

Chapitre 1: Treillis Isostatiques

1. Généralités

Les systèmes en treillis ou réticulés sont des structures composées de barres articulées entres-elles à leurs extrémités. Les articulations communes à plusieurs barres sont les nœuds du système. Ce type de structures est utilisé dans le domaine du génie civil, et généralement pour les structures en charpente métallique ou en bois. Les fermes des toitures des hangars et des grandes salles de sport ainsi que des ponts et pylônes sont des exemples de structures en treillis (Fig.1). Une des caractéristiques fondamentales de ces systèmes c'est qu'elles présentent une rigidité importante suivant leurs plans sans être pénalisant en terme de poids propre.



Fig.1 Structures en treillis

2. Définitions et terminologie

a) Treillis (ou système triangulé) : Assemblage de barres rectilignes qui forment un réseau de triangles indéformables. (Fig.2)

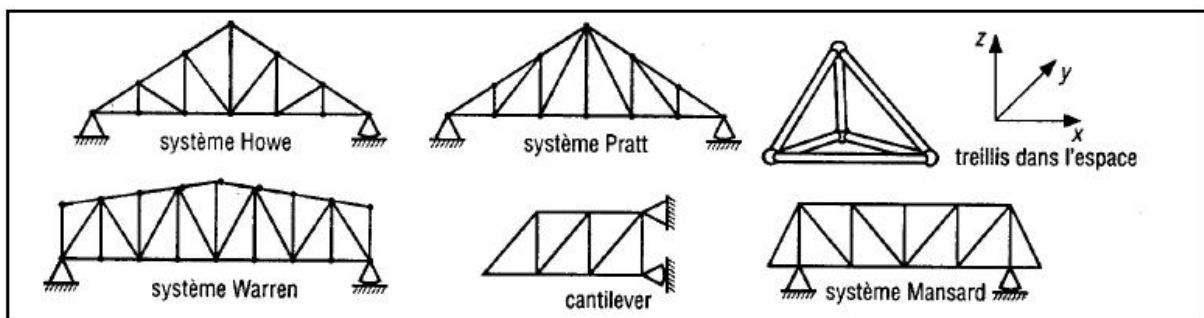


Fig.2 Différents types de systèmes triangulés

b) Barres : dans le cas des treillis, ce sont des poutres en acier ou en bois (le béton armé est très peu utilisé à cause de la fissuration). Selon leur position elles portent des noms différents (Fig.3).

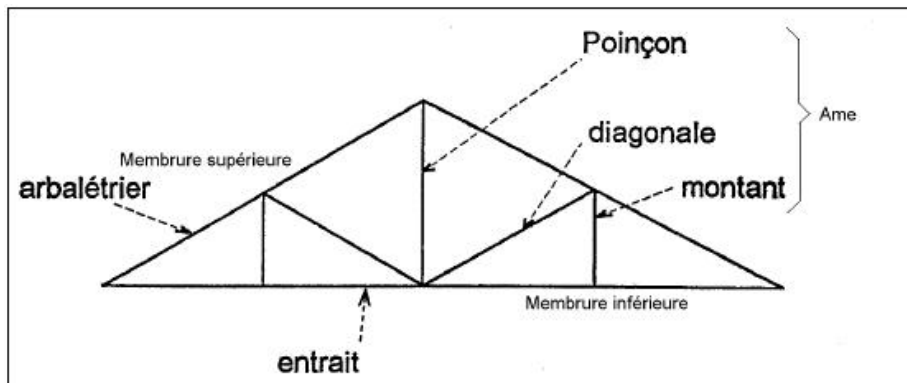


Fig.3 Dénomination des barres

c) Nœuds : points de rencontre de plusieurs barres. Les nœuds sont constitués par :

- clous, boulons, connecteurs pour les treillis en bois ;
- rivets, boulons, soudure (tubes) pour les treillis en acier.

3. Etude cinématique des systèmes en treillis:

Les systèmes de barres se subdivisent en formes géométriquement déformables et indéformables; ces derniers en isostatiques et hyperstatiques. Le système est dit géométriquement indéformable s'il ne change pas de forme et de position sous l'action des charges (Fig.4.c,d). Dans le cas contraire le système est dit géométriquement déformable ou mécanisme (fig.4.a,b).

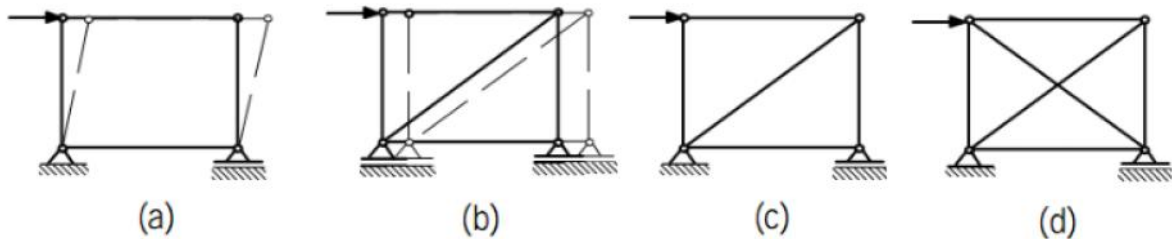


Fig.4 Systems en treillis déformables et indéformables

Le système indéformable est isostatique si les réactions d'appuis se déterminent à l'aide des seules conditions d'équilibre. Dans le cas contraire le système est dit hyperstatique, Pour déterminer la catégorie du système, on utilise l'étude cinématique qui peut être exprimée par la formule suivante:

$$L = 3b - 3r - 2a - l$$

L: le degré de stabilité du système.

b: le nombre de barres .

r: le nombre de nœuds rigides simples (assemblant 2 barres)

a: le nombre d'articulations simples (assemblant 2 barres). Pour chaque nœud, a est égal au nombre d'extrémités de barres concourant au nœud -1

l: le nombre de réactions d'appuis simples.

Si $L > 0$ le système est géométriquement déformable

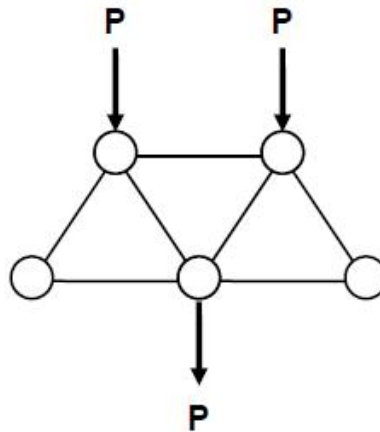
Si $L = 0$ le système est isostatique

Si $L < 0$ le système est hyperstatique, et le degré d'hyperstatique $H = -L$

Cette condition est nécessaire mais pas suffisante pour avoir un système indéformable et isostatique, car elle donne uniquement le nombre nécessaire des liaisons pour former un système isostatique. Il faut donc toujours vérifier l'indéformabilité du système (étude géométrique).

4. Hypothèses

- Le poids des barres est négligé devant les autres forces ;
- Les nœuds sont considérés comme étant des articulations ;
- Les efforts extérieurs appliqués au système réticulé sont contenus dans le plan du système et exclusivement appliqués aux nœuds de la structure (il n'y a donc que des forces ponctuelles) ;
- Les lignes moyennes des barres sont supposées être dans un même plan et concourantes aux nœuds.



5. Systèmes isostatiques et hyperstatiques

Un système réticulé est extérieurement isostatique si les réactions d'appui se déterminent à partir seules équations de la statique. Dans le cas contraire le système est dit hyperstatique.

Pour chaque nœud on peut écrire deux équations d'équilibre suivant les deux axes x et y, figure 1.7

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\Rightarrow F_{AB} \sin \alpha - F_{CB} \cos \alpha \\ &- F_{DB} = 0 \\ \sum Y = 0 &\Rightarrow F_{AB} \cos \alpha + F_{CB} \sin \alpha \\ &- P_B = 0 \end{aligned}$$

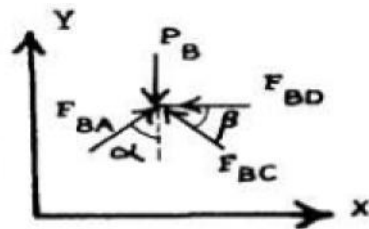
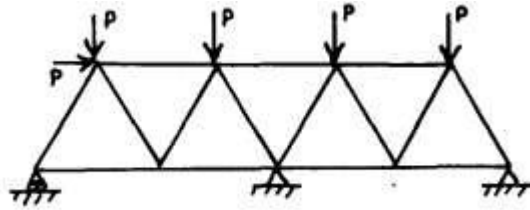


Fig.5

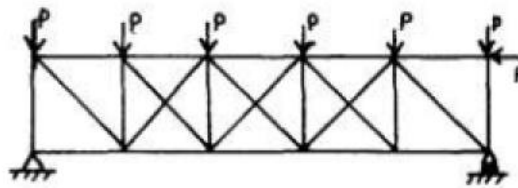
Si le système comporte n nœuds et b barres, on peut obtenir $2.n$ équations pour déterminer les b efforts inconnus dans les différentes barres. La force extérieure peut être une réaction d'appui déjà trouvée; ces relations comprennent donc les trois équations d'équilibre qui ont permis de calculer les réactions d'appui. Le nombre d'équation est égal à $(2n - 3)$.

On étudie trois cas:

- a. $b < 2n - 3$ le système est instable
- b. $b = 2n - 3$ le système est isostatique intérieurement
- c. $b > 2n - 3$ le système est hyperstatique intérieurement, ou surabondant Fig.6



a) Système extérieurement hyperstatique et intérieurement isostatique



b) Système extérieurement isostatique et intérieurement hyperstatique

Fig.6 Systèmes isostatiques et hyperstatiques

6. Compression ou traction dans une barre

Il est souvent possible d'identifier si un élément de barre dans une ferme est chargé en traction ou en compression par un simple argument qualitatif impliquant une estimation de la déformation réelle de la ferme chargée, ou en construisant le mécanisme qui résulterait si l'élément était retiré de la ferme. La figure 7.a montre une poutre en treillis à support simple constituée de la «tête», du «pied», des «verticales» et des «diagonales». On observe qu'avec $n = 10$ nœuds et $b = 17$ bars, la ferme satisfait à la condition (5.b) pour une ferme déterminée statiquement. La figure 7.b montre un croquis de la poutre déformée après chargement par des forces réparties vers le bas. On voit clairement que les barres du pied sont allongées, indiquant une traction, tandis que les barres de la tête deviennent plus courtes, indiquant une compression. Cependant, il est plus difficile d'identifier l'allongement ou le raccourcissement des verticales et des diagonales.

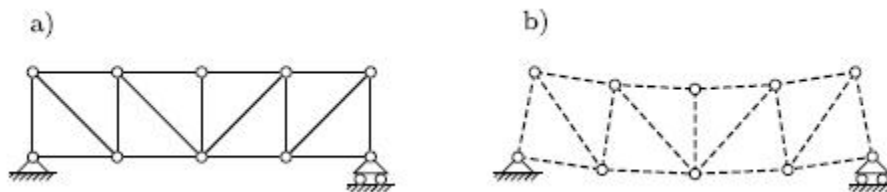


Fig. 7 Éléments de traction et de compression dans la poutre en treillis.

On peut déduire des hypothèses précédentes qu'une barre quelconque de la structure est en équilibre sous l'effet des seuls efforts qui lui sont transmis par l'intermédiaire des nœuds. Ainsi, elle ne peut être soumise qu'à deux efforts opposés, portés par l'axe de la barre, deux cas sont possibles (Fig.8) :

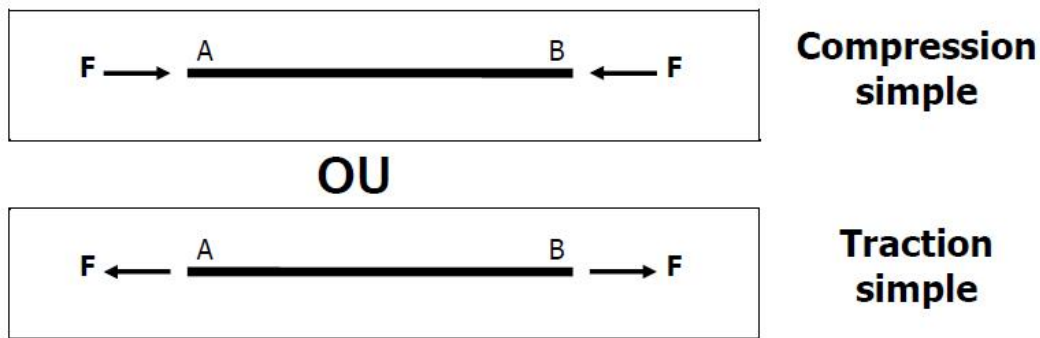
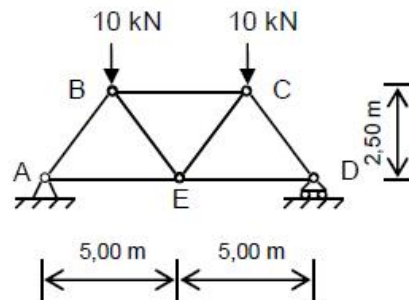


Fig. 8 Traction et de compression d'une barre

6. Détermination des efforts dans les barres d'un Treillis:

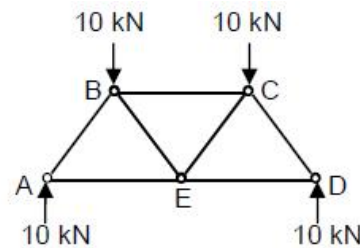
Objectif : calculer les efforts dans les barres d'un système treillis et déterminer si celles-ci sont tendues ou comprimées. Nous étudierons 3 types de résolutions en nous appuyant sur un exemple simple présenté ci-contre :



6.1 Méthode d'équilibre des nœuds

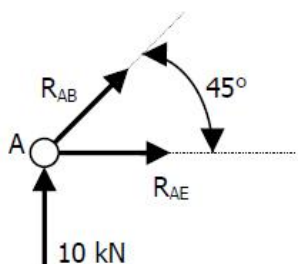
a) calculer les inconnues de liaisons extérieures :

$$\begin{aligned} A_x &= 0 \\ A_y &= 10 \text{ kN} \\ B_y &= 10 \text{ kN} \end{aligned}$$



b) isolement du nœud A.

Schéma du nœud isolé



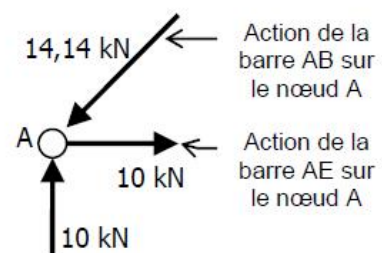
$$\Sigma F_{/ox} = 0 : R_{AE} + R_{AB} \times \cos 45^\circ = 0$$

$$\Sigma F_{/oy} = 0 : 10 + R_{AB} \times \sin 45^\circ = 0$$

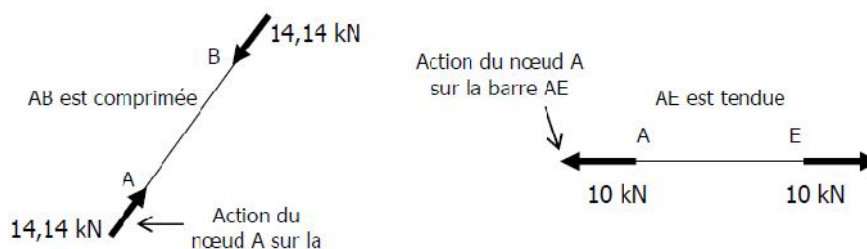
On trouve :

$$\begin{aligned} R_{AE} &= + 10,00 \text{ kN} \\ R_{AB} &= - 14,14 \text{ kN} \end{aligned}$$

Schéma récapitulatif



En appliquant le principe des actions mutuelles sur les barres AB et AE à partir du nœud A, on déduit que :



Remarque importante : dès le départ, il faut choisir l'ordre de résolution des nœuds de façon à ne pas avoir plus de 2 inconnues à chaque fois (chaque nœud).

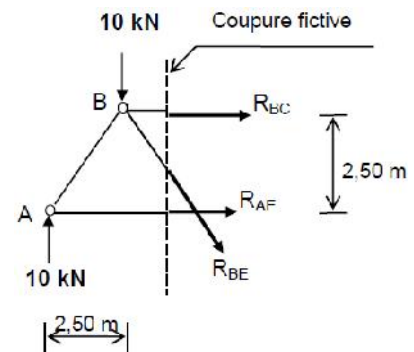
barres	intensités (kN)	sollicitations
AB	- 14,14	compression
AE	+ 10,00	traction
BC		
BE		
CD		
ED		
CE		

6.2 Méthode de RITTER (méthode des sections)

a) calculer les inconnues de liaisons (même calcul que pour la méthode précédente).

b) coupure fictive dans la structure .

On réalise une coupure fictive destinée à faire apparaître des efforts voulus des barres :
ici **BC**, **AE** et **BE**.



Ainsi l'avantage de cette méthode réside dans le fait de pouvoir obtenir la valeur de l'effort et l'état dans une barre sans pour autant résoudre tout le système.

On écrit ensuite que les efforts exercés dans les barres « coupées » permettent l'équilibre du tronçon isolé :

$$\text{Equilibre} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \sum F_{/ox} = 0 : R_{AE} + R_{BC} + R_{BE} \times \cos 45^\circ = 0 \\ \sum F_{/oy} = 0 : 10 - 10 - R_{BE} \times \sin 45^\circ = 0 \\ \sum M_{/B} = 0 : -10 \times 2,50 + R_{AE} \times 2,50 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{trois équations} \\ \text{trois inconnues} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} R_{AE} = + 10,00 \text{ kN} \\ R_{BE} = 0 \\ R_{BC} = - 10,00 \text{ kN} \end{array}$$

Les valeurs trouvées correspondent aux actions des barres sur les nœuds. En dessinant l'équilibre des barres et des nœuds comme précédemment, on retrouve les mêmes résultats.

6.3 Méthode CREMONA (graphique)

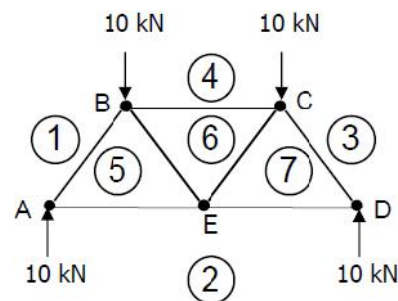
a) calculer les inconnues de liaisons :

$$A_x = 0; A_y = 10 \text{ kN}; B_y = 10 \text{ kN}$$

b) numérotez les différentes zones :

Sur la structure isolée, on numérote toutes les zones délimitées :

- soit par des efforts,
- soit par des barres.



L'ordre de numérotation des zones n'as pas d'importance, mais il ne faut surtout pas en oublier !

On désigne ainsi l'effort $A_y = 10 \text{ kN}$ en A par le numéro des zones qu'il sépare : soit ici 1 - 2 ou 2 - 1.

Le choix 1 - 2 ou 2 - 1 va dépendre du sens de rotation choisi autour des nœuds. On adoptera le sens suivant :

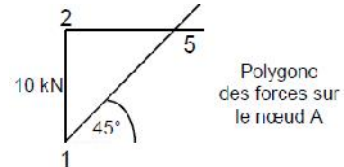


En tournant autour de A dans le sens choisi, on passe de la zone 1 à la zone 2, le sens 1 - 2 correspond au sens de la force A_y qui vaut 10 kN.



Traduisons l'équilibre du nœud A :

- la barre AE ou 2 - 5 est horizontale à partir de 2 ;
- la barre AB ou 5 - 1 est à 45° par rapport à l'horizontale à partir de 1.



On obtient ainsi la position du point 5 ; il suffit de lire la valeur des efforts dans les deux barres qui arrivent en A sur le polygone des forces :

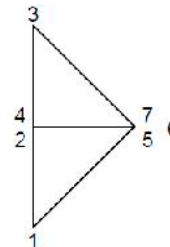
$$AE = (2 - 5) = 10 \text{ kN}$$

$$AB = (1 - 5) = 14,14 \text{ kN}$$

L'« astuce » de CREMONA consiste à tracer sur une seule figure les polygones relatifs aux différents nœuds. La lecture des efforts cherchés est ainsi immédiate.

c) tracés des polygones relatifs aux différents nœuds sur une seule figure :

Polygone des forces relatif à l'ensemble des nœuds



d) utilisation du CREMONA :

Le CREMONA que l'on vient de tracer donne :

- la valeur de l'effort dans la barre : on fait la lecture directement à l'échelle sur le polygone tracé à l'échelle.
- le signe des efforts dans les barres :

Prenons l'exemple de la barre AB (ou encore 5-1 en tournant autour de A) ; sur le CREMONA, 5-1 est obtenu en dessinant de la droite vers la gauche (sens négatif), cela traduit que la force dans la barre pousse le nœud A. Mais par équilibre du nœud, le nœud A pousse la barre. La barre AB est donc comprimée.

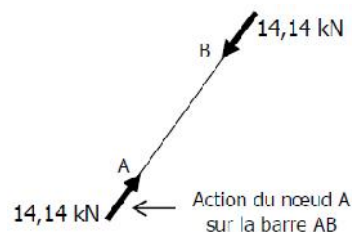


Tableau récapitulatif :

Quelque soit la méthode utilisée (analytique ou graphique), il faudra conclure par un tableau récapitulatif du type suivant :

barres	intensités (kN)	sollicitations
AB	- 14,14	compression
BC	- 10,00	compression
CD	- 14,14	compression
ED	+ 10,00	traction
AE	+ 10,00	traction
BE	0	aucune
CE	0	aucune

Exercices (TD)

Treillis isostatiques et Hyperstatiques

EX.1: Dire si les treillis plans représentés sur la figure 1 sont isostatiques, hyperstatiques ou instables. Dessiner leurs réactions d'appui. (Intérieurement et extérieurement)

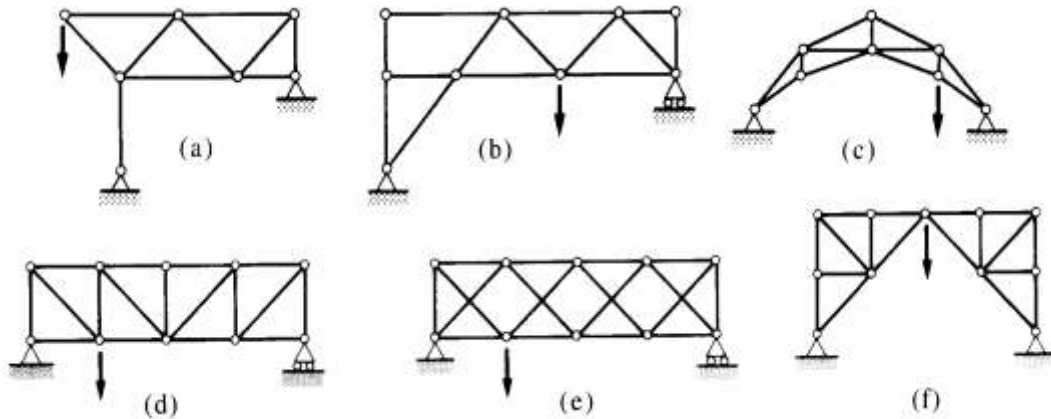


Fig.1

EX.2: Par une coupe simple, calculer l'effort normal dans les barres 1, 2 et 3 d'une colonne en treillis plan (Fig.2). *Solution* $N_1 = -160 \text{ kN}$; $N_2 = -56,6 \text{ kN}$; $N_3 = 20 \text{ kN}$

EX.3: Par des coupes simples, calculer l'effort normal dans les barres 1, 2 et 3 d'une poutre en treillis en V (Fig.3). *Solution* $N_1 = 45 \text{ kN}$; $N_2 = 16,77 \text{ kN}$; $N_3 = -37,5 \text{ kN}$.

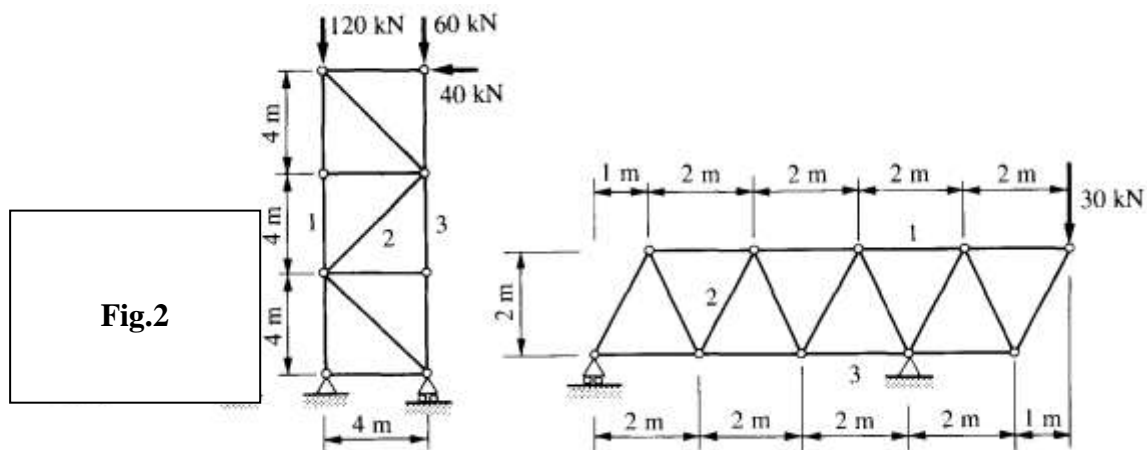


Fig.3

EX.4 : Déterminer les efforts normaux dans toutes les barres de la structure réticulée (Fig.4), chargée de deux forces de 4 et 8 kN.

Solution $N_1 = N_2 = N_3 = N_{10} = 0$; $N_4 = 8 \text{ kN}$; $N_5 = -8,49 \text{ kN}$; $N_6 = -4 \text{ kN}$; $N_7 = 2,83 \text{ kN}$; $N_8 = -8 \text{ kN}$; $N_9 = 11,31 \text{ kN}$.

EX.5: Pour la poutre en treillis plan de la figure 5, en procédant par coupes, mais sans faire aucun calcul, détecter quelles sont les barres tendues et les barres comprimées.

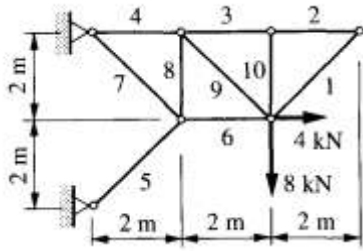


Fig.4

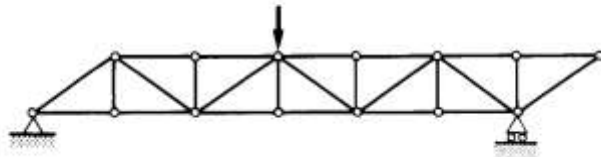
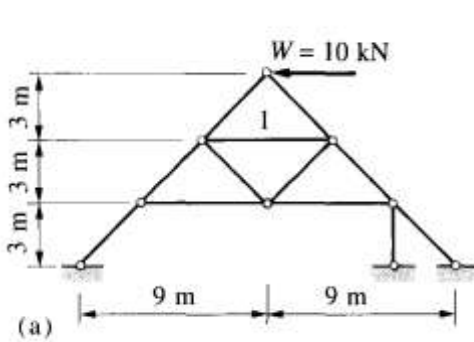


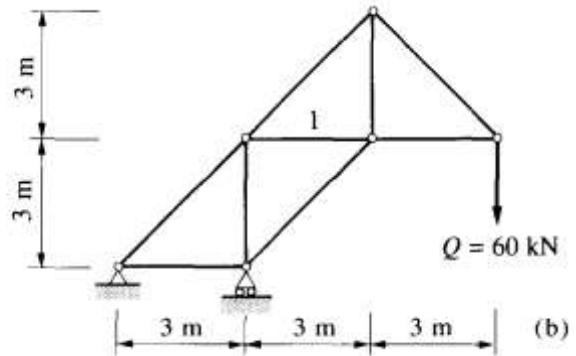
Fig.5

EX.6: Calculer l'effort normal dans la barre 1 de chacune des deux structures réticulées planes (a) et (b) de la figure 6, chargée comme indiqué.

Solution: (a) $N_1 = 0$; (b) $N_1 = 60$ kN.



a)



b)

Fig.6

EX.7: Une poutre triangulée avec porte-à-faux (**Fig.7**) est soumise à une charge verticale uniformément répartie $q = 20$ kN/m selon la figure. Calculer l'effort normal dans les deux montants 1-2 et 3-4, les deux membrures 3-5 et 4-6, et les deux diagonales 2-3 et 3-6

Solution : $N_{1.2} = N_{5.6} = 0$; $N_{j.2} = -80$ kN; $N_{3.4} = -60$ kN; $N_{3.5} = 60$ kN; $N_{4.6} = -75$ kN; $N_{2.3} = 90,14$ kN; $N_{3.6} = 18,03$ kN.

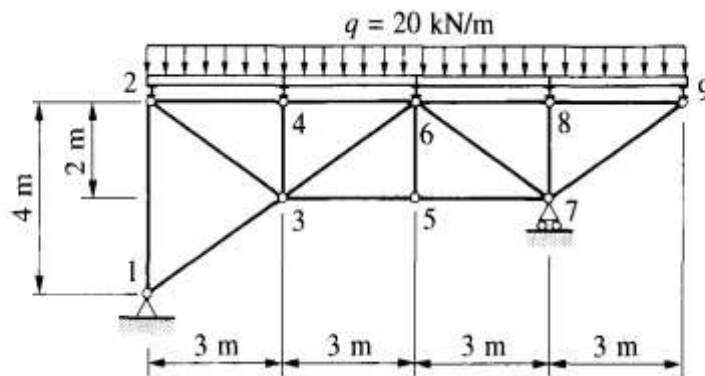


Fig.7