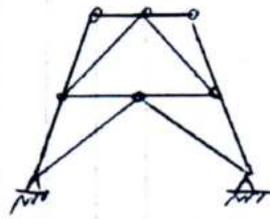
$b=13$
 $n=8$
hyperstatique



$b=12$
 $n=6$
mécanisme actif



$b=13$
 $n=8$
isostatique



$b=12$
 $n=6$
isostatique.

Equation de la ligne élastique.

Generalités: quand on charge une poutre, la ligne moyenne initialement droite se déforme sous l'effet d'un moment fléchissant. L'allure de l'axe longitudinal de la poutre après flexion (déformée) est appelée ligne élastique.

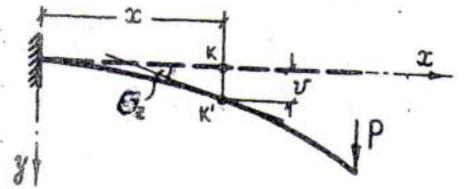
Equation différentielle de la ligne élastique:

d'après l'étude de la flexion pure on a établi la relation suivante:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{Mz}{EIz} \quad (1)$$

$\frac{1}{\rho}$: courbure de l'axe de la poutre

EIz : la rigidité flexionnelle.



on sait par les mathématiques, que:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (2)$$

le signe dépend de l'orientation des axes. Plus (+) si y est dirigé en haut, et (-) en bas.

en égalisant (1) et (2), on obtient l'équation différentielle de la ligne élastique de la poutre:

$$\frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} = - \frac{Mz}{EIz} \quad (3)$$

pour les poutres rigides la grandeur $\frac{dv}{dx}$ est petite. Alors on peut négliger le terme $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$ devant l'unité

l'équation de la ligne élastique s'écrit finalement:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = - \frac{Mz}{EIz} \quad (4)$$

pour déterminer la forme de la ligne élastique de la poutre, il faut résoudre l'équation (4). c'est à dire il faut trouver des expressions $v(x)$ et $\theta(x)$. on va voir deux méthodes pour la résolution de l'équation (4).

la méthode de l'intégration de la ligne élastique:
on fait l'intégration de l'équation (4). la première intégration donne l'expression de $\theta(x)$.

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} = - \int \frac{M_z(x)}{EI_z} dx + a \quad (5)$$

la deuxième intégration donne:

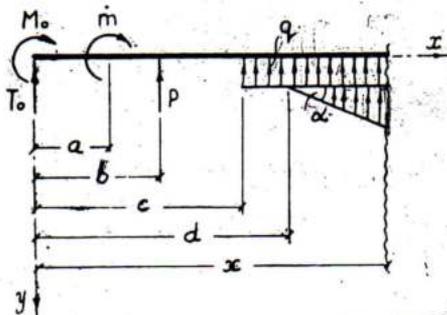
$$v(x) = - \iint \frac{M_z(x)}{EI_z} dx^2 + ax + b \quad (6)$$

on détermine les constantes d'intégration a et b à l'aide des conditions aux limites.

la méthode des paramètres initiaux:

on considère une portion de la poutre, chargée par un certain système de forces. dans une section constante x le moment (le choisissant $M_z(x)$ peut être écrit:

$$M_z(x) = M_0 + T_0 x + m(x-a)^0 + p(x-b)^1 + q \frac{(x-c)^2}{2} + \frac{tg \alpha (x-d)^3}{6} \quad (7)$$



l'expression de $M_z(x)$ peut être représentée sous la forme:

$$M_z(x) = M_0 + T_0 x + \begin{cases} m(x-a)^0 \\ x > a \end{cases} + \begin{cases} p(x-b)^1 \\ x > b \end{cases} + \begin{cases} q \frac{(x-c)^2}{2} \\ x > c \end{cases} + \begin{cases} \frac{tg \alpha (x-d)^3}{6} \\ x > d \end{cases} \quad (8)$$

le signe $|x > u$ dit que le membre correspondant doit être pris en considération uniquement pour les sections où $x > u$.

l'équation différentielle de la ligne élastique est donnée par:

$$EI_z \frac{d^2 u}{dx^2} = -Dz \quad (9)$$

En égalisant (8) et (9) on obtient:

$$EI_z \frac{d^2 u}{dx^2} = - \left[M_0 + T_0 x + \int_{x>a} m(x-a)^0 + \int_{x>b} p(x-b)^1 + \int_{x>c} \frac{q(x-c)^2}{2} + \int_{x>d} \frac{tgd(x-d)^3}{6} \right]$$

l'intégration de cette équation donne:

$$\frac{EI_z du}{dx} = EI_z \theta(x) = a - \left[M_0 x + \frac{T_0 x^2}{2} + \int_{x>a} m(x-a) + \int_{x>b} \frac{p(x-b)^2}{2} + \int_{x>c} \frac{q(x-c)^3}{6} + \int_{x>d} \frac{tgd(x-d)^4}{24} \right]$$

la deuxième intégration donne:

$$EI u(x) = B + ax - \left[\frac{M_0 x^2}{2} + \frac{T_0 x^3}{6} + \int_{x>a} \frac{m(x-a)^2}{2} + \int_{x>b} \frac{p(x-b)^3}{6} + \int_{x>c} \frac{q(x-c)^4}{24} + \int_{x>d} \frac{tgd(x-d)^5}{120} \right]$$

pour $x=0$ $a = EI_z \theta_0$, $B = EI_z v_0$.

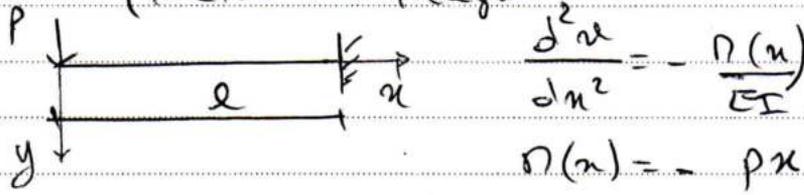
où θ_0 et v_0 sont les valeurs de θ_z et v en extrémité gauche de la poutre.

on a finalement:

$$EI u(x) = EI_z v_0 + EI_z \theta_0 x - \left[\frac{M_0 x^2}{2} + \frac{T_0 x^3}{6} + \int_{x>a} \frac{m(x-a)^2}{2} + \int_{x>b} \frac{p(x-b)^3}{6} + \int_{x>c} \frac{q(x-c)^4}{24} + \int_{x>d} \frac{tgd(x-d)^5}{120} \right]$$

cette équation s'appelle l'équation universelle de la ligne élastique.

Ex: Déterminer les expressions de $v(x)$ et $\sigma(x)$. $E = \text{constante}$
(méthode d'intégration)



$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{\sigma(x)}{E}$$

$$\sigma(x) = -px$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{px}{E}$$

$$\sigma(x) = \frac{dv}{dx} = \int \frac{px}{E} dx = \frac{px^2}{2E} + a_1 \quad \text{--- (1)}$$

$$v(x) = \int \left(\frac{px^2}{2E} + a_1 \right) dx = \frac{px^3}{6E} + a_1 x + b_1 \quad \text{--- (2)}$$

CL1

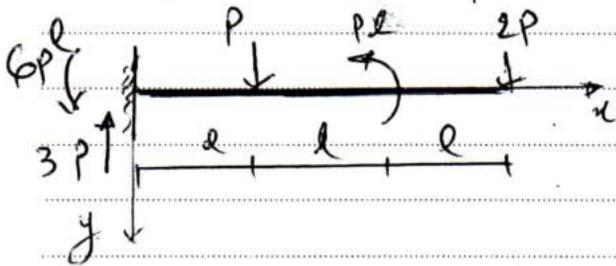
$$\text{à } x = l \quad \sigma(l) = 0, \quad v(l) = 0.$$

$$\begin{cases} \frac{pl^2}{2E} + a_1 = 0 \rightarrow a_1 = -\frac{pl}{2E} \\ \frac{pl^3}{6E} - \frac{pl^2}{2E} + b_1 = 0 \rightarrow b_1 = \frac{pl}{3E} \end{cases}$$

les expressions de $v(x)$ et $\sigma(x)$:

$$\begin{cases} \sigma(x) = \frac{px^2}{2E} - \frac{pl}{2E} \\ v(x) = \frac{px^3}{6E} - \frac{pl}{2E}x + \frac{pl}{3E} \end{cases}$$

Ex: déterminer les expressions de $u(x)$ et $\theta(x)$, en utilisant la méthode des paramètres initiaux.



$$EIv = EIv_0 x + EIv_0' \left(\frac{M(x-a)^2}{2} + \frac{p(x-b)^3}{6} + \frac{q(x-c)^4}{24} + \frac{td(x-d)^5}{120} \right)$$

$$v_0 = v_0' = 0$$

$$EIu = - \left(\frac{-6plx^2}{2} + \frac{3plx^3}{6} - \left| \frac{p(x-l)^3}{6} \right|_{x>l} - \left| \frac{pl(x-2l)^2}{2} \right|_{x>2l} \right)$$

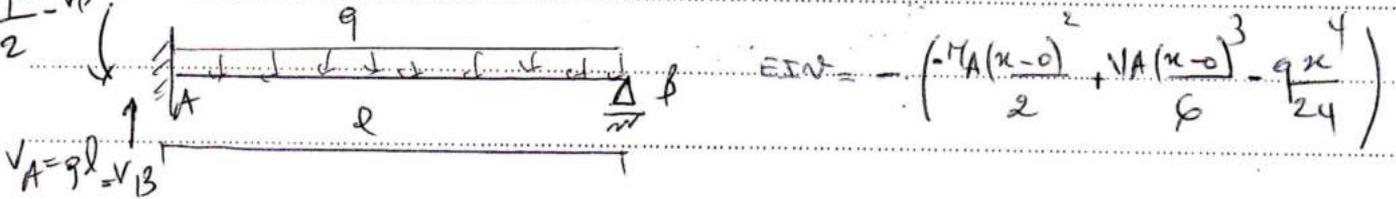
$$EIv = \frac{3plx^2}{2} - \frac{px^3}{2} + \left| \frac{p(x-l)^3}{6} \right|_{x>l} + \left| \frac{pl(x-2l)^2}{2} \right|_{x>2l}$$

on obtient $\theta(x)$ par différentiation de $u(x)$

$$EI\theta(x) = 6plx - \frac{3px^2}{2} + \left| \frac{p(x-l)^2}{2} \right|_{x>l} + \left| \frac{pl(x-2l)}{1} \right|_{x>2l}$$

Ex: En utilisant l'équation universelle de la ligne élastique
calculer les réactions des appuis.

$$M_A = \frac{ql^2}{2} - V_B l$$



$$EIv'''' = - \left(\frac{M_A(x-0)^2}{2} + \frac{V_A(x-0)^3}{6} - \frac{qx^4}{24} \right)$$

$$EIv'''' = - \left(\left(\frac{ql^2}{2} - V_B l \right) \frac{(x-0)^2}{2} + (ql - V_B) \frac{(x-0)^3}{6} - \frac{qx^4}{24} \right)$$

$$EIv'''' = + \left(\frac{ql^2}{2} - V_B l \right) \frac{x^2}{2} - (ql - V_B) \frac{x^3}{6} + \frac{qx^4}{24}$$

$$\text{à } x=l \quad v=0$$

$$\left(\frac{ql^2}{2} - V_B l \right) \frac{l^2}{2} - (ql - V_B) \frac{l^3}{6} + \frac{ql^4}{24} = 0$$

$$\frac{ql^4}{4} - V_B \frac{l^3}{2} - \frac{ql^4}{6} + V_B \frac{l^3}{6} + \frac{ql^4}{24} = 0$$

$$-\frac{2}{6} V_B l^3 + \frac{3ql^4}{24} = 0 \quad V_B = \frac{3ql^4}{24 \cdot l^3} = \frac{3ql}{8}$$

$$\sum y_i = 0 \quad V_A + V_B = ql \rightarrow V_A = ql - V_B = \frac{5ql}{8}$$

$$\sum M/A = 0 \quad M_A = \frac{ql^2}{2} - V_B l = \frac{ql^2}{2} - \frac{3ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8}$$

Méthode des forces

Principe de la méthode des forces

Le principe de cette méthode consiste à remplacer la structure hyperstatique en une structure isostatique équivalente qui provient de la première en supprimant les liaisons supplémentaires. Ces liaisons surabondantes sont remplacées par des réactions inconnues qu'il faut calculer.

La structure isostatique équivalente s'appelle système de base, pour la même structure il y a plusieurs choix du système de base (Exemple, Figure .1).

La structure isostatique équivalente est soumise à deux catégories de forces :

- Forces extérieures de départ (les charges réparties, concentrées, ...).
- Réactions introduites (les inconnues hyperstatiques).

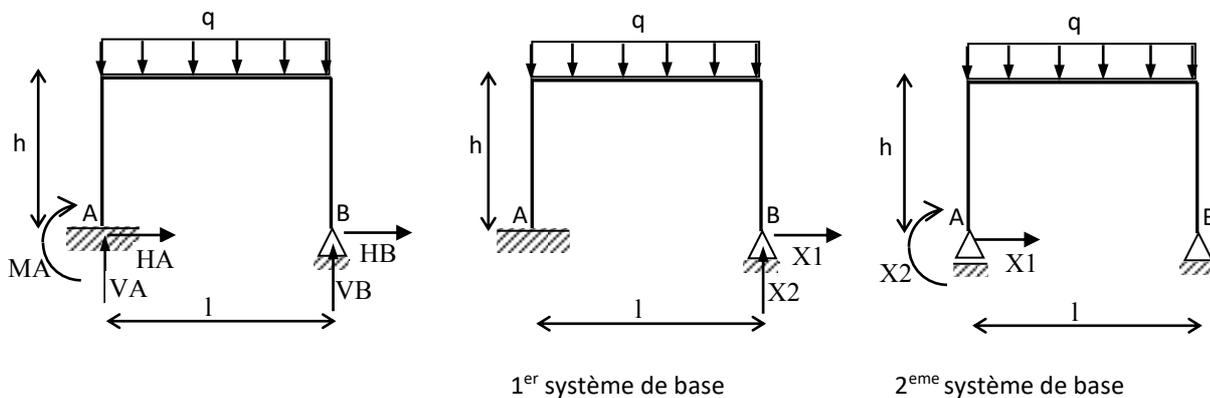


Figure 1. : Structure initiale transformée en structure isostatique équivalente

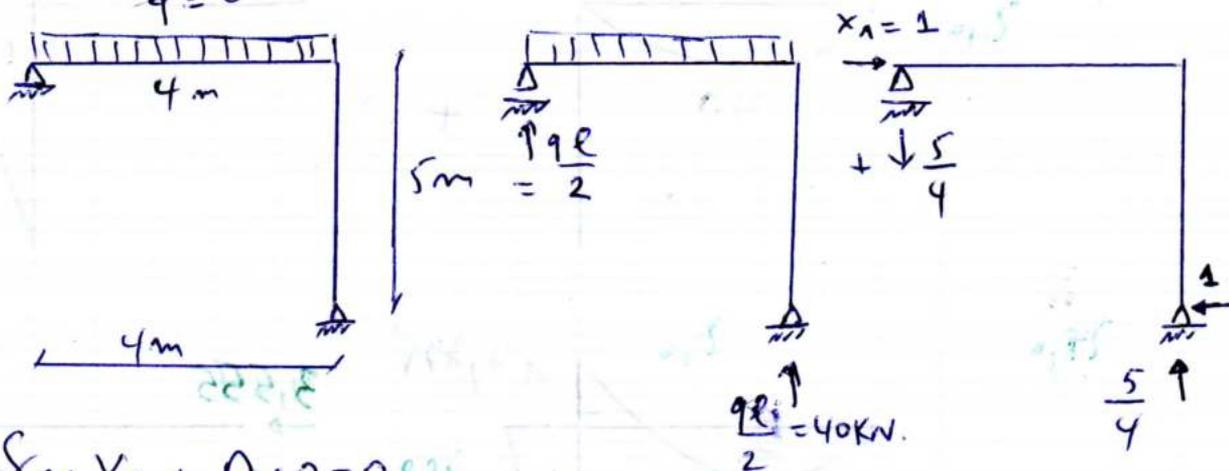
Le degré d'hyperstaticité représente le nombre d'équations supplémentaires qu'il faut pour calculer toutes les réactions du système.

Equations canoniques :

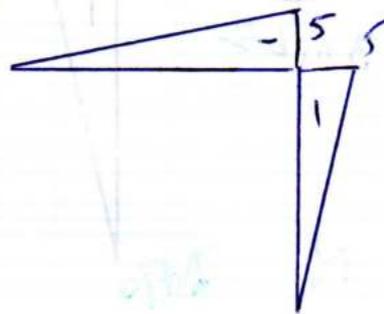
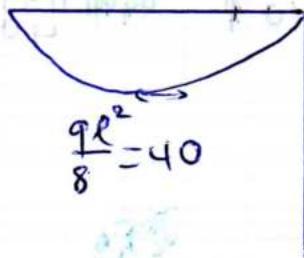
Pour une structure hyperstatique, il faut utiliser en plus des trois équations d'équilibre, des équations supplémentaires. Dans la méthode des forces, ces équations sont connues sous le nom des équations "canoniques" de la méthode des forces.

Etant donné une structure n fois hyperstatique, soumis à des forces extérieures. Les équations canoniques de la méthode des forces s'écrivent sous la forme analytique suivante :

Ex: Trace M, N et T . $d = \sum L_i - 3b = 7 - 3(2) = 1$
 $q = 20 \text{ kN/m}$



$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$



$$EI \delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 5\right) + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 5\right) = \frac{225}{3}$$

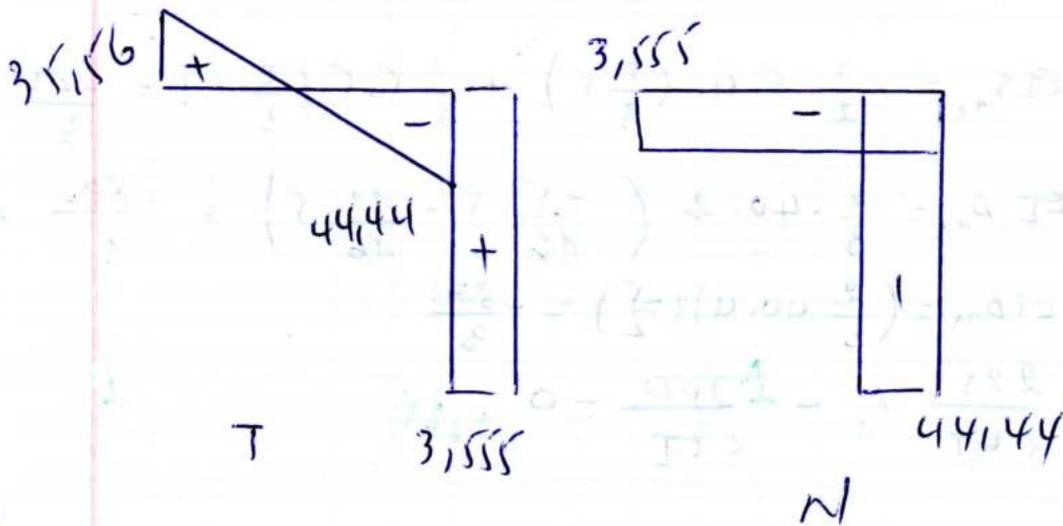
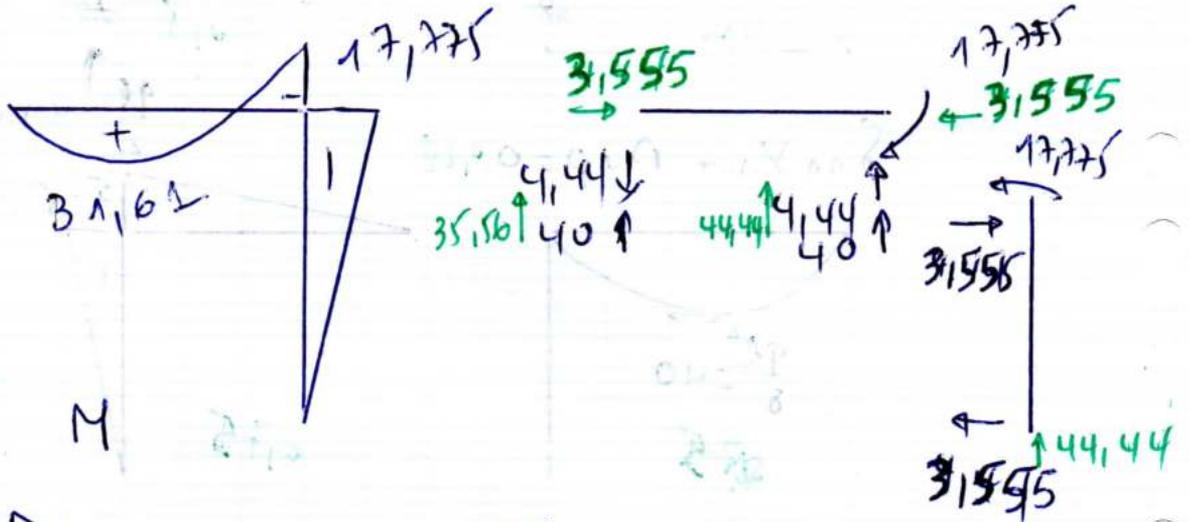
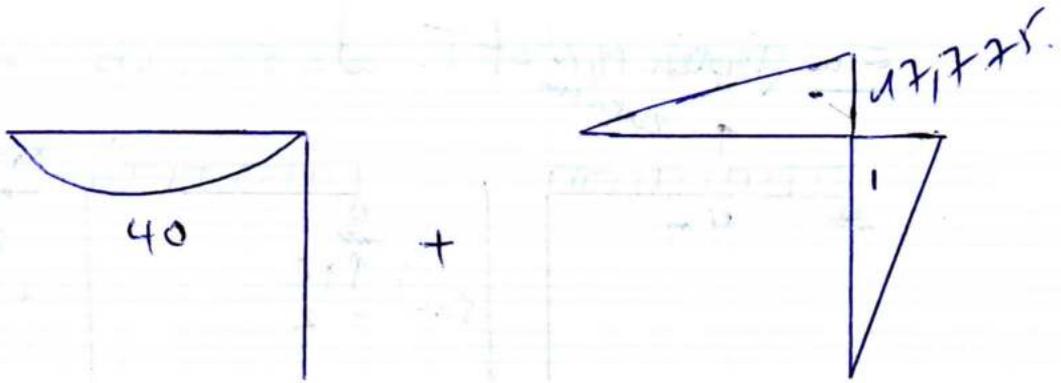
$$EI \Delta_{1P} = \frac{2}{3} \cdot 40 \cdot 2 \left(\frac{-5}{16} \cdot 5 - \frac{11}{16} \cdot 5 \right) = -\frac{800}{3}$$

$$EI \Delta_{1M} = \left(\frac{2}{3} \cdot 40 \cdot 4 \right) \left(\frac{-5}{2} \right) = -\frac{800}{3}$$

$$\frac{225}{3EI} X_1 - \frac{800}{3EI} = 0$$

$$X_1 = \frac{800}{225}$$

$$X_1 = 3,555 \text{ kN}$$

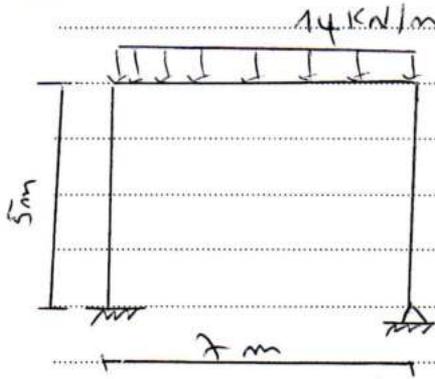


$$T = 35,56 - 20x$$

$$T = 0 \quad \hat{=} \quad x = \frac{35,56}{20} = 1,778$$

$$M_{\max} = 35,56x - 10x^2 = 31,61 \text{ kNm}$$

Ex. Tracer M, N et T:



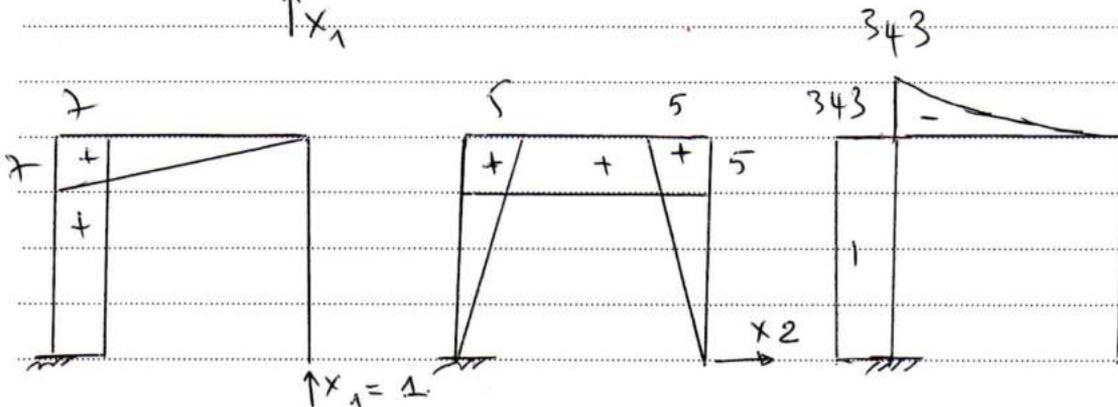
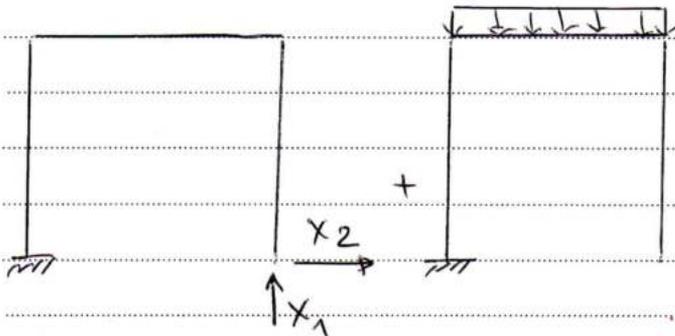
$$d = 3L_2 - 3h$$

$$= 5 + 6 - 3 \cdot 3 = 2$$

$$d = 3c - 1a - 2s$$

$$= 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 2$$

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$



$$EI \delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \frac{2 \cdot 7}{3} + 7 \cdot 5 \cdot 7 = 359,33$$

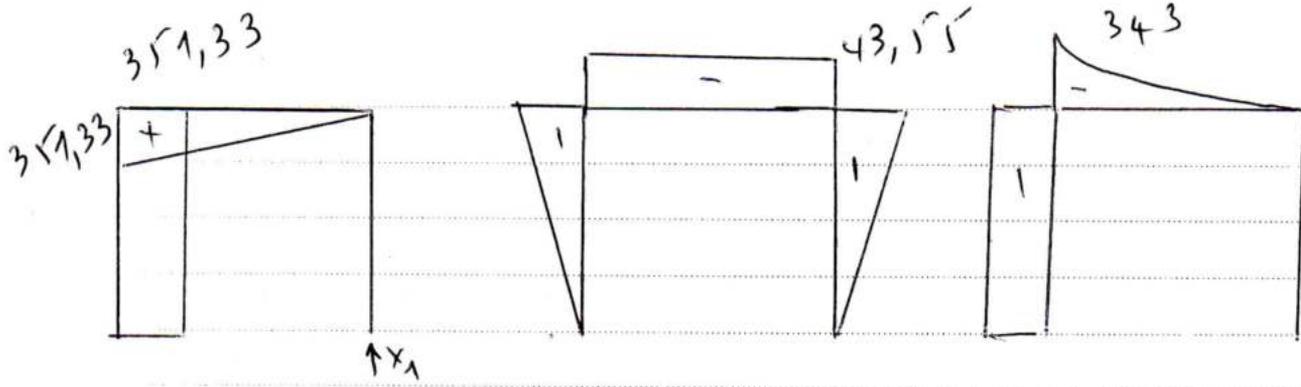
$$EI \delta_{12} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 210$$

$$EI \delta_{22} = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \right) + 5 \cdot 7 \cdot 5 = 258,33$$

$$EI \Delta_{1p} = - \frac{1}{3} \cdot 343 \cdot 7 \cdot \frac{3}{4} \cdot 7 - 343 \cdot 5 \cdot 7 = -16206,75$$

$$EI \Delta_{2p} = - \frac{1}{3} \cdot 343 \cdot 7 \cdot 5 - 343 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = -8289,16$$

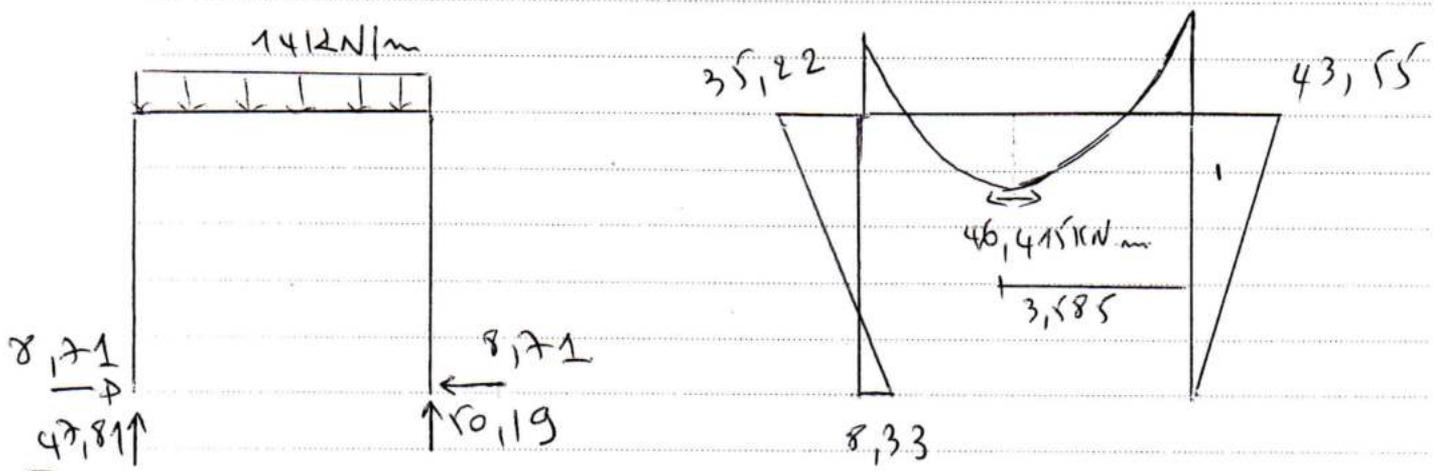
$$\begin{cases} 359,33 X_1 + 210 X_2 = 16206,75 \\ 210 X_1 + 258,33 X_2 = 8289,16 \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = 50,19 \\ X_2 = -8,71 \end{cases}$$



$n(x_1)$

$n(x_2)$

$n(p)$



$$M_{\max} = 50,19x - 8,71 \cdot x - 14 \frac{x^2}{2}$$

$$T(x) = -50,19 + 14x = 0 \quad \text{mit } x = 3,585 \text{ m}$$

$$M_{\max} = 46,415 \text{ kNm}$$