

Chapitre 2 : Matériaux utilisés en BP

1. Généralités

Le béton précontraint exige l'emploi de matériaux de haute qualité mis en œuvre avec soin, du moment que ces derniers peuvent être soumis en service à des taux de travail élevés. Le béton doit être de qualité exceptionnelle car il faut le mettre en précontrainte très tôt alors qu'il est peu résistant et très déformable. L'acier doit être à haute limite d'élasticité car il faut le tendre initialement à un taux de travail très élevé afin de palier aux chutes de tension induites par les pertes de précontrainte.

2. Béton

Pour l'étude du béton précontraint, la connaissance de la technologie du béton est indispensable. On rappelle que La caractéristique essentielle du béton est sa résistance à la compression. Sa résistance à la traction intervient dans certains calculs relatifs à l'état limite de service. La loi de déformation (relation σ - ϵ), le fluage, le retrait et la dilatation thermique doivent également être pris en compte lors de la conception et du calcul des structures en béton.

2.1 Qualités requises

Elles sont liées essentiellement aux conditions particulières d'emploi des bétons dans les pièces précontraintes qui, très tôt sont soumis à des contraintes élevées (transfert de précontrainte et précontrainte à vide) et doivent assurer la durabilité de la précontrainte par la protection des armatures contre la corrosion

- une résistance à la compression élevée
- l'étanchéité et non agressivité chimique ; qui avec une bonne compacité contribue à éviter le contact entre l'acier de précontrainte tendu et les agents oxydants afin d'éviter la rupture brutale de l'acier actif par corrosion sous tension
- une bonne maniabilité permettant le remplissage correct de toutes les parties des moules y compris les zones à ferrailage très dense (abouts de poutres et goussets de caissons par ex). l'utilisation d'adjuvants conduit à de bons résultats.
- une faible sensibilité aux effets des déformations différées afin de limiter les pertes de précontrainte

2.2 Résistances

a. caractéristique à la compression

On utilise le plus souvent la valeur de maturité f_{c28} . Pour les calculs en phase de réalisation, on adoptera les valeurs à j jours, définies à partir de f_{c28} :

$$\begin{aligned}
 & \text{- Pour des résistances } f_{c28} < 40\text{MPa} \quad \begin{cases} f_{cj} = \frac{j}{4.76 + 0.83j} f_{c28} & \text{si } j < 60 \text{ jours} \\ f_{cj} = 1.1 f_{c28} & \text{si } j > 60 \text{ jours} \end{cases} \\
 & \text{- Pour des résistances } f_{c28} > 40\text{MPa} \quad \begin{cases} f_{cj} = \frac{j}{1.40 + 0.95j} f_{c28} & \text{si } j < 28 \text{ jours} \\ f_{cj} = f_{c28} & \text{si } j > 28 \text{ jours} \end{cases}
 \end{aligned}$$

b. Résistance caractéristique à la traction

La résistance caractéristique à la traction du béton à j jours d'âge notée f_{tj} est conventionnellement définie par les relations :

$$\begin{cases} f_{tj} = 0.6 + 0.06 f_{cj} & \text{si } f_{c28} < 60\text{MPa} \\ f_{tj} = 0.275 (f_{cj})^{2/3} & \text{si } f_{c28} > 60\text{MPa} \end{cases}$$

2.3 Déformations différées

2.3.1 Fluage du béton

Sous chargement constant, la déformation du béton augmente continuellement avec le temps. Les déformations de fluage sont loin d'être négligeables puisqu'elles peuvent représenter jusqu'à deux fois les déformations instantanées : $\varepsilon_v = 3\varepsilon_i$.

a. Module de déformation longitudinale

On distingue les modules de Young instantané E_{ij} et différé E_{vj} . Le module instantané est utilisé pour les calculs sous chargement instantané de durée inférieure à 24 heures. Pour des chargements de longue durée (cas courant), on utilisera le module différé, qui prend en compte artificiellement les déformations de fluage du béton. Celles-ci représentant approximativement deux fois les déformations instantanées, le module différé est pris égal à trois fois le module instantané : $E_{ij} = 3E_{vj}$ et $E_{ij} = 11000(f_{cj})^{1/3}$ si $f_{c28} \leq 60\text{MPa}$.

Il est évident que cette approche est simplificatrice et que le fluage d'un matériau ne vérifie pas la loi de Hooke d'un matériau élastique (la loi de fluage est une relation entre les contraintes et les vitesses de déformation). Néanmoins, cette approche permet d'estimer les déformations cumulées dues à la déformation instantanée élastique et au fluage à un temps infini. Le module de Young différé du béton dépend de la résistance caractéristique à la compression du béton

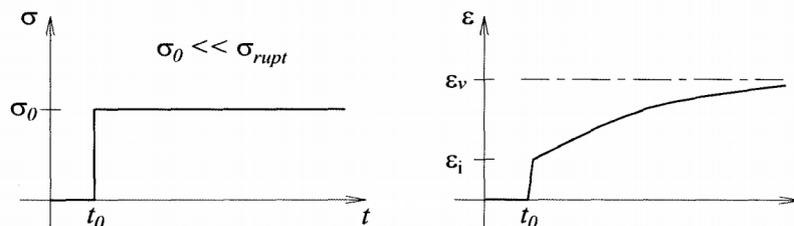
$$E_{vj} = 3700(f_{cj})^{1/3} \text{ si } f_{c28} \leq 60\text{MPa}$$

$$E_{vj} = 4400(f_{cj})^{1/3} \text{ si } f_{c28} > 60\text{MPa}, \text{ sans fumée de silice}$$

$$E_{vj} = 6100(f_{cj})^{1/3} \text{ si } f_{c28} > 60\text{MPa}, \text{ avec fumée de silice}$$

b. La valeur du module de déformation transversale est donnée par l'expression suivante :

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. Le coefficient de poisson sera pris égal à $\nu = 0$ pour un calcul de sollicitations à l'ELU et à $\nu = 0.2$ pour un calcul de déformations à l'ELS.



2.3.2 Phénomène de retrait

Après coulage, une pièce de béton conservée à l'air tend à se raccourcir. Ceci est dû à l'évaporation de l'eau non liée avec le ciment et peut entraîner des déformations de l'ordre de $1.5 \cdot 10^{-4}$ à $5 \cdot 10^{-4}$ selon l'humidité de l'environnement. On notera que des pièces de béton conservées dans l'eau subissent, au contraire, un gonflement. Le retrait commence dès le premier jour de vie de la pièce en béton et on observe que 80% du retrait est atteint au bout de deux ans. La principale conséquence du retrait est l'apparition de contraintes internes de traction, contraintes dont la valeur peut facilement dépasser la limite de fissuration.

2.3.3 Dilatation thermique

Le coefficient de dilatation thermique du béton vaut de 9 à $12 \cdot 10^{-6}$ (on adopte forfaitairement la valeur de 10^{-5}). Une variation de température de 10°C induit une déformation de 10^{-4} , c'est à

dire qu'un élément de 10m de long verra son extrémité libre se déplacer de 1 mm. Dans la pratique, les éléments ne sont pas libres, et les variations de température entraînent des contraintes internes de traction. Pour éviter des désordres, on placera régulièrement sur les éléments (dalle, voile de façade) des joints de dilatation espacés de 25 à 50 mètres selon la région. Ces joints de dilatation sont aussi un moyen de lutte contre les désordres dus au retrait.

2.4 Modèles de calcul

2.4.1 Modèle de calcul à l'ELS

Pour atteindre l'ELS les déformations sont relativement faibles et on suppose donc que le béton reste dans le domaine élastique. On adopte donc la loi de Hooke de l'élasticité pour décrire le comportement du béton à l'ELS, avec pour des charges de longue durée $E_b = E_{vj}$ et $\nu = 0.2$. La résistance mécanique du béton tendu est négligée. De plus, on adopte en général une valeur forfaitaire pour le module de Young du béton égale à 1/15 de celle de l'acier ($E_b \approx 13333$ MPa). Les valeurs de calcul des contraintes dans le béton:

a. Compression du béton

Pour toutes les classes de vérifications les contraintes de compression sont bornées à :

- $0.5f_{c28}$ sous l'effet de la combinaison quasi-permanente
- $0.6f_{c28}$ sous l'effet des combinaisons rares
- $0.6f_{c28}$ en cours de construction

b. Traction du béton

La valeur de calcul de la contrainte limite de traction du béton est fonction de la classe de précontrainte et de la zone de la section considérée (dans la zone d'enrobage ou en dehors de celle-ci).

Zone		Section d'Enrobage			Hors Section d'Enrobage		
Genre		I	II	III	I	II	III
Contraintes limites de traction	0	tous les cas	Q_F	Q_L	tous les cas	Construction et $Q_L + Q_c$	Aucune limitation
	$-f_{ij}$		Construction et $Q_L + Q_c$	Aucune limitation pour les autres combinaisons			
	$-1.5f_{ij}$						

Q_F : combinaisons fréquentes

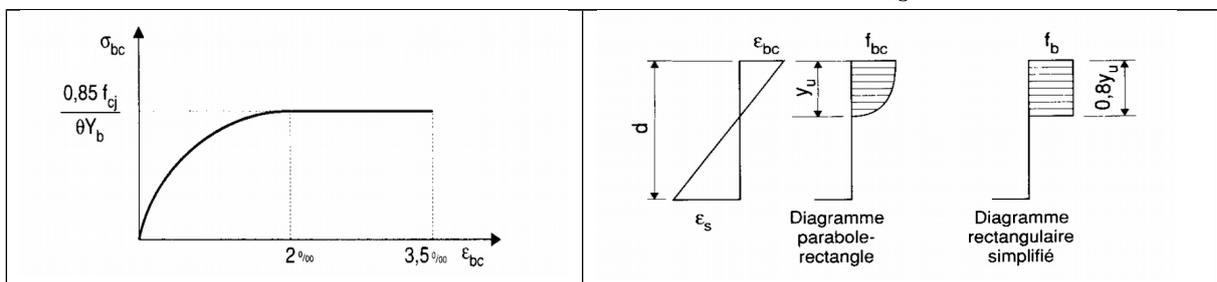
Q_c : combinaisons quasi-permanentes

$Q_L + Q_c$: combinaisons rares

2.4.2. Modèle de calcul à l'ELU

Pour les calculs à l'ELU, le comportement réel du béton est modélisé par la loi parabole-rectangle (figure ci-dessous), constituée d'un arc de parabole jusqu'à son sommet de

coordonnée $\epsilon_{bc} = 2\text{‰}$ prolongé par un palier d'ordonnée : $f_{bu} = \frac{0.85f_{cj}}{\theta\gamma_b}$



- le coefficient de sécurité partiel γ_b vaut 1.5 pour les combinaisons fondamentales et 1.15 pour les combinaisons accidentelles.

Les coefficients 0,85 en numérateur et θ en dénominateur tiennent compte de l'influence défavorable de la durée d'application de la charge. En effet, la résistance du béton, compte tenu de la durée d'application de la charge, résulte principalement de la combinaison de deux phénomènes dont les effets sont antagonistes:

- le « durcissement » progressif du béton en l'absence de contrainte, dû aux phénomènes physico-chimiques liés à l'hydratation du ciment;
- l'endommagement interne progressif sous l'effet des contraintes appliquées correspondant au développement de microfissures.

De plus, il peut exister, en l'absence de charge extérieure, des contraintes internes, voire des microfissures, dues par exemple à des gradients d'humidité importants. Les phénomènes sont très complexes dans le cas général où le béton est soumis à des combinaisons de contraintes permanentes et de contraintes variables. Le cas particulier important est celui de la rupture sous une contrainte maintenue constante qui correspond à une des conditions de sollicitation les plus sévères. C'est ce cas qui est implicitement considéré dans les calculs de structures en béton armé ou précontraint lorsqu'on affecte la résistance de calcul du béton du coefficient multiplicateur 0,85. On admet donc forfaitairement 15 % de réduction de résistance du béton, pour tenir compte de la longue durée d'application d'une partie des charges. Lorsque la section considérée n'est pas entièrement comprimée, le calcul à l'état limite ultime peut être effectué en substituant au diagramme parabole-rectangle, le diagramme rectangulaire simplifié.

- a) pour les sections dont la largeur est constante ou croissante vers la fibre la plus comprimée, comme par exemple les sections rectangulaires ou en T:

$$f_{bc} = \frac{0.85f_{cj}}{\theta\gamma_b}$$

- b) pour les sections dont la largeur est décroissante vers la fibre la plus comprimée comme par exemple les sections circulaires ou la section rectangulaire, soumise à la flexion déviée:

$$f_{bc} = \frac{0.8f_{cj}}{\theta\gamma_b}$$

L'emploi du diagramme rectangulaire donne une bonne approximation des efforts dans le cas d'une déformation extrême du béton $\varepsilon_{bc} = 3.5\%$.

3. Acier

Les aciers utilisés dans les ouvrages de BP sont de deux natures différentes:

- les aciers actifs qui créent et maintiennent la précontrainte sur le béton ;
- les aciers passifs nécessaires pour reprendre les efforts tranchants (en l'absence d'étriers précontraints), pour limiter la fissuration; les aciers de montage pour constituer une cage d'armatures maintenant les autres aciers.

3.1. Acier de précontrainte

L'augmentation des résistances des aciers de précontrainte a été une condition nécessaire pour le développement du béton précontraint. En effet, pour des aciers dont la limite élastique est de l'ordre de 200 à 400 MPa, les pertes de précontrainte peuvent représenter de 50% à 80% de cette limite élastique. Il a fallu développer des aciers de haute limite élastique (1400 à 1600 MPa) pour que ces mêmes pertes ne représentent plus que 15 à 20 %. A ce moment là, le béton

précontraint devenait compétitif avec les autres matériaux tels l'acier ou le béton armé.

3.1.1- Types d'aciers

Les aciers de précontraintes ont été classés par catégories (fils, barres et torons) et par classes de résistance.

3.1.2- Catégories d'aciers de précontrainte

a. les fils

On distingue les fils d'aciers ronds et lisses (de symbole L) et les fils autres que ronds et lisses. Leur diamètre varie de 4 à 12,2 mm. Ils sont livrés en couronne d'un diamètre minimum de 250 fois leur diamètre. Les diamètres les plus courants en post-tension sont 5, 7 et 8 mm.

Les fils non lisses sont surtout utilisés en précontrainte par pré-tension où de bonnes conditions d'adhérence sont particulièrement recherchées. Il est en particulier interdit d'utiliser des fils ronds et lisses pour la pré-tension.

b. les torons

Les torons sont constitués d'un ensemble de 3 ou 7 fils enroulés en hélice en usine. Ce façonnage appelé toronnage conduit à un câble relativement souple, mais dont les fils restent solidaires dans toutes les opérations de manutention des torons.

Les torons à 3 fils, de faible section (13,6 mm²) ne sont utilisés qu'en précontrainte par pré-tension. Les autres torons (à 7 fils) sont utilisés en pré-tension (bonne d'adhérence) et en post-tension sous forme de 6 fils en hélice autour d'un fil central. Comme en général, les résistances des aciers croissent en sens inverse des diamètres, les torons ont des limites élastiques supérieures aux fils de 7 ou 8 mm, offrant des sections plus importantes et des résistances supérieures à poids égal, les torons sont en train de prendre une place prépondérante sur le marché des aciers de précontrainte.

c. les barres

Les barres sont définies comme étant de section supérieure aux fils (diamètre supérieur à 12 mm) et livrables en éléments rectilignes; ce qui réduit leur usage à de faible longueur, sauf d'utiliser des coupleurs. Les barres les plus courantes ont un diamètre nominal de 26 mm. Plus rarement, on trouve des barres de 18 et 32 mm de diamètre. Leur longueur maximale disponible est de l'ordre de 18 m. Leur limite élastique est nettement plus faible que celle des fils et des torons.

3.1.3- Caractéristiques mécaniques

a. Résistance

La résistance à prendre en compte dans les calculs est la charge maximale **garantie** que supporte l'éprouvette d'armature dans l'essai de traction jusqu'à rupture et que l'on désigne par F_{prg} , la contrainte correspondante s'appelant σ_{prg} .

Les différentes catégories d'aciers sont réparties en classes de résistance, définissant parfaitement pour chaque catégorie, la valeur de la résistance, quel que soit le fabricant. Les valeurs actuelles varient entre **1030 à 1230 MPa** pour les barres, **1570 et 1770 MPa** pour les fils et **1770 à 1960 MPa** pour les torons.

b. Adhérence

Les armatures actives doivent présenter une rugosité suffisante pour assurer l'adhérence la plus efficace possible avec le béton d'enrobage pour le cas de la précontrainte par pré-tension.

c. Limite élastique

Un deuxième paramètre utilisé dans les calculs est la limite d'élasticité des aciers de précontrainte. Comme ces aciers n'ont pas de palier de plasticité, la limite élastique est définie comme étant la contrainte qui, après retour à une contrainte nulle, laisse un allongement résiduel de 1‰. La limite élastique conventionnelle des aciers représente 80 à 90% de la résistance garantie.

c. Module de Young

Le module d'élasticité longitudinale E_p des aciers de précontrainte est pris égal à:

- 200 000 MPa pour les fils et les barres;
- 190 000 MPa pour les torons.

Ce module d'Young intervient fréquemment en béton précontraint, non seulement dans le calcul des déformations d'éléments (poutres fléchies par exemple), mais également dans le calcul des **pertes** de précontraintes, dans le calcul des **allongements** lors de la mise en tension servant de contrôle à la bonne mise en tension, dans le calcul des **contraintes** au moyen du diagramme contrainte-déformation pour la vérification en état limite ultime.

d. Diagramme contrainte-déformation

Le calcul en état limite ultime sortant du domaine élastique, il est nécessaire de connaître la relation entre contrainte et déformation aux différents stades de calcul. Une mise en équation des courbes réelles a dû être faite pour en assurer un emploi simple. Le règlement BPEL donne les équations suivantes :

✓ Pour les fils tréfilés et les torons:

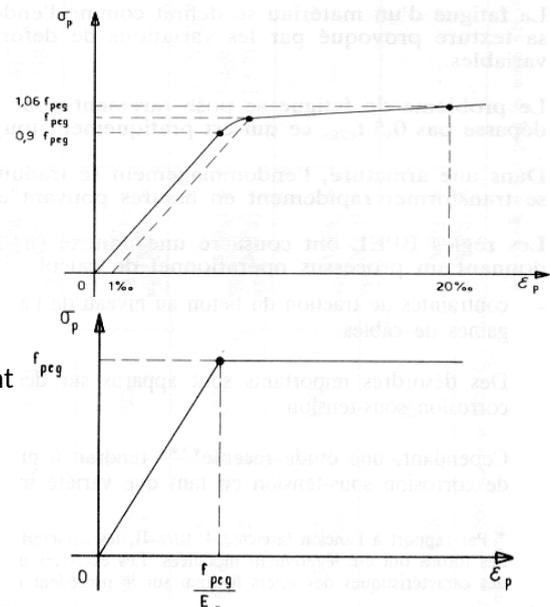
$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p} + 100 \left(\frac{\sigma_p}{f_{pegp}} - 0.9 \right)^5 \quad \text{pour } \sigma_p > 0.9 f_{peg}$$

et $\varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{E_p}$ pour $0 < \sigma_p < 0.9 f_{peg}$

✓ Pour les fils trempés et pour les barres:

Le diagramme contrainte-déformation est idéalisé sous la forme de 2 droites, les valeurs des contraintes sont

$$\sigma_p = E_p \varepsilon_p \quad \text{pour } \varepsilon_p < \frac{f_{peg}}{E_p}$$



Lorsque la nature de l'acier est ignorée, on pourra utiliser le diagramme simplifié ci-dessus. Si une grande précision n'est pas recherchée, ce même diagramme peut être utilisé pour les torons et les fils tréfilés.

e. Autres caractéristiques

Résistance à la fatigue

Les armatures de précontraintes sont plus sensibles à la fatigue que les armatures de béton arme car:

- elles travaillent à des taux de contraintes élevés, de l'ordre de 60 à 65% de leur résistance et 70% de leur limite élastique, aussi bien sous moment minimum que maximum, c'est-à-dire

de façon permanente;

- elles sont soumises à des surtensions sous charges variables qui sont d'autant plus répétées que l'ouvrage est un pont-routier ou un pont-rail situé sur une voie à grand trafic.

La fatigue d'un matériau se définit comme l'endommagement de sa structure provoquée par les variations de déformation que lui imposent les actions variables. Dans une armature, l'endommagement se traduit par des microfissures qui peuvent se transformer rapidement en fissures pouvant entraîner la rupture de l'armature. Le problème de fatigue se pose rarement pour le béton tant que la contrainte ne dépasse pas $0,5 f_{c28}$, ce qui est pratiquement toujours le cas en béton précontraint.

Corrosion sous tension

Une armature tendue est plus sensible à la corrosion qu'au repos. Des désordres importants sont apparus sur des ouvrages, qui seraient dus à la corrosion sous-tension. C'est la raison pour laquelle une attention toute particulière est apportée à la protection des armatures de précontrainte par :

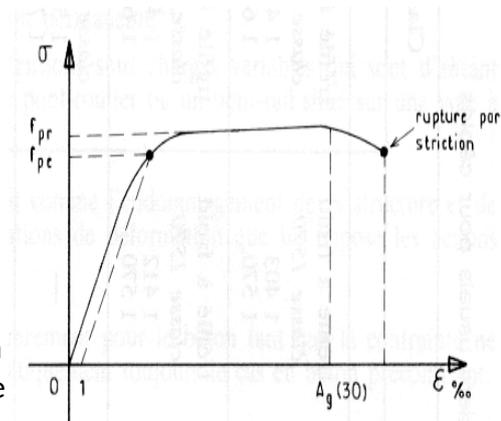
- des enrobages importants,
- une limitation des contraintes de traction du béton au niveau de l'armature,
- une injection soignée des gaines de câbles.

Relaxation - allongement

D'autres caractéristiques des aciers de précontraintes sont utilisées ou utiles à connaître telles :

- la relaxation à 1 000 heures pour les calculs de pertes de précontrainte ;
- l'allongement garanti sous charge maximale A_g , qui représente la capacité de déformation totale de l'armature avant que ne soit engagé le processus de déformation plastique localisée qui conduit à la rupture par **striction**. La valeur courante de A_g est 30‰;
- le coefficient de striction Z_g représente la réduction relative de l'aire de la section droite de l'éprouvette dans la section de rupture lors de l'essai de traction.

Pour les armatures courantes, cette réduction de section par striction est de 25 %.



3.2. Armatures passives

Les armatures passives par opposition aux armatures actives de précontrainte (qui sont sous tension même sans aucune sollicitation extérieure) sont des armatures comparables à celles du béton armé. L'acier présente une très bonne résistance à la traction (et aussi à la compression pour des élancements faibles), de l'ordre 400 à 500 MPa ; mais si aucun traitement n'est réalisé, il subit les effets de la corrosion. De plus, son comportement est ductile, avec des déformations très importantes avant rupture. Pour pallier à la faible résistance du béton en traction et à sa fragilité, on lui associe des armatures en acier. On retrouve ainsi :

- des armatures de traction pour les zones tendues de béton en classe II et III ;
- des armatures d'effort tranchant (cadres, épingles, étriers, barres longitudinales) ;
- des armatures de peau et des armatures de construction.

Les aciers utilisés sont les aciers courants à haute adhérence de béton armé

- les aciers laminés à chaud, naturellement durs, dit aciers à haute adhérence de type I. Ce type d'acier a une limite d'élasticité garantie de 400 MPa et un allongement à la rupture de 14%.
- les aciers laminés à chaud et écrouis avec faible réduction de section (par traction-torsion), dits aciers à haute adhérence de type II. Ce type d'acier a une limite d'élasticité garantie de 500 MPa et un allongement à la rupture de 12%.

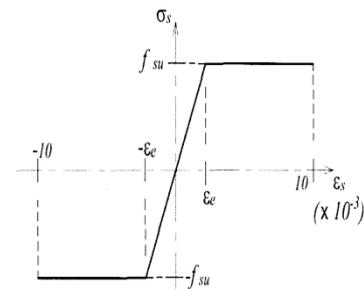
L'action de l'écrouissage est d'augmenter la limite d'élasticité en faisant disparaître le palier de plasticité, et diminuer l'allongement à la rupture (plus fragile). Les 2 types d'acier ont le même comportement élastique, donc un même module de Young $E = 210000 \text{ MPa}$. La déformation à la limite élastique est voisine de 0.2%, en fonction de la valeur de la limite d'élasticité.

3.2.1 Modèle de calcul à l'ELS

On suppose que les aciers travaillent dans le domaine élastique. On utilise donc la loi de Hooke de l'élasticité. On adopte une valeur forfaitaire du module de Young $E_s = 200\,000 \text{ MPa}$.

3.2.2 Modèle de calcul à l'ELU

Le comportement des aciers pour les calculs d'ELU vérifie une loi de type élasto-plastique parfait, comme décrit sur le diagramme contrainte-déformation où la valeur de calcul de la limite d'élasticité garantie f_{su} est définie par : $f_{su} = \frac{f_e}{\gamma_s}$. γ_s est un coefficient de sécurité partiel qui vaut 1.15 sauf pour les combinaisons accidentelles où il vaut 1.



3.3. Valeurs de calcul

a. Tension initiale

elle ne doit pas dépasser dans le cas :

- post-tension min $(0.8f_{prg} ; 0.9f_{peg})$
- pré-tension min $(0.85f_{prg} ; 0.95f_{peg})$

b. Tension des aciers actifs en l'ELS

Elle se déduit de la tension initiale σ_{po} , en tenant compte des pertes de tension instantanées (frottement, recul d'ancrage et recul instantané du béton) et différées (retrait, fluage et relaxation des aciers).

c. Tension des aciers à l'ELU

Elle est calculée à partir du diagramme $\sigma - \varepsilon$ avec un rapport d'affinité égal à $1/\gamma_s$; ($\gamma_s = 1.15$)

pour les aciers actifs et passifs.

La surtension des aciers actifs ne doit pas dépasser $0.1f_{prg}$ pour le cas de la post-tension et $(0.1f_{prg} ; 150 \text{ MPa})$ dans le cas de la pré-tension.

Chapitre 4 : Pertes de Précontrainte

1. Introduction

D'une façon générale on désigne par perte toute différence entre la force initiale exercée par les vérins lors de la mise en tension et la force résultante qui s'exerce en un point donné, en un temps donné. Plusieurs phénomènes inévitables tendent à réduire l'intensité de la force de précontrainte, et sont attribuables au comportement du matériau, au mode de précontrainte et au procédé de mise en tension. Les pertes peuvent être classées en deux grandes familles selon leur origine :

- 1- Les pertes **instantanées** ; qui se produisent lors ou juste après la mise en tension et qui sont :
 - frottement du câble sur la gaine ;
 - déformation instantanée du béton lors de la mise en tension ;
 - recul du cône d'encrage ou enfoncement du système d'appui.
- 2- Les pertes **différées** ; qui se produisent en un temps plus ou moins long après la mise en tension :
 - fluage du béton ;
 - retrait du béton
 - relaxation de l'acier.

Le calcul des pertes est nécessaire pour l'une des raisons suivantes :

- déterminer la tension résiduelle dans une section quelconque étant donné une tension active ;
- déterminer la tension initiale à appliquer à l'extrémité active étant donné une tension permanente dans une section quelconque.

Trois tensions se succéderont dans la vie d'un élément précontraint. Il y a d'abord la tension initiale au vérin σ_{p0} , ensuite la tension dans une section quelconque au transfert $\sigma_{p0}'(x)$ (juste après l'occurrence des pertes instantanées) et en fin la tension effective à long terme (après l'occurrence des pertes différées).

2. Pertes Instantanées

2.1. Pertes par frottements

Les pertes par frottement se subdivisent en deux types; les pertes dans les parties courbes et les pertes en ligne droite.

a- Pertes dans les parties courbes

Lors de sa mise en tension, le câble se plaque contre la génératrice concave de la gaine dans les parties courbes de son tracé. Si une armature est tendue à une tension P_0 , après une déviation angulaire de α radians elle devient ; $P = P_0 e^{-f\alpha}$ qui seront traduites en contraintes :

$$\sigma_A = \sigma_B \cdot e^{f\alpha} \quad \text{ou} \quad \sigma_B = \sigma_A \cdot e^{-f\alpha}$$

f : coefficient de frottement en rd^{-1}

α : angle de déviation en rd.

b- Déviations parasites en ligne droite

Théoriquement, il n'y a pas de pertes en ligne droite, mais le tracé réel présente toujours des imperfections qui se résument en des déviations parasites ou accidentelles, entraînant ainsi des pertes en ligne en droite. Ces pertes ont un caractère aléatoire et ne peuvent être évaluées qu'à l'aide de valeur moyenne forfaitaire. Ces déviations parasites sont considérées, en

général, équivalentes à une ondulation régulière de 0.75 degré par mètres. On calcule alors un coefficient de frottement φ équivalent à la déviation angulaire moyenne : $\varphi = f \cdot \alpha_d$. Par conséquent, la variation de tension dans un câble, sous l'effet des déviations parasites, en fonction de la longueur projetée x est : $P = P_0 e^{-\varphi \cdot x}$

c- Pertes totales par frottement

La variation de tension dans un câble en fonction des courbures successives et de la longueur projetée x est : $P = P_0 e^{-f\alpha \cdot x} = P_0 e^{-(f\alpha + \varphi) \cdot x} = P_0 e^{-(f\alpha/l + \varphi) \cdot x}$

$\alpha = \sum |\alpha_i|$ Somme des déviations entre l'origine et la section étudiée

x = longueur projetée du câble

Après linéarisation de l'exposant $(-f\alpha + \varphi x)$, la formule devient :

$$P_{p0}(x) = P_{p0} \left[1 - \left(f \frac{\alpha}{l} + \varphi \right) x \right]$$

$$\sigma_{p0}(x) = \sigma_{p0} \left[1 - \left(f \frac{\alpha}{l} + \varphi \right) x \right]$$

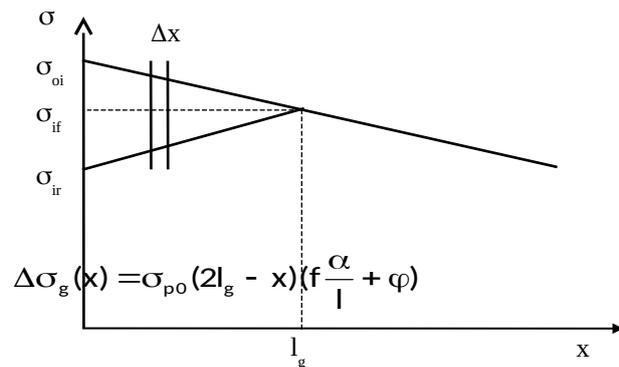
$$\Delta\sigma_f(x) = \sigma_{p0} \left(f \frac{\alpha}{l} + \varphi \right) x$$

Les valeurs numériques de f et φ couramment utilisées sont :

Nature de la gaine	Valeurs observées	Valeurs usuelles	
		câble huilé	câble sec
Feuillard agrafé	$f = 0.17 \text{ à } 0.25$	$f = 0.18$	$f = 0.20$
	$\varphi = 16 \text{ à } 40 \cdot 10^{-4}$	$\varphi = 18 \cdot 10^{-4}$	$\varphi = 20 \cdot 10^{-4}$
Tube lisse	$f = 0.15 \text{ à } 0.20$	$f = 0.16$	$f = 0.18$
	$\varphi = 10 \text{ à } 20 \cdot 10^{-4}$	$\varphi = 10 \cdot 10^{-4}$	$\varphi = 15 \cdot 10^{-4}$

2.2. Pertes par recul d'ancrage

Après la mise en tension, on vient bloquer les câbles. Le jeu existant dans l'ancrage permet un léger glissement et la déformation propre des pièces d'ancrage lorsque l'effort leur est appliqué par le vérin entraîne un raccourcissement du câble, donc une chute de tension. A cause des frottements, les pertes par recul d'ancrage n'affectent qu'une partie de la longueur de l'armature de précontrainte, donc son influence va en diminuant de l'ancrage jusqu'à une distance L_g où elle s'annule. Le tracé étant constant, le frottement entre l'ancrage et le point où se fait sentir le recul d'ancrage L_g est le même qui s'était produit à la mise en tension. Cela veut dire que le diagramme des tensions après recul d'ancrage est symétrique à celui que l'on avait avant blocage. Ceci nous donne alors la direction (la pente), il ne nous reste qu'à trouver un point pour définir la droite.



si $x = l_g$ aura :
$$l_g = \sqrt{\frac{gE_p}{\sigma_{p0} \left(\frac{f\alpha}{l} + \varphi \right)}}$$

Ces pertes ne présentent un inconvénient pour l'élément précontraint que si elles se font sentir dans la section du milieu, la plus sollicitée en traction.

- Si $L_g > L/2$, il faut tendre le câble par une seule extrémité.

2.3. Pertes élastiques instantanées

Lors de la mise en précontrainte du béton, celui-ci subit une déformation élastique instantanée par compression. Le calcul de ces chutes diffère selon le procédé de précontrainte. Dans le cas de la post-tension, s'il y a un seul câble ou si tous les câbles sont tendus simultanément, les pertes élastiques sont nulles du moment que le vérin s'appuie directement sur le béton. Par contre si les câbles sont tendus successivement, ces chutes ne sont pas nulles.

a. Pré-tension

Pour calculer les chutes élastiques, il suffit d'égaliser les raccourcissements relatifs du béton et

de l'acier : $\varepsilon_a = \varepsilon_b \Rightarrow \frac{\Delta\sigma_p}{E_p} = \frac{\sigma_b}{E_b} \Rightarrow \Delta\sigma_p = \frac{E_p}{E_b} \sigma_b$

σ_b représente la contrainte du béton au niveau du C.D.G des aciers, et en une section

quelconque elle est égale à : $\sigma_b(x) = \frac{M_g(x) \cdot e_p}{I} + \frac{\sigma_{p0}(x) \cdot A_p}{B} \left(1 + \frac{e_p^2}{i^2}\right)$

$M_g(x)$ représente le moment fléchissant sollicitant la pièce au transfert dû au poids propre.

b. Post-tension

Lorsque dans un élément plusieurs câbles sont tendus successivement, et c'est souvent le cas en post-tension, le raccourcissement instantané du béton s'effectue au fur et à mesure de la mise en tension des différentes armatures.

$$\Delta P = \frac{\sigma_b}{E_{ij}} E_p A \left[\frac{n-1}{2} \right]$$

On ramène la perte totale de précontrainte à une valeur moyenne pour chacune des armatures

actives à : $\Delta\sigma = \frac{\sigma_b}{E_{ij}} E_p \left[\frac{n-1}{2} \right] \frac{1}{n} = \frac{\sigma_b}{2} \frac{E_p}{E_{ij}}$

3. Pertes différées :

L'ensemble des pertes différées est dû à l'évolution dans le temps de l'état de déformation et de contrainte des matériaux en présence, retrait et fluage du béton, relaxation des aciers. Il est nécessaire de tenir compte de l'interaction de ces trois phénomènes. Pour cela, le B.P.E.L. a retenu le principe de les étudier séparément et tenir compte de cette simultanéité par une valeur forfaitaire.

3.1 Pertes dues au retrait

Indépendamment de tout chargement, le béton subit par retrait un raccourcissement qui a pour conséquence de détendre les armatures de précontrainte. Le retrait se développe dès le durcissement du béton, alors que les câbles ne sont tendus que lorsque celui-ci a atteint la résistance nécessaire. Donc les câbles ancrés ne subissent que la part du retrait survenu après leur mise en tension.

Connaissant le raccourcissement total du retrait ε_r et sa loi d'évolution $r(t)$, et connaissant l'âge du béton t_0 à la mise en tension, on peut déterminer le raccourcissement dû à cette part du

retrait : $r(t_0) = \frac{t_0}{t_0 + 9r_m}$ $r_m = \frac{B}{u}$

Comme le raccourcissement des câbles est égal au raccourcissement du béton;

$$\varepsilon_p = \varepsilon_b = r(t_0) \cdot \varepsilon_r$$

Les câbles étant dans leur domaine élastique, la variation de tension est:

$$\Delta\sigma_r(x) = \varepsilon_r [1 - r(t_0)] E_p$$

3.2 Pertes dues au fluage :

Contrairement au retrait du béton, le fluage est un phénomène qui se produit sous charge et la déformation théorique à l'instant t d'un béton soumis à l'âge t_0 à une contrainte σ_b est :

$$\Delta\varepsilon_{fl} = \frac{\sigma_b}{E_{ij}} K_{FL} f(t - t_0)$$

K_{FL} = Coefficient de fluage, fonction des dimensions de la pièce r_m et des conditions ambiantes.

$f(t - t_0)$: Variation du fluage en fonction du temps.

A cause de l'influence de nombreux paramètres, le B.P.E.L propose une formule simplifiée pour la variation de contraintes qui est la suivante :

$$\Delta\sigma_{fl}(x) = \left[\sigma_b(x) + \sigma_M(x) \right] \frac{E_p}{E_{ij}}$$

avec : σ_b contrainte finale après toutes les pertes

σ_M contrainte maximale à la mise en tension.

$$\sigma_M(x) = \frac{M_g(x).e_p}{I_h} + \frac{\sigma_{pi}(x).A_p}{B_h} \left(1 + \frac{e_p^2}{i^2} \right)$$

$$\sigma_b(x) = \frac{M_g(x).e_p}{I_h} + \frac{[\sigma_{pi}(x) - \Delta\sigma_d(x)]A_p}{B_h} \left(1 + \frac{e_p^2}{i^2} \right)$$

$$d'où : \Delta\sigma_{fl}(x) = \frac{2\sigma_M(x) - \frac{\Delta\sigma_r(x) + \frac{5}{6}\Delta\sigma_p(x)}{B_h} A_p \left(1 + \frac{e_p^2}{i^2} \right)}{\frac{E_{ij}}{E_p} + \frac{A_p}{B_h} \left(1 + \frac{e_p^2}{i^2} \right)}$$

* si $\sigma_M \leq 1.5 \sigma_b$ on peut prendre $\Delta\sigma_{fl} = 2.5 \sigma \frac{E_p}{E_{ij}}$

Dans le cas de la post-tension, les pertes dues au fluage et au retrait peuvent être réduites en augmentant le temps de durcissement du béton avant la mise en tension de l'acier.

3.3 Pertes dues à la relaxation des armatures:

La perte finale par relaxation est obtenue d'après le B.P.E.L. par l'expression :

$$\Delta\sigma_p(x) = \frac{6}{100} \rho_{1000} \left(\frac{\sigma_{pi}(x)}{f_{prg}} - \mu_0 \right) \sigma_{pi}(x)$$

avec $\mu_0 = 0,43$ pour armatures T.B.R

$\mu_0 = 0,35$ pour armatures B.R

$\mu_0 = 0,30$ pour armatures R.N

ρ_{1000} = la relaxation à 1000 heures.

3.4 Pertes différées totales :

Les pertes différées ne se produisent pas séparément mais en même temps et agissent donc mutuellement les unes sur les autres. Ainsi le retrait et le fluage entraînent un raccourcissement du béton donc une diminution de la perte par relaxation qui est supposée comme se produisant entre deux points fixes.

Le B.P.E.L tient compte de la concomitance de ce phénomène par un abattement forfaitaire de la relaxation.

$$\Delta\sigma_d(x) = \Delta\sigma_r(x) + \frac{5}{6} \Delta\sigma_p(x) + \Delta\sigma_{\eta}(x)$$

Donc pour le calcul des pertes différées, on commence par le retrait puis le fluage et enfin la relaxation.

4. Détermination de l'effort de précontrainte résultant :

Une première solution consiste à retrancher de la tension initiale à l'origine la somme des pertes :

$$\Delta\sigma_p(x) = \Delta\sigma_{inst} + \Delta\sigma_d(x)$$

$$\sigma_p(x) = \sigma_{pi}(x) - \Delta\sigma_d(x)$$

Cette méthode, simple, ne tient pas compte de la mauvaise précision avec laquelle les pertes sont évaluées, et l'on ne peut la prendre en compte que lorsque des précautions supplémentaires sont prises. Dans le cas contraire, la précontrainte est représentée, en ce qui concerne l'E.L.S, par les deux valeurs caractéristiques suivantes;

$$\sigma_{p1} = 1,02 \sigma_{p0} - 0,8 \Delta\sigma_p(x)$$

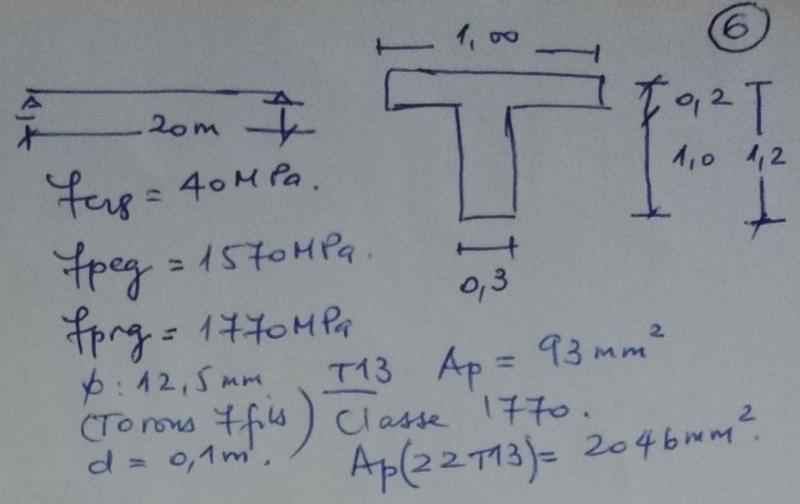
$$\sigma_{p2} = 0,98 \sigma_{p0} - 1,2 \Delta\sigma_p(x)$$

II/ Pertes en Pré-tension

$$\sigma_{po} = \text{Min} \begin{cases} 0,95 f_{peg} \\ 0,85 f_{prg} \end{cases}$$

$$\sigma_{po} = \text{Min} \begin{cases} 0,95 \cdot 1570 = 1491 \text{ MPa} \\ 0,85 \cdot 1770 = 1504 \text{ MPa} \end{cases}$$

$\sigma_{po} = 1491 \text{ MPa}$.
 Erreur à 10% (équivalent).



1/ Caractéristiques géométriques

$$B = 0,2 \cdot 1 + 0,3 \cdot 1 = 0,5 \text{ m}^2$$

$$I = \frac{1 \cdot 0,2^3}{12} + 1 \cdot 0,2 (0,46 - 0,1)^2 + \frac{1 \cdot 0,3^3}{12} + 1 \cdot 0,3 (0,74 - 0,5)^2$$

$$I = 0,068867 \text{ m}^4$$

$$y = \frac{0,1 \cdot (1 \cdot 0,2) + 0,7 (1 \cdot 0,3)}{0,5} = 0,46 \text{ m}$$

$$V_s = 0,46 \text{ m}, V_i = 0,74 \text{ m}, e_o = 0,64 \text{ m}$$

$$q = 0,5 \cdot 25 = 12,5 \text{ kN/ml}$$

$$M_g = 12,5 \cdot \frac{20^2}{8} = 625 \text{ kNm} = 0,625 \text{ MNm}$$

$$f_{c10} = 30,63 \text{ MPa}$$

$$E_{ib} = 11000 \sqrt{30,63}$$

$$E_{cb} = 34417 \text{ MPa}$$

2/ Pertes instantanées

$$P_o = A_p \cdot \sigma_{po} = 2046 \cdot 1491$$

$$P_o = 3,05 \text{ MN}$$

$$\sigma_b = \frac{3,05}{0,5} + \frac{3,05 \cdot 0,64}{0,068867} - \frac{0,625 \cdot 0,64}{0,068867} = 18,43 \text{ MPa}$$

$$\Delta \sigma_{bi} (l/2) = \sigma_b (l/2) \cdot \frac{E_p}{E_{ib}} = 18,43 \cdot \frac{2 \cdot 10^5}{34417}$$

$$\Delta \sigma_{bi} (l/2) = 107 \text{ MPa}$$

$$\Delta \sigma_{inst} = \Delta \sigma_{bi} (l/2) = 107 \text{ MPa}$$

$$\frac{\Delta \sigma_{inst}}{\sigma_{po}} = \frac{107}{1491} = 0,0718 \approx 0,072$$

$$\Delta \sigma_{inst} \approx 7\% \sigma_{po}$$

Pertes différencées

1) Retrait du béton

$$\Delta\sigma_r = \epsilon_r \cdot E_p$$

$$\left. \begin{aligned} B &= 0,5 \text{ m}^2 \\ u &= 3,7 \text{ cm} \end{aligned} \right\} r_m = \frac{5000}{370} = 13,51 \text{ cm}$$

$$r(10) = \frac{10}{10 + 9 \cdot 13,51} = 0,076$$

$$\epsilon_b = (1 - 0,076) \cdot 3 \cdot 10^{-4} = 2,772 \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta\sigma_r = \epsilon_b \cdot E_p = 2,772 \cdot 2 \cdot 10^5$$

$$\Delta\sigma_r = 55,44 \text{ MPa}$$

2) Relaxation des aciers

$$\Delta\sigma_g(l/2) = \frac{6}{100} \rho_{1000} \left(\frac{\sigma_{pi}(l/2)}{f_{prog}} - \mu_0 \right)$$

$$\mu_0 = 0,43 \text{ TBR}$$

$$\sigma_{pi}(l/2) = \sigma_{p0} - \Delta\sigma_{inst}$$

$$\sigma_{pi}(l/2) = 1491 - 107$$

$$\sigma_{pi}(l/2) = 1384 \text{ MPa}$$

$$\frac{\sigma_{pi}(l/2)}{f_{prog}} = \frac{1384}{1770} = 0,78 > 0,75$$

$$\Delta\sigma_g(l/2) = \frac{6}{100} \cdot 2 \cdot (0,75 - 0,43) \cdot 1384$$

$$\Delta\sigma_g(l/2) = 53 \text{ MPa}$$

$$i = \sqrt{\frac{I_h}{Bh}} = \sqrt{\frac{0,0808}{0,52864}} = 0,39 \text{ m}$$

3) Fluage du béton :

$$\Delta\sigma_{fl} = \frac{[\sigma_{pi} - (\Delta\sigma_r + 5/6 \Delta\sigma_g)] \frac{A_p}{Bh} \left(1 + \frac{e_p^2}{i^2}\right) - \frac{M_g}{I_h} e_p}{\frac{1}{15} + \frac{A_p}{Bh} \left(1 + \frac{e_p^2}{i^2}\right)}$$

$$\Delta\sigma_{fl} = \frac{[1384 - (55,4 + 5/6 \cdot 53)] \frac{20,46 \cdot 10^{-4}}{0,52864} \left(1 + \frac{0,606^2}{0,39^2}\right) - \frac{0,625 \cdot 0,606}{0,0808}}{\frac{1}{15} + \frac{20,46 \cdot 10^{-4}}{0,52864} \left(1 + \frac{0,606^2}{0,39^2}\right)}$$

$$\Delta\sigma_{fl} = 153,80 \text{ MPa}$$

$$Bh = 0,52864 \text{ m}^2$$

$$I_h = 0,0808 \text{ m}^4$$

$$e_p = 60,6 \text{ cm}$$

$$V_s = 49,4 \text{ cm}$$

$$V_i = 70,6 \text{ cm}$$

$$\Delta\sigma_d(l/2) = \Delta\sigma_r(l/2) + \Delta\sigma_{fl}(l/2) + 5/6 \Delta\sigma_p(l/2)$$

$$\Delta\sigma_d(l/2) = 55,44 + 153,80 + 5/6 \cdot 53$$

$$\Delta\sigma_d(l/2) = 253,4 \text{ MPa.}$$

$$\frac{\Delta\sigma_d(l/2)}{\sigma_{po}} = \frac{253,4}{1491} = 0,17 \text{ e.-\bar{a}.d. } 17\% \sigma_{po}.$$

Parte totales:

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma_{rust} + \Delta\sigma_d$$

$$\Delta\sigma = 107 + 253,4$$

$$\Delta\sigma = 360,4 \text{ MPa.}$$

$$\frac{\Delta\sigma(l/2)}{\sigma_{po}} = \frac{360,4}{1491} = 0,24 \text{ e.-\bar{a}.d. } 24\% \sigma_{po}.$$