

COURS DE BETON ARME (BA I)

Chapitre 1

1. Le béton

1.1 Généralité

Le béton est un matériau monolithique, obtenu par l'association d'une pâte de ciment, et de granulats inertes tels que le sable, les graviers ou cailloux. Les proportions de ces composants et essentiellement le dosage en ciment exprimé par le rapport W/C sont les principaux responsables des propriétés et qualités requises du béton avant ou après durcissement.

Le béton à l'état frais doit être maniable afin qu'il puisse remplir parfaitement le moule qui lui est offert, sans ségrégation, et stable en service capable d'absorber les efforts qui le sollicitent.

1.2 Les composants d'un béton

Granulats (agrégats) : fragments de roches de différentes grosseurs; selon leurs dimensions, les granulats sont classés en trois catégories qui vont de 0.08 mm à 100 mm. On trouve donc les sables, les graviers et les cailloux.

Ciment : est un liant constitué d'une poudre fine qui gâchée avec l'eau, en pâte plus ou moins épaisse, durcit sous la seule influence de l'eau.

L'eau de gâchage : La quantité d'eau employée pour le gâchage est supérieure à celle strictement nécessaire à l'hydratation du ciment du fait qu'une partie de l'eau s'évapore lorsque le béton durcit à l'air. L'eau doit être propre et ne contenir pas de matières en suspension ni des sels dissous en quantités excessives.

Adjuvants : Les adjuvants du béton sont des produits que l'on ajoute au béton (en faible quantité) avant ou après malaxage, en vue de modifier certaines propriétés du béton frais, du béton au cours de durcissement ou du béton durci.

1.3 Composition du béton

La composition du béton consiste à déterminer les diverses quantités de granulats (sable, gravier, caillou), de ciment et d'eau nécessaire pour obtenir 1m³ de béton.

Exemple : les proportions suivantes dans 1m^3 ont été déterminées pour une résistance moyenne d'environ 40MPa à 28 jours et d'un affaissement de 10 à 30 mm

Ciment ; 385Kg/m^3 , Eau : 180Kg/m^3 , Sable : 545Kg/m^3 , Gravillons : 1270 Kg/m^3 .

Les méthodes récentes de composition du béton sont nombreuses, et il est impossible de les détailler.

Méthode DOE (depatement of environment)

Méthode ACI (american concrete institute)

Méthode Faury

Méthode Dreux.

1.4 Résistance du béton

1.4.1 Compression

Un béton est défini par la valeur de sa résistance à la compression à l'âge de 28 jours, dite valeur caractéristique requise ou (spécifiée). Celle-ci est notée f_{c28} est choisie à priori compte tenu des possibilités locales et des règles de contrôle qui permettent de vérifier qu'elle atteinte.

1.4.2 Traction

La résistance caractéristique à la traction du béton à j jours, notée est conventionnellement définie par la relation : $f_{tj} = 0.6 + 0.06 f_{cj}$. La résistance à la traction du béton, est généralement inférieure à 20% de la résistance de compression, peut être obtenu directement à partir des essais de traction (Essai Brésilien).

1.5 Déformations longitudinales du béton

1.5.1 Module d'élasticité longitudinale (Module de Young)

Sous les contraintes normales d'une durée d'application inférieure à 24heures, on admet qu'à l'âge de j jours, le module de déformation longitudinale instantanée du béton $E_{ij} = 11000.f_{cj}^{1/3}$.

1.5.2 Coefficient de Poisson

Le béton comprimé dans une section, se raccourcit longitudinalement dans l'autre sens des efforts et s'allonge dans le sens perpendiculaire à l'effort. Le rapport entre la déformation transversale et longitudinale est défini comme étant le « **coefficient de Poisson** ». On adopte en générale la valeur de 0.2 lorsque le béton n'est pas fissuré à (ELS), et la valeur 0 dans le cas contraire à (ELU).

Chapitre 2

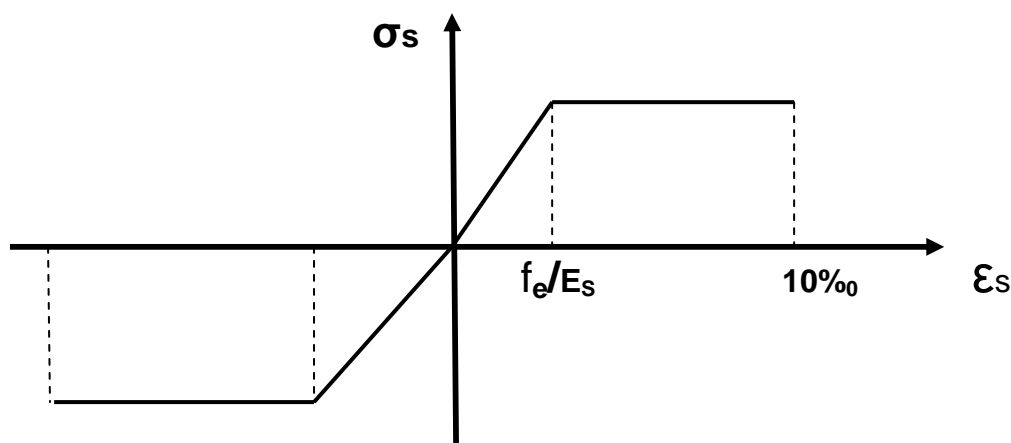
1. Propriétés des armatures

Les armatures doivent être conformes aux textes réglementaires, le caractère mécanique servant de base aux justifications est la limite d'élasticité garantie désignée par f_e ; Le module d'élasticité longitudinale de l'acier est pris égal à : $E_s = 200\,000\text{ MPa}$.

Les armatures pour béton armé sont constituées par des aciers qui se distinguent par leur nuance et leur état de surface : on trouve les ronds lisses et les barres à haute adhérence.

Pour les ronds lisses, il existe deux nuances **FeE 215** et **FeE 235**. Correspondant à des limites d'élasticité garantie de 215 et 235 MPa ; pour les barres à haute adhérence, les nuances sont **FeE 400** et **FeE 500**, correspondant à des limites d'élasticité garantie de 400 et 500 MPa.

1.1 Diagramme contrainte déformation



2. Adhérence

Les forces extérieures agissant sur les pièces en béton armé sont normalement appliquées au béton. Les armatures ne peuvent donc intervenir que s'il y a des efforts du béton elles mêmes ; L'adhérence désigne donc l'action des forces de liaisons qui s'opposent au glissement des armatures par rapport au béton qui les enrobes.

Facteurs agissant favorablement sur l'adhérence.

- L'âge du béton, le même effet que sur la résistance
- L'adhérence croît avec le dosage en ciment
- La conservation dans un environnement humide agit favorablement sur l'adhérence.
- Les armatures doivent être bien enrobées.
- Les armatures transversales disposées dans les zones de forte sollicitations de l'adhérence améliorent l'efficacité de l'ancrage

3. Actions caractéristiques

Ce sont les différentes actions auxquelles sera soumise la construction, elles sont classées en trois catégories en fonction de leur fréquence d'apparition.

Les valeurs de ces actions à introduire dans les calculs ont un caractère nominal et constituent des approximations des valeurs caractéristiques définies dans les directives réglementaires.

3.1 Actions permanentes (G)

Elles sont appliquées pratiquement avec la même intensité pendant toute la durée de vie de l'ouvrage.

Elles comportent :

- **Le poids propre de la structure**, calculé d'après les dimensions prévues ou d'exécution, la masse volumique du béton armé étant égale à 2.5 t/m^3
- **Les charges** des superstructures, des équipements fixes, les efforts dus à des terres ou à des liquides en fonction des niveaux.

3.2 Actions variables ou surcharges (Q_B)

Ce sont des actions dont l'intensité est plus ou moins constante, mais qui sont appliquées pendant un temps court ou long par rapport aux actions permanentes. Elles sont définies par les textes réglementaires en vigueur ;

On distingue :

Les actions d'exploitations qui sont définies par les conditions propres d'utilisation de l'ouvrage ou par des normes et réglementations.

Les actions climatiques définies par les règles dites « Neige et Vent »

3.3 Actions accidentelles

Ce sont des actions dues aux séismes, action dues aux feu, chocs de véhicules etc

Elles sont à considérer que si le document est de l'ordre public ou ke marché les prévoient.

4. Sollicitations de calcul vis-à-vis des états limites

Etat limite ultime : ELU

$$S1 = 1.35 G + 1.5 Q_B$$

Etat limite de service : ELS

$$S2 = G + Q_B$$

Chapitre 2

COMPRESSION SIMPLE

1. Définition

Un pièce est soumise à la compression simple lorsque les forces agissant sur elle, et situées d'un même coté par rapport a une section droite (S), peuvent être réduites, par rapport au centre de gravité G de (S) a une surface unique de compression N, perpendiculaire a (S) et passant par G.

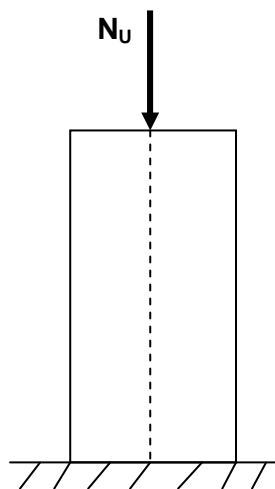
Lorsqu'on soumet une pièce rectiligne assez longue, dont des dimensions de la section transversale est faible par rapport à la longueur, a un effort de compression dirigé suivant son axe, on constate :

_ Tant que l'effort de compression est suffisamment faible, l'axe de la pièce demeure rectiligne et il se produit un raccourcissement élastique proportionnel a l'effort appliqué.

_ Si l'effort de compression augmente ; pour une certaine valeur de cet effort la pièce s'incurve brusquement et elle se rompt sous une charge inférieure a celle qui aurait provoqué la rupture d'une pièce de même section transversale.

Le phénomène décrit ci-dessus a reçu le nom de flambement, la valeur de l'effort de compression a partir de laquelle se produit le flambement s'appelle : **la charge critique d'Euler**.

Le poteau ainsi constitué de béton et d'armature, à une faible résistance au flambement, c'est pourquoi on introduit des armatures transversales.



2. Détermination de l'effort normal résistant

Le calcul du poteau s'effectue toujours à l'ELU les vérifications des contraintes à l'ELS ne sont pas nécessaires car on doit alors vérifier $\bar{\sigma}_b = 0.6 f_{c28}$ ce qui est toujours satisfait étant donné que le pourcentage d'acier ne doit dépasser 5%.

N_U = effort normal ultime extérieur.

N_b = effort normal que peut supporter le béton seul (section réduite).

N_s = effort normal que peuvent supporter les aciers.

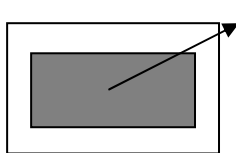
ETAT LIMITE ULTIME

$$N_U = (N_b + N_s)\alpha$$

α = coefficient multiplicateur introduit pour tenir compte de l'éventuel flambement de la pièce.

$$\text{Alors : } N_b = B_r \cdot f_{c28} / 0.9 \varphi_b \quad \text{et} \quad N_s = A_s \cdot f_e / \varphi_s$$

B_r = section réduite égale à : section carré : $(a - 2\text{cm}) \cdot (a - 2\text{cm})$



B_r

section rectangulaire : $(a - 2\text{cm}) \cdot (b - 2\text{cm})$

section circulaire : $\pi(D - 2)^2 / 4$

3. Elancement

On appelle élancement λ le rapport de flambement l_f au rayon de giration i de la section droite du béton seul.

$$\lambda = l_f / i \quad ; \quad l_f \text{ longueur de flambement} \quad ; \quad i \text{ rayon de giration}$$

$$i = \sqrt{I/S} \quad \quad I = \text{moment d'inertie de la section droite suivant la petite dimension}$$

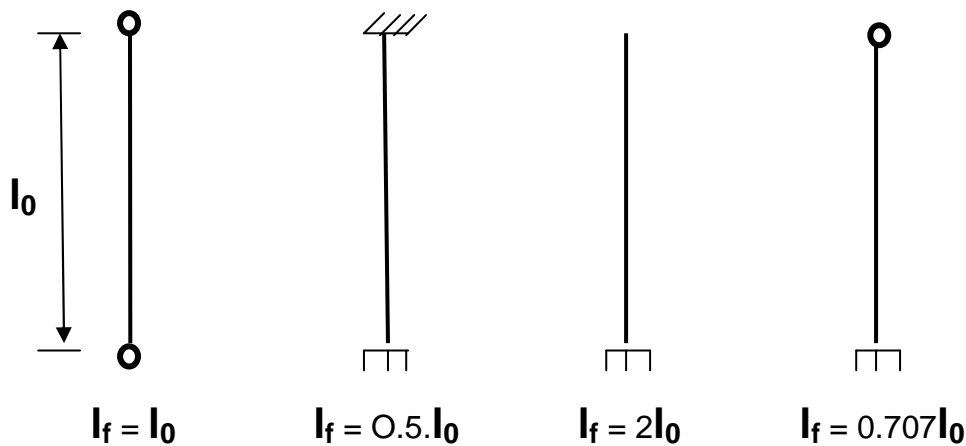
$$S = \text{aire de la section}$$

$$\alpha = 0.85 / 1 + 0.2 \cdot (\lambda/35)^2 \rightarrow \text{si } \lambda \leq 50$$

$$\alpha = 0.60 \cdot (50/\lambda)^2 \rightarrow \text{si } 50 \leq \lambda \leq 70$$

Longueur de flambement :

Elle est évaluée en fonction de la longueur libre l_0 du poteau et sa liaison effective.



Poteau d'un bâtiment contreventé par des pans verticaux (refends) $l_f = 0.7 l_0$

Considérons une section rectangulaire de dimensions $(b \times h)$ avec $h > b$ et supposons que la direction du flambement soit parallèle au côté b alors nous avons :

$$I_{\min} = hb^3/12 \quad S = b \times h \quad \text{d'où} \quad i = \sqrt{I/S} = \sqrt{hb^3/12 \cdot bh} = b/3.46$$

L'élancement mécanique λ aura pour valeur:

$$\lambda = 3.46 \cdot l_f / b$$

ETAT LIMITE DE STABILITE DE FORME

$$N_U = \alpha (B_r \cdot f_{c28} / 0.9 \varphi_b + A_s \cdot f_e / \varphi_s) \quad \text{alors:}$$

$$A_s = (N_U / \alpha - B_r \cdot f_{c28} / 0.9 \varphi_b) \cdot \varphi_s / f_e$$

ETAT LIMITE DE RESISTANCE

Les armatures longitudinales sont disposées parallèlement à l'axe longitudinal de la pièce. Elles sont généralement constituées par des barres de haute adhérence. Il est

Toute fois recommandé d'utiliser des aciers de limite élastique au moins égale à 330MPa.

En compression simple, le raccourcissement de l'acier et du béton est limité à 2%. La contrainte de béton sera donc prise égale à $0.85.f_{c28} / \varphi_b$ et celle de l'acier la contrainte correspondante à un raccourcissement de 2% : soit σ_2

Les conditions d'équilibre donne $N_{res} = N_U$

$$N_{res} = B.0.85.f_{c28} / \varphi_b + A_s.\sigma_2 \quad \text{donc} \rightarrow A_s = (N_U - B.0.85.f_{c28} / \varphi_b) / \sigma_2$$

ETAT LIMITE SZ SERVICE

$$\sigma_b = N_s / (B + 15A_s)$$

Valeurs minimales des aciers : $A_{min} \leq A \leq A_{max}$

$$A_{min} = \max (4(b+h)/100 ; 0.2bh/100)$$

$$A_{max} = 5bh/100$$

EXEMPLE DE LA COMPRESSION

Déterminer les armatures d'un poteau rectangulaire de section (20x40) cm qui supporte un effort centré ayant pour valeur : $N_U = 980 \text{ KN}$ et $N_s = 700 \text{ KN}$.

Ce poteau, qui n'est pas exposé aux intempéries, appartient à un bâtiment à étages multiples ; la longueur de flambement a pour valeur $l_f = 2.80 \text{ cm}$.

Acier : FeE400, type 1 avec $\varphi_s = 1.15$

Béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$, $\sigma_b = 14.2 \text{ MPa}$

Section minimale :

$$A_{min} = \max (2.4b+h/100 ; 0.2bh/100) ; \max (4(20+40)/100 ; 0.2(20.40)/100)$$

$$A_{min} = (2.40 ; 1.6) \quad \text{donc} \quad \underline{A_{min} = 2.40 \text{ cm}^2}$$

Etat limite de résistance :

$$A_s = (N_U - B \cdot 0.85 \cdot f_{c28} / \varphi_b) / \sigma_2 \quad \text{avec} \quad \sigma_2 = \sigma_s \quad \text{pour} \quad \varepsilon_s = 2\text{‰}$$

$$\varepsilon_s = f_e / E_s \cdot \varphi_s \rightarrow 400 / 2 \cdot 10^5 \cdot 1.15 = 1.739 \cdot 10^{-3} < 2\text{‰} \quad \text{donc} \quad \sigma_2 = f_e / \varphi_s$$

$$\sigma_2 = f_e / \varphi_s = 400 / 1.15 = 348 \text{ MPa}$$

$$A_s = (980 \cdot 10^3 - 0.85 \cdot 200 \cdot 400 \cdot 25 / 1.5) / 348 < 0$$

Etat limite de stabilité de forme:

- Vérification de l'élancement

$$\lambda = 3.46 \cdot l_f / b = 3.46 \cdot (2.80 / 0.20) = 48.44 < 70$$

$$\text{Or pour :} \quad \lambda < 50 ; \text{ on a } \alpha = 0.85 / 1 + 0.2 \cdot (\lambda / 35)^2$$

$$\alpha = 0.85 / 1 + 0.2 \cdot (48.44 / 35)^2 = \underline{0.615}$$

$$A_s = (N_U / \alpha - B_r \cdot f_{c28} / 0.9 \varphi_b) \cdot \varphi_s / f_e$$

$$A_s = (980 \cdot 10^3 / 0.615 - 180 \cdot 380 \cdot 25 / 0.9 \cdot 1.5) \cdot 1.15 / 400 = \underline{9.39 \text{ cm}^2}$$

On choisi d'après le tableau des armatures la section de 10.17 cm^2

Etat limite de service :

$$\bar{\sigma}_b = 0.6 f_{c28} = 0.6 \cdot 25 = 15 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = N_s / (B + 15 A_s) = 70 \cdot 10^3 / 200 \cdot 400 + 15 \cdot 10.17 = 7.40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b < \bar{\sigma}_b \quad \text{c'est vérifier, donc on appliqué la section de} \quad \underline{A_s = 10.17 \text{ cm}^2}$$

Chapitre 3 TRACTION SIMPLE

1. Définition

Une pièce est soumise à la traction simple lorsque les efforts s'exerçant sur elle, et situées d'un même côté par rapport à une section droite (S) peuvent être réduites à une force unique de traction N, parallèle à la ligne moyenne, et passant par le centre de gravité de (S).

2. Détermination des armatures longitudinales

Etant donné que, par mesure de sécurité, le béton tendu est négligé, il en résulte que les armatures longitudinales, de section totale A_S , doivent pouvoir équilibrer à elles seules la force appliquée N.

Etat Limite Ultime (ELU) :

$$A_S = N_U / \sigma_{S10} \quad \text{On sait que :} \quad \sigma_{S10} = f_e / \varphi_S$$

$$\varphi_S = 1.15 \quad \text{situation normal}$$

$$\varphi_S = 1 \quad \text{situation accidentelle}$$

Etat Limite de Service :

$$A_S = N_U / \sigma_S \quad \text{où}$$

$$\sigma_S = E_S \cdot \epsilon_S \quad \text{si} \quad \epsilon_S \leq f_e / E_S \varphi_S$$

$$\sigma_S = f_e / \varphi_S \quad \text{si} \quad \epsilon_S \geq f_e / E_S \varphi_S$$

σ_S est limitée par les conditions de fissurations

$$1. \text{ Fissuration préjudiciable} \rightarrow \sigma_S = \min \frac{2}{3} f_e \cdot \max (240 \text{ mpa} ; \sqrt{110\eta} \cdot f_{t28})$$

$$2. \text{ Fissuration très préjudiciable} \rightarrow \sigma_S = \min \frac{1}{2} f_e \cdot \max (240 \text{ mpa} ; \sqrt{90\eta} \cdot f_{t28})$$

Quand la fissuration est non préjudiciable, il n'y a pas lieu de faire la vérification à l'ELS.

$$f_{t28} = \text{résistance du béton à la traction ou } f_{t28} = 0.6 + 0.06 \cdot f_{c28}$$

$$\eta = 1.6 \text{ pour les aciers de haute adhérence}$$

$$\eta = 1 \text{ pour les aciers doux}$$

Condition de non Fragilité :

L'effort provoquant la fissuration dans le béton sera :

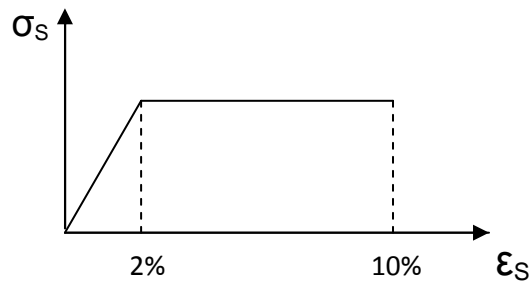
$N_f = B \cdot f_{t28}$ **B** : étant la section de béton et **f_{t28}** : la résistance à la traction

$N_f = A_s \cdot \sigma_s$ **A_s** : étant la section des armatures **σ_s** : contrainte des aciers

$$N_f = B \cdot f_{t28} = A_s \cdot \sigma_s$$

La condition de non fragilité sera:

$$A_s \cdot f_e / \varphi_s \geq B \cdot f_{t28} ; \quad \text{donc} \quad A_s \geq B \cdot f_{t28} / f_e \quad \varphi_s = 1$$

**Disposition constructive:**

- Armatures transversales avec diamètre minimum égale à 8 mm
- Espace entre armatures transversales $S_t = \min (40 \text{ cm} ; a + 10 \text{ cm})$, avec a c'est la plus petite dimension de la section.
- Respecter l'enrobage exigé par le BAEL.
- Jonction entre les barres : longueur de recouvrement **L** :
 $L = 40\varnothing$ pour les aciers FeE 400
 $L = 50\varnothing$ pour les autres types d'aciers

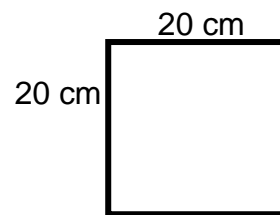
EXEMPLE DE LA TRACRION

Déterminer la section d'armature d'un tirant en béton armé soumis à un effort normal de traction, appliqué au centre de gravité de la section ; avec les conditions suivantes :

$$N_U = 400 \text{ KN}$$

$$N_S = 280 \text{ KN}$$

Section du tirant (20X20) cm



Acier : FeE 400 ; $\varphi_S = 1.5$ fissuration non préjudiciable

Béton : $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$; $f_{t28} = 2.1 \text{ MPa}$

Solution :

Condition de non fragilité :

$$A_s \geq B \cdot f_{t28} / f_e \rightarrow A_{\min} = 200 \cdot 200 \cdot 2.1 / 400 = \underline{\underline{2.1 \text{ cm}^2}}$$

Etat limite ultime :

$$A_{Su} = N_U / \sigma_{S10} \quad \text{où} \quad \sigma_S = f_e / \varphi_S \rightarrow 400 / 1.15 = 348 \text{ MPa}$$

$$\text{Donc ; } A_{Su} = 400 \cdot 10^3 / 348 = \underline{\underline{11.49 \text{ cm}^2}}$$

Etat limite de service :

Pas de vérification à l'ELS vu que la fissuration est non préjudiciable.

$$\text{Donc : on choisi le max}(A_{\min} , A_{Su}) \quad \underline{\underline{A_{Su} = 11.49 \text{ cm}^2}}$$

D'après le tableau des sections on choisi : $4 \text{ } \emptyset 20 = 12.57 \text{ cm}^2$

Exercices de traction simple

Exercice 1 :

Déterminer les armatures d'une poutre (tirant) de section carré (40x40) cm, soumise à un effort de traction centré ayant les valeurs suivantes.

$$N_G = 330 \text{ KN} , N_Q = 570 \text{ KN}$$

Béton : $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$; $\varphi_s = 1.15$, Acier : FeE400, fissuration préjudiciable.

Solution :

$$N_U = 1.35 G + 1.5 Q_B \quad (\text{état limite ultime})$$

$$N_U = 1.35.330 + 1.5.570 = \mathbf{1300.5 \text{ KN}}$$

$$N_S = G + Q_B \quad (\text{état limite de service})$$

$$N_S = 330 + 570 = \mathbf{900 \text{ KN}}$$

Section à la condition de non fragilité :

$$A_{Smin} = B.f_{t28} / f_e \quad \text{alors} \quad f_{t28} = 0.6 + 0.06.f_{c28} = 0.6 + 0.06.30 = \mathbf{2.4 \text{ MPa}}$$

$$A_{Smin} = 40.40. 2.4/400 = \mathbf{9.6 \text{ cm}^2}$$

Section à l'état limite ultime :

$$A_{Su} = N_U / \sigma_{10} \quad ; \quad \sigma_{10} = f_e / \varphi_s = 400 / 1.15 = \mathbf{347.8 \text{ MPa}}$$

$$A_{Su} = 1300.5. 10^3 / 347.8 = \mathbf{37.39 \text{ cm}^2}$$

Section à l'état limite de service :

$$\text{Fissuration préjudiciable : } \sigma_s = \min \{ 2/3.f_e . \max (240 \text{ mpa} ; \sqrt{110\eta} . f_{t28}) \}$$

$$\sigma_s = \min \{ 2/3.400. \max (240 \text{ mpa} ; \sqrt{110. 1.6.2.4}) \}$$

$$\sigma_s = \min \{ 266.67. \max (240 ; 215.6) \} \quad \text{alors} \quad \mathbf{\sigma_s = 240 \text{ MPa}}$$

$$A_{Ss} = N_S / \sigma_s = 900 / 240 = \mathbf{37.50 \text{ cm}^2}$$

Conclusion :

$$A_S = \max \{ A_{Smin} ; A_{Su} ; A_{Ss} \} \quad \underline{A_S = 37.50 \text{ cm}^2}$$

On adopte en fonction du tableau de ferrailage des sections :

$$12\emptyset 20 = 37.68 \text{ cm}^2$$

Exercice 2 :

Déterminer l'effort de traction centré que peut supporter le tirant de section (30x30) cm, ferrailer avec une section de **8 Ø 16** = 16.08 cm²

Acier : FeE 400 ; $\phi_s = 1.15$; fissuration préjudiciable

Béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$; $f_{t28} = 2.10 \text{ MPa}$

Solution :

$$A_S = 8 \emptyset 16 = 16.08 \text{ cm}^2$$

Condition de non fragilité :

$$A_S = 16.08 \text{ cm}^2 > B.f_{t28} / f_e = 30.30.2.10/400 = 4.72 \text{ cm}^2$$

Etat limite ultime:

$$N_U = A_S. \sigma_{10} = 16.08.348 = \mathbf{559.6 \text{ KN}} \quad \text{avec } \sigma_{10} = f_e / \phi_s = 400/1.15 = \mathbf{348 \text{ MPa}}$$

Etat limite de service :

$$A_{Ss} = N_S / \sigma_S \text{ donc } N_S = A_S. \sigma_S$$

$$\text{Fissuration préjudiciable : } \sigma_S = \min \{ 2/3.f_e . \max (240 \text{ mpa} ; \sqrt{110\eta} . f_{t28}) \}$$

$$\sigma_S = \min \{ 2/3.400 ; \max (240 ; \sqrt{110.1.6} . 2.10) \}$$

$$\sigma_S = \min \{ 266.67. \max (240 ; 210.6) \} \text{ alors } \quad \mathbf{\sigma_S = 240 \text{ MPa}}$$

$$N_S = A_S. \sigma_S = 16.08.10^2.240 = \mathbf{386 \text{ KN}}$$

L'effort de traction N = 386 KN

Exercice 3 :

Déterminer les armatures du tirant de l'**exercice 1** ; mais la fissuration est très préjudiciable.

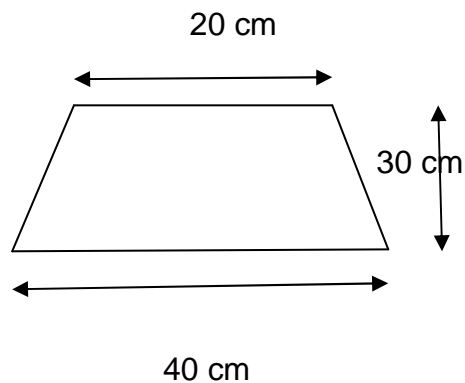
Exercice 4 :

Déterminer les armatures du tirant trapézoïdale soumis à un effort de traction centré ayant les valeurs suivantes :

$$N_U = 450 \text{ KN} ; N_S = 200 \text{ KN}$$

$$\text{Béton : } f_{c28} = 25 \text{ MPa} ; f_{t28} = 2.10 \text{ MPa}$$

$$\text{Acier : FeE400 ; } \varphi_s = 1.15 ; \text{ fissuration non préjudiciable}$$



Exercices de compression simple

Exercice 1 :

Déterminer les armatures d'un poteau rectangulaire de section **(30x40)** cm qui supporte un effort de compression centré ayant pour valeur.

$$N_U = 990 \text{ KN} ; N_S = 750 \text{ KN}$$

Ce poteau qui n'est pas exposé aux intempéries, appartient à un bâtiment à étages multiples contreventé par un refend, sa longueur de flambement est **$l_f = 2.80 \text{ m}$** .

Aciers : FeE400 ; $\varphi_s = 1.15$

Béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$; $\varphi_b = 1.5$

Solution :

Section minimal:

$$A_{Smin} = \max (4(b+h)/100 ; 0.2(b.h)/100) = 4(30+40)/100 ; 0.2.30.40 = 1.9 ; 2.4$$

$$\underline{A_{Smin} = 2.4 \text{ cm}^2}$$

Etat limite de résistance :

$$A_S = (N_U - B.0.85.f_{c28} / \varphi_b) / \sigma_s ; \sigma_{bc} = 0.85.f_{c28} / \varphi_b = 0.85.25 / 1.5 =$$

$$\text{Avec : } \sigma_2 = \sigma_s \text{ pour } \epsilon_s = 2\text{‰}$$

$$\epsilon_e = f_e / E_s \cdot \varphi_s = 400 / 2.10^5 \cdot 1.15 = 1.74\text{‰} < 2\text{‰} \rightarrow \sigma_s = \sigma_2 = f_e / \varphi_s = 400 / 1.15 = 348 \text{ MPa}$$

$$A_S = 990.10^3 - (300.400).14.2 / 348 < 0$$

Conclusion : pour les états limites de résistances, les armatures ne sont pas nécessaires donc section surdimensionnée.

Etat limite de stabilité de forme :

$$\lambda = 3.46.l_f / b = 3.46.2.80 / 0.3 = 32.99 < 50 \text{ donc } \underline{\lambda = 32.99}$$

On peut utiliser la méthode exposée au cours.

$$A_S = (N_U / \alpha - B_r \cdot f_{c28} / 0.9 \varphi_b) \cdot \varphi_s / f_e$$

$$\alpha = 0.85 / 1 + 0.2 \cdot (\lambda/35)^2 = 0.85 / 1 + 0.2 \cdot (32.99/35)^2 = \underline{0.66}$$

$$A_s = (990 \cdot 10^3 / 0.66 - (280) \cdot (380) \cdot 25 / 0.9 \cdot 1.5) / (1.15 / 400) = \underline{9.23 \text{ cm}^2}$$

D'après le tableau on prend: $A_s = 10.17 \text{ cm}^2$

Etat limite de service:

$$\bar{\sigma}_b = 0.6 f_{c28} = 0.6 \cdot 25 = 15 \text{ MPa}$$

$$\sigma_b = N_s / (B + 15A_s) = 750 \cdot 10^3 / 300 \cdot 400 + 15 \cdot 1017 = 6.40 \text{ MPa}$$

$\sigma_b < \bar{\sigma}_b$ c'est vérifier, donc on appliqué la section de $A_s = 10.17 \text{ cm}^2$

Exercice 2 :

Soit a déterminer la capacité portante d'un poteau en béton armé de section carré (35x35) cm, soumis à la compression simple, doté de 4Ø16 et 4Ø12 avec un acier FeE400 ; sachant que : $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$; $\sigma_{bc} = 17 \text{ MPa}$; $l_f = 2.8\text{m}$, situation normal $\varphi_s = 1.15$

Solution :

Etat limite de résistance :

$$N_u = B \cdot 0.85 \cdot f_{c28} / \varphi_b + A_s \cdot \sigma_2 \quad ; \quad A_s = 4\text{Ø}16 + 4\text{Ø}12 = 8.04 + 4.53 = 12.57 \text{ cm}^2$$

$$\sigma_s = f_e / \varphi_s = 400 / 1.15 = 348 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_{bc} = 0.85 \cdot f_{c28} / \varphi_b = 17 \text{ MPa}$$

$$N_{res} = (350)^2 \cdot 17 + 348 \cdot 1257 = \underline{2519.94 \text{ KN}}$$

Stabilité de forme :

$$\lambda = 3.46 \cdot l_f / a = 3.46 \cdot 2.80 / 0.35 = 25.68 < 50$$

$$\alpha = 0.85 / 1 + 0.2 \cdot (\lambda/35)^2 = 0.85 / 1 + 0.2 \cdot (25.68/35)^2 = \underline{0.76}$$

$$N_{uf} = \alpha \{ f_{c28} / 0.9 \cdot \varphi_b \cdot B_r + A_s \cdot (f_e / \varphi_s) \} \quad ; \quad B_r = (35-2)^2 = 1089 \text{ cm}^2$$

$$N_{uf} = 0.76 \{ 30 / 0.9 \cdot 1.5 \cdot 1089 \cdot 10^2 + 1257 \cdot 348 \} = \underline{2171.65 \text{ KN}}$$

Etat limite de service :

$$\overline{\sigma}_b = 0.6 f_{c28} \quad ; \quad \sigma_b = N_s / (B + 15A_s)$$

$$N_s = 0.6 \cdot f_{c28} \cdot (15 \cdot A_s + B) = 0.6 \cdot 30 \cdot (15 \cdot 1257 + (350)^2) = 2544.39 \text{ KN}$$

Conclusion:

La capacité portante du Poteau sera donc:

$$N = \min (N_u ; N_{uf} ; N_s) = \underline{\underline{2171.65 \text{ KN}}}$$

Exercice 3 :

Déterminer les armatures d'un poteau circulaire de diamètre **(40)** cm qui supporte un effort de compression centré ayant pour valeur.

$$N_u = 2500 \text{ KN} ; N_s = 2000 \text{ KN}$$

Ce poteau qui n'est pas exposé aux intempéries, appartient à un bâtiment à étages multiples $l_f = 2.80 \text{ m}$.

Aciers : FeE400 ; situation normale $\varphi_s = 1.15$

Béton : $f_{c28} = 30 \text{ MPa}$; $\varphi_b = 1.5$

L'élanement pour un poteau circulaire $\lambda = 4 \cdot l_f / D$; $D = \text{diamètre}$

Exercice 4 :

Soit un poteau de section circulaire, la hauteur du poteau est **$l_o = 5 \text{ m}$** , soumis aux charges suivantes :

$$N_G = 85 \text{ KN} ; N_{QB} = 45 \text{ KN}$$

Aciers : FeE400 ; situation normale $\varphi_s = 1.15$; **$l_f = 0.7 \cdot l_o$**

Béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$; $\varphi_b = 1.5$

Il est demandé de :

- 1) Trouver le diamètre (D) du poteau, ou l'élanement du poteau **$\lambda = 25$**
- 2) Calculer le ferrailage correspondant.
- 3) Faire le schéma de ferrailage.

FLEXION SIMPLE

Chapitre 4

1. Définition

Un élément est soumis à la flexion simple lorsque les forces agissant sur lui (y compris les réactions d'appuis), et situées à gauche d'une section droites (**S**), peuvent être réduites, par rapport au centre de gravité de (**S**), à un moment de flexion (**M**) d'axe perpendiculaire au plan de symétrie de la section (**fig.1**), et à un effort tranchant (**V**) exercé dans le plan de la section.

On suppose aussi dans ce qui suit que les sections droites de ces éléments possèdent un axe de symétrie et que les forces qui leur sont appliquées sont symétriques par rapport à ce plan.

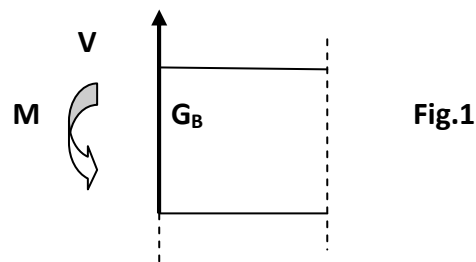


Fig.1

Dan ce présent chapitre nous étudions en premier les effets du moment de flexion M (ELUR) et (ELS) ensuite ceux de l'effort tranchant et ce en trois parties.

2. Etats limites

Les règles du BAEL prévoient que les calculs de béton armé seront conduits en application de la théorie des états limites.

Un état limite est l'état d'une structure (ou d'une partie de cette structure) dans lequel une condition requise pour remplir son objet est strictement satisfaite et cesse de l'être en cas d'augmentation de la sollicitation.

On distingue les états limites ultimes (de résistance, stabilité de forme) et les états limites de service (de compression de béton, d'ouverture de fissure, de déformation) :

3. Etats limites ultimes (ELU)

Ils mettent en jeu la sécurité des biens et des personnes

Ils correspondent au maximum de la capacité portante de l'ouvrage ou d'un de ses éléments par :

- Perte d'équilibre statique,
- Rupture d'une ou plusieurs sections,
- Instabilité de forme (flambement)

Critères de calcul sont :

Déformations relatives limites (ou courbure limites)

Calculs de type « rupture » les lois réelles (idéalisées) $\sigma - \epsilon$

4. Etats limites de service (ELS)

Ils sont liés aux conditions normales d'exploitation et de durabilité

- Ouverture excessive des fissures,
- Compression excessive du béton,
- Déformation excessive des éléments porteurs

Critères de calcul sont :

Contraintes admissibles

Calcul de type « élastique » : loi de Hooke, coefficient d'équivalence.

5. Calcul de section relatif à l'Etat Limite de Résistance

4.1 Hypothèses de calcul :

- _ Les sections droites restent planes après déformation
- _ Il n'y a pas de glissement relatif entre les armatures et le béton
- _ Le diagramme des déformations de la section est linéaire ; les déformations normales (allongements et raccourcissement relatifs) sont donc, en chaque point, proportionnelles à la distance de ce point à l'axe neutre.
- _ La résistance à la traction du béton est négligée.
- _ Les positions du diagramme des déformations de la section correspondant à un état limite sont définies au paragraphe.

Les diagrammes contraintes-déformations de calcul du béton et de l'acier sont ceux définis aux chapitres :

Le raccourcissement unitaire du béton est limité à :

$\epsilon_{bc} = 3.5 \text{ ‰}$ en flexion simple

$\epsilon_{bc} = 2 \text{ ‰}$ en compression

L'allongement maximal de l'acier tendu est limité conventionnellement à $\epsilon_s = 10 \text{ ‰}$

— Un groupe de barres disposées en plusieurs lits est équivalent à une barre unique, située au centre de gravité du groupe, si l'erreur commise par les déformations au niveau des différents lits, ne dépasse pas 15%.

4.2 Diagramme des déformations à l'ELU (règle des trois pivots) :

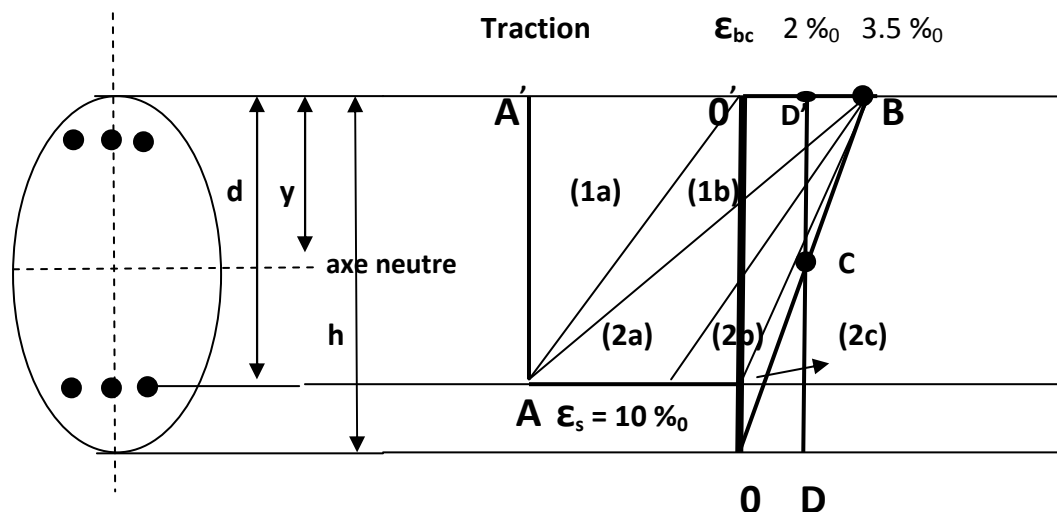


Fig.2 Diagramme des déformations

On note Y la distance de l'axe neutre à la fibre supérieure de la section, la valeur de Y détermine celui des domaines dans lequel est situé le diagramme limite. Ces domaines représentés sur la figure 2, sont définis de la façon suivante.

Domaine 1, pivot AEtat limite ultime atteint pour l'acier

- Limite A A' traction pure ou simple, allongement des aciers $\epsilon_s = 10 ‰$
- Limite A A' O' traction composée (1a), $\epsilon_s < 10 ‰$, l'axe neutre se trouve à l'extérieur de la section
- Limite A O'B flexion simple (1b), la valeur Y de l'axe neutre est donnée par les formules suivantes. $Y = \alpha \cdot d$

Si $\epsilon_{bc} = 2 ‰ \rightarrow y = (2/2+10).d = 0.167.d$

Si $\epsilon_{bc} = 3.5 ‰ \rightarrow y = (3.5/3.5+10).d = 0.259.d$

Domaine 2, pivot BEtat limite ultime atteint pour le béton

- Flexion simple ou composée zone (2a) $\epsilon_y \leq \epsilon_s \leq 10 ‰$; $\sigma_s = f_e / \varphi_s$
- zone (2b) $0 \leq \epsilon_s \leq \epsilon_y$; $\sigma_s = \epsilon_s \cdot E_s$
- zone (2c) $\epsilon_s > 0$ acier faiblement comprimé
- La position de l'axe neutre est égale à : $0.259.d < y < h$

Domaine 3, pivot CEtat limite ultime atteint pour le béton

- Limite D C D' compression simple, correspond à un raccourcissement ultime du béton $\epsilon_{bc} = 2 ‰$
- Flexion composée, $2 ‰ < \epsilon_b < 3.5 ‰$; la position de l'axe neutre est en dehors de la section : $Y \geq h$

4.3 Diagramme contraintes – déformations :**4.3.1 Aciers :**

Le diagramme contraintes – déformations à considérer dans le calcul à l'état ultime est conventionnellement défini par la **fig.3**, pour le calcul et les vérifications à l'état limite de service, l'acier est supposé élastique et linéaire.

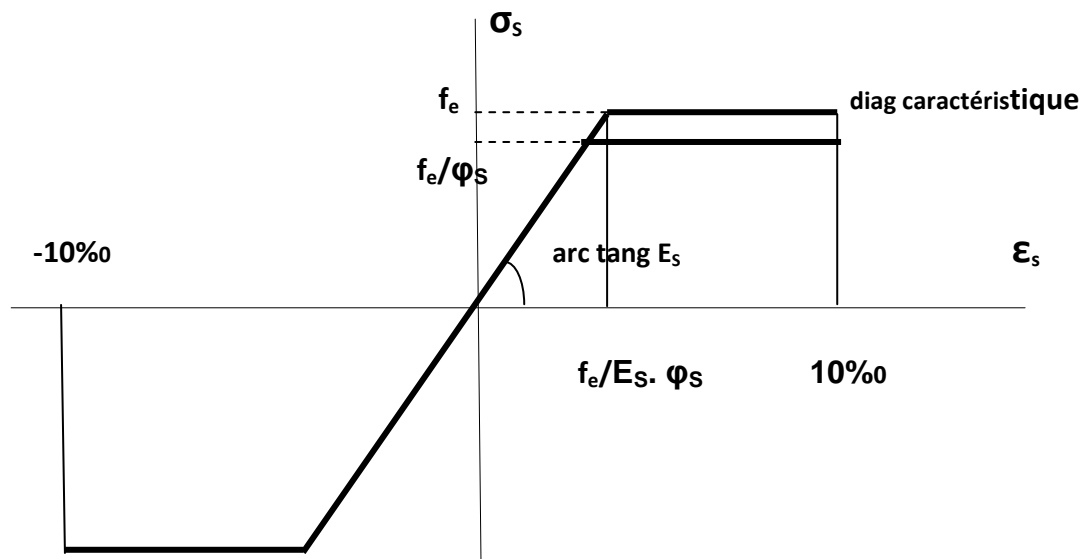


Fig.3 Diagramme contraintes-déformations de l'acier

Le module E_s n'est que peu affecté par la dispersion, le diagramme de calcul se déduit du diagramme conventionnel (diagramme caractéristique) par une affinité parallèle à la Loi de Hooke et de rapport $1/\varphi_s$ avec $\varphi_s = 1.15$ dans le cas général et $\varphi_s = 1$ dans le cas des combinaisons accidentelles.

Le diagramme de calcul permet de connaître la contrainte σ_s de l'acier, lorsque l'on connaît sa déformation relative, il est régi par les expressions suivantes.

$$\text{Si } \epsilon_s \leq f_e / \varphi_s E_s \rightarrow \sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s$$

$$\text{Si } \epsilon_s \geq f_e / \varphi_s E_s \rightarrow \sigma_s = f_e / \varphi_s$$

4.3.2 Bétons :

Pour le calcul à l'état limite, on utilise pour le béton un diagramme non linéaire dit « **Parabole rectangle** » Fig.4 ou dans un but de simplification le « **diagramme rectangulaire équivalent** ». Pour les vérifications à l'état limite de service, le béton considéré comme élastique et linéaire, est défini par son module d'élasticité.

Le diagramme parabole-rectangle est constitué d'un arc de parabole depuis l'origine des coordonnées jusqu'à son sommet de coordonnées $\epsilon_s = 2\text{‰}$, prolongé par un palier d'ordonnée $\sigma_{bc} = 0.85 \cdot f_{c28} / \theta \varphi_s$

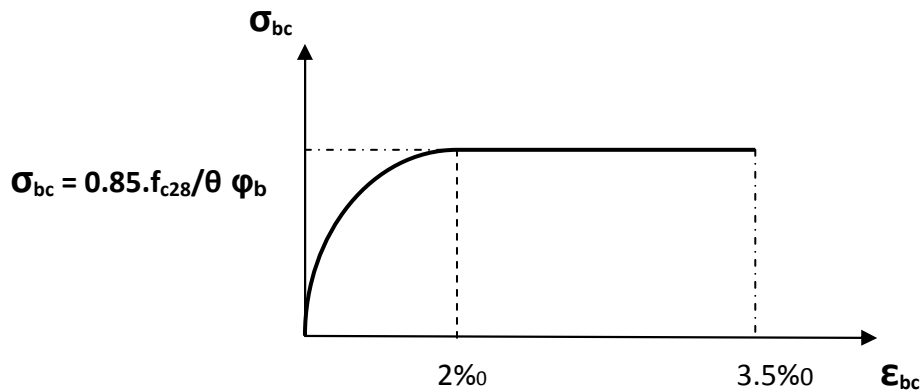


Fig.4 Diagramme parabol rectangle

Le diagramme de calcul permet de connaître la contrainte σ_{bc} du béton, lorsque l'on connaît sa déformation relative, il donne l'expression graphique des relations suivantes.

Si $0 \leq \epsilon_{bc} \leq 2\text{‰}$ $\rightarrow \sigma_{bc} = 0.25.10^3 \cdot \epsilon_{bc}(4 - 10^3 \epsilon_{bc})$

Si $2\text{‰} \leq \epsilon_{bc} \leq 3.5\text{‰}$ $\rightarrow \sigma_{bc} = 0.85.f_{c28}/\theta \varphi_b$

Le coefficient de sécurité φ_b tient compte de :

- L'incertitude due à la dispersion des mesures de résistance effectuées sur les éprouvettes.
- La réduction possible de la résistance du matériau mis en œuvre par rapport à sa résistance caractéristique définie à priori.

$\varphi_b = 1.5$ dans le cas de combinaisons fondamentales

$\varphi_b = 1.15$ dans le cas de combinaisons accidentelles

Le coefficient **0.85** au numérateur et **θ** au dénominateur ont pour objet de tenir compte de ce que la résistance du béton est fonction décroissante de la durée d'application de la charge.

Durée d'application	$\geq 24 \text{ h}$	$24 \text{ h} \geq \dots \geq 1 \text{ h}$	$\leq 1 \text{ h}$
θ	1	0.9	0.85

Tableau 1 : Coefficients θ en fonction de la durée d'application des charges

5. Equivalence du diagramme parabole rectangle et ou diagramme rectangulaire

De façon à permettre un calcul manuel simple, les règles BAEL admettent, lorsque la section n'est pas entièrement comprimée, que l'on substitue au diagramme parabole rectangle, le diagramme rectangulaire simplifié définie de la façon suivante fig.5

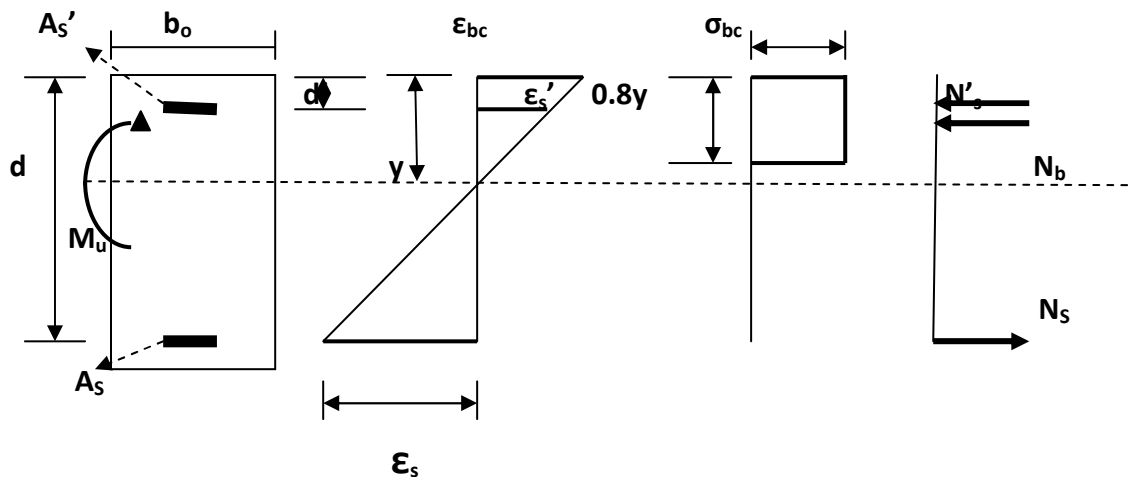


fig.5 Diagramme rectangulaire

Sur une distance de $0.8y$ à compter de la fibre la plus comprimée, l'intensité de la contrainte est uniforme et égale à σ_{bc} ; $\sigma_{bc} = 0.85.f_{c28}/\theta \varphi_b$

6. Calcul des sections en flexion

Soit M_u le moment équilibré par le béton, calculé au niveau de l'armature tendue, à partir du diagramme rectangulaire simplifié : on obtient alors

On pose l'équation d'équilibre par rapport à la section d'armature A_s :

Soit une section sollicitée par un moment de flexion M_u :

$$N_b = \int \sigma_b(y) \cdot b(y) dy \quad \text{compression du béton}$$

$$N_s' = A_s' \sigma_s' \quad \text{avec} \quad \sigma_s' = f(\epsilon_s')$$

$$N_s = A_s \sigma_s \quad \text{avec} \quad \sigma_s = f(\epsilon_s)$$

$$N_b + N_s' - N_s = 0$$

$$M_u = N_b \cdot Z + A_s' \sigma_s' (d - d') \quad ; \quad N_u = 0.8 \cdot y \cdot \sigma_{bc} = 0.8 \cdot b \cdot \alpha \cdot d \cdot \sigma_{bc}$$

Sans armature comprimées :

$$M_u = 0.8 \cdot y \cdot b_0 \cdot \sigma_b \cdot (d - 0.4y) \quad ; \quad \sigma_{bc} = 0.85 \cdot f_{c28} / \theta \cdot \varphi_b$$

En remplaçant $y = \alpha \cdot d$ dans l'équation on obtient :

$$M_u = 0.8 y \cdot b_0 \cdot \sigma_b \cdot (d - 0.4y) = 0.8 \cdot \alpha \cdot d \cdot b_0 \cdot \sigma_{bc} \cdot (d - 0.4 \cdot \alpha \cdot d)$$

$$M_u = 0.8 \cdot \alpha \cdot d^2 \cdot b_0 \cdot \sigma_{bc} \cdot (1 - 0.4 \cdot \alpha)$$

$$\text{Posons : } \mu = M_u / b_0 \cdot d^2 \cdot \sigma_{bc} = 0.8 \cdot \alpha (1 - 0.4 \alpha)$$

$$M_u = \mu \cdot b_0 \cdot d^2 \cdot \sigma_{bc}$$

On constate que le moment réduit de la section est sans dimensions;

$$\alpha = 0.259 \rightarrow \mu = 0.187 \quad \text{donc} \quad \text{l'état limite ultime est atteint Pivote B}$$

- **Si** $\mu < 0.187$ le domaine de déformation est situé dans le domaine 1 *Pivote A*
Et l'allongement relatif de l'armature est de 10‰.
- **Si** $\mu > 0.187$ le domaine de déformation est situé dans le domaine 2 *Pivote B*
- **Si** $0.187 < \mu < \mu_{\text{limite}}$ on calcule la position de l'axe neutre

 $\mu < \mu_{\text{limite}}$ section simplement armée :

$$\mu = 0.8 \cdot \alpha (1 - 0.4 \alpha) \quad \text{en d'autres termes} \quad 0.32\alpha + 0.8\alpha + \mu$$

$$\text{Soit : } \alpha = 1.25 (1 - \sqrt{1 - 2\mu})$$

$$\text{le bras de levier est égale à } Z = d \cdot (1 - 0.4 \alpha)$$

$$Z/d = (1 - 0.4 \alpha) \rightarrow \beta = (1 - 0.4 \alpha)$$

$$0.8 \cdot b \cdot \alpha \cdot d \cdot \sigma_{bc} = A_s \sigma_s \quad \text{ALORS} \quad A_s = 0.8 \cdot b \cdot \alpha \cdot d \cdot \sigma_{bc} / \sigma_s$$

$$\text{Donc : } \bullet \quad A_s = M_u / Z \cdot \sigma_s \quad Z = \beta \cdot d$$

$$\text{Alors : } \quad \epsilon_s = (1 - \alpha / \alpha) \cdot \epsilon_{bc}$$

$$\text{Si } \epsilon_s \leq \epsilon_{el} \rightarrow \sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s \quad \text{cas } \mu > \mu_{\text{limite}}$$

Si $\epsilon_s > \epsilon_{el} \rightarrow \sigma_s = f_e / \varphi_s$ cas $\mu < \mu_{limite}$

$$\mu_{limite} = 0.8 \cdot \alpha_l (1 - 0.4 \alpha_l) \quad \text{ou} \quad \alpha_{limite} = \epsilon_{bc} / \epsilon_{bc} + \epsilon_e \quad \text{et} \quad \epsilon_e = f_e / E_s \cdot \varphi_s$$

$\mu < \mu_{limite}$ section avec armatures comprimées :

$$\epsilon_s = (1 - \alpha / \alpha) \cdot \epsilon_{bc} \quad ; \quad \epsilon_s' = (1 - d' / \alpha d) \cdot \epsilon_{bc}$$

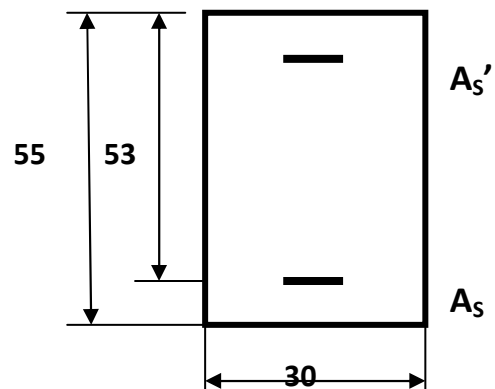
$$0.8 \cdot b_0 \cdot \alpha \cdot d + A_s' \sigma_s' - A_s \sigma_s = 0$$

$$M_u = 0.8 \cdot \alpha \cdot d^2 \cdot b_0 \cdot \sigma_{bc} \cdot (1 - 0.4 \cdot d) + \sigma_s' A_s' \cdot (d - d')$$

- $A_s' = \frac{M_u - 0.4 \cdot b_0 \cdot d^2 \cdot \sigma_{bc} / \sigma_s' \cdot (d - d')}{\sigma_s'}$; $\sigma_s' = f_e / \varphi_s$
- $A_s = A_s' \cdot \sigma_s' + 0.8 \cdot b \cdot d \cdot \sigma_{bc} / \sigma_s$

Exercice 1:

Soit à déterminer les armatures de la poutre à section rectangulaire (55x30), soumise à un moment de flexion : $M_u = 450 \text{ KN.m}$ et $M_s = 320 \text{ KN.m}$, sachant que les armatures sont en acier FeE400. Le béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$, $\sigma_{bc} = 14.2 \text{ MPa}$, situation normale $\varphi_s = 1.15$, fissuration très préjudiciable.



Solution :

Etat limite ultime

$$\mu = M_u / b_0 \cdot d^2 \cdot \sigma_{bc} = 450 \cdot 10^6 / 14.2 \cdot 300 \cdot (530)^2 = \underline{0.380}$$

$$\text{calcul de } \mu_{limite} : \mu_{limite} = 0.8 \cdot \alpha_l (1 - 0.4 \alpha_l)$$

$$\alpha_{limite} = \epsilon_{bc} / \epsilon_{bc} + \epsilon_e \quad \text{et} \quad \epsilon_e = f_e / E_s \cdot \varphi_s = 400 / 2 \cdot 10^5 \cdot 1.15 = 1.739\text{‰} \quad ; \quad \epsilon_{bc} = 3.5\text{‰}$$

$$\alpha_{\text{limite}} = 3.5/3.5+1.739 = 0.668 \quad \rightarrow \quad \mu_{\text{limite}} = 0.668 \cdot 0.8 (1-0.4 \cdot 0.668) = \underline{0.392}$$

$$\text{Alors : } \mu < \mu_{\text{limite}} \rightarrow \epsilon_s > \epsilon_e$$

Les aciers travaillent dans le domaine plastique pivot B, la section est simplement armée.

$$A_s = M_u / Z \cdot \sigma_s \quad ; \quad z = \beta \cdot d \quad ; \quad \beta = (1-0.4 \alpha) \quad ; \quad \epsilon_s > \epsilon_{el} \rightarrow \sigma_s = f_e / \varphi_s$$

$$\sigma_s = f_e / \varphi_s = 400 / 1.15 = \underline{348 \text{ MPa}}$$

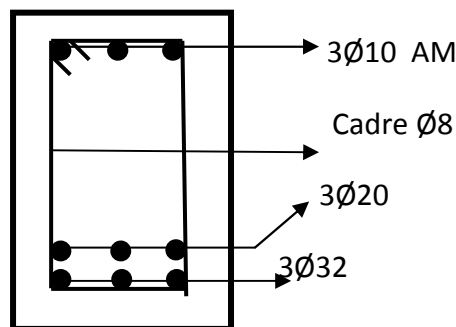
$$\beta = (1-0.4 \alpha) \quad ; \quad \alpha = 1.25 (1 - \sqrt{1-2\mu}) = 1.25 (1 - \sqrt{1-2 \cdot 0.38}) = \underline{0.64}$$

$$\beta = (1-0.4 \cdot 0.64) = \underline{0.74}$$

$$\text{Donc : } A_s = M_u / Z \cdot \sigma_s = 450 \cdot 10^6 / 348 \cdot 0.74 \cdot 530 = \underline{32.97 \text{ cm}^2}$$

Voir dans le tableau des sections et choisir le nombre de barres et leurs diamètres.

$$3\emptyset 32 = 24.13 \quad + \quad 3\emptyset 20 = 9.42 \quad = 33.55 > 32.97 \quad \underline{\text{Vérifier}}$$



Exercice 2:

Déterminer les armatures de la poutre à section rectangulaire (**65x30**), soumise à un moment de flexion : $M_u = 700 \text{ KN.m}$ et $M_s = 530 \text{ KN.m}$, sachant que les armatures.

Aciers FeE400, situation normale $\varphi_s=1.15$, fissuration préjudiciable

Le béton : $f_{c28} = 20 \text{ MPa}$,

Solution :***Etat limite ultime***

$$\mu = M_u / b_0 \cdot d^2 \cdot \sigma_{bc} ; \quad \sigma_{bc} = 0.85 \cdot f_{c28} / \theta \quad \varphi_b = 0.85 \cdot 20 / 1.5 = 11.33 \text{ MPa}$$

$$\mu = 700 \cdot 10^6 / 300 \cdot 610^2 \cdot 11.33 = \underline{0.395}$$

$$\text{Calcul de } \mu_{\text{limite}} : \quad \mu_{\text{limite}} = 0.8 \cdot \alpha_l (1 - 0.4 \alpha_l)$$

$$\alpha_{\text{limite}} = \epsilon_{bc} / \epsilon_{bc} + \epsilon_e \quad \text{et} \quad \epsilon_e = f_e / E_s \quad \varphi_s = 400 / 2 \cdot 10^5 \cdot 1.15 = 1.739\text{‰} ; \quad \epsilon_{bc} = 3.5\text{‰}$$

$$\alpha_{\text{limite}} = 3.5 / 3.5 + 1.739 = 0.668 \quad \rightarrow \quad \mu_{\text{limite}} = 0.668 \cdot 0.8 (1 - 0.4 \cdot 0.668) = \underline{0.392}$$

$$\text{Alors : } \mu > \mu_{\text{limite}} \rightarrow \epsilon_s < \epsilon_e$$

Les aciers travaillent dans le domaine plastique pivot B, la section est doublement armée.

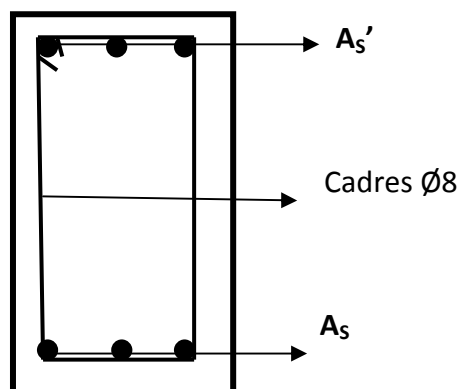
$$A_s' = M_u - 0.4 \cdot b_0 \cdot d^2 \cdot \sigma_{bc} / \sigma_s' \cdot (d - d') ; \quad \sigma_s' = f_e / \varphi_s = 400 / 1.15 = 348 \text{ MPa}$$

$$A_s' = 530 \cdot 10^6 - 0.4 \cdot 300 \cdot 610^2 \cdot 10.66 / 348 = 0.24 \text{ cm}^2$$

$$A_s = A_s' \cdot \sigma_s' + 0.8 \cdot b \cdot d \cdot \sigma_{bc} / \sigma_s = 24 \cdot 348 + 0.8 \cdot 300 \cdot 610 \cdot 11.33 / 348 = 13.10 \text{ cm}^2$$

D'après le tableau:

$$A_s = 3\varnothing 25 = 14.73 \quad \text{et} \quad A_s' = 3\varnothing 10 = 3.14$$



Exercice 3:

Déterminer les armatures de la poutre à section rectangulaire **(60x30)**, soumise à un moment de flexion : **$M_U = 250 \text{ KN.m}$** et **$M_S = 200 \text{ KN.m}$** , sachant que les armatures.

Aciers FeE 500, situation normale **$\varphi_s=1.15$** , fissuration préjudiciable

Le béton : **$f_{c28} = 25 \text{ MPa}$** , **$d = 56 \text{ cm}$**

Exercice 4:

Déterminer les armatures de la poutre à section rectangulaire **(55x30)**, soumise à un moment de flexion : **$M_U = 550 \text{ KN.m}$** et **$M_S = 300 \text{ KN.m}$** , sachant que les armatures.

Aciers FeE400, situation normale **$\varphi_s=1.15$** , fissuration préjudiciable

Le béton : **$f_{c28} = 20 \text{ MPa}$** , **$d = 51 \text{ cm}$**

7. Vérification des états limites de service en flexion simple

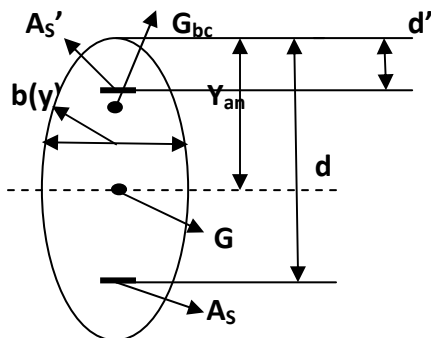
La vérification des ELS en flexion simple se résume à :

- Etat limite de la compression du béton.
- Etat limite de la fissuration du béton qui se traduit par la limitation des contraintes dans l'acier.

7.1 Calcul des contraintes à l'ELS :

La section étant soumise à un moment de service M_{SER} , la contrainte à une distance « y » de l'axe neutre sera :

$$\sigma(y) = (M_{SER} / I) \cdot y \quad \text{on pose} \quad K = M_{SER} / I$$



- y : Ordonnée du point de calcul de la contrainte
- I : Moment d'Inertie par rapport à l'axe neutre
- G : Centre de gravité de la section
- G_{bc} : Centre de gravité de la partie comprimée

Remarque :

Pour répondre à l'une des hypothèses de la RDM, on considère que la poutre est constituée d'une section homogène ; pour cela on considère qu'elle est constituée de la section du béton comprimée et des sections de béton équivalentes aux sections d'aciers comptés n fois ($n = 15$) en gardant le même CDG.

Section du béton équivalente aux aciers comprimés = $n \cdot A_{s'}$

Section du béton équivalente aux aciers tendus = $n \cdot A_s$

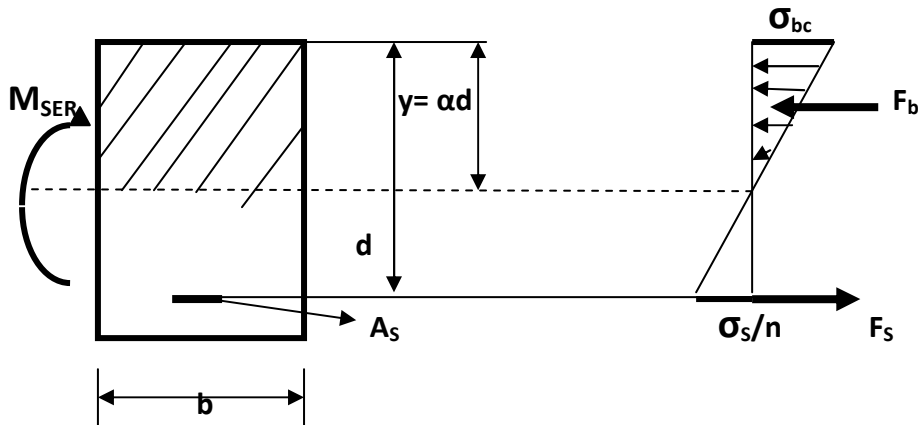
Contrainte max dans le béton comprimé : $\sigma_b = K \cdot y_{an}$ avec $K = M_{SER} / I$

Contrainte max dans les aciers tendus : $\sigma_s = n \cdot K \cdot (d - y_{an})$

7.2 Calcul des sections lorsque l'ELS est le plus défavorable.

Lorsque, après avoir dimensionné la section à l'ELU, la vérification à l'ELS n'est pas assurée, il faut redimensionner la section à l'ELS.

7.2.1 La limitation de la compression vérifiée, la condition de non fissuration non assurée.



Si la condition $\sigma_s \leq \bar{\sigma}_s$ n'est pas vérifiée, il faut recalculer A_s en supposant que $\sigma_s = \bar{\sigma}_s$

$$\sum F_x = 0 \quad F_b = F_s \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \sigma_{bc} \cdot b \cdot y - A_s \cdot \bar{\sigma}_s \quad (1)$$

$$\sum M/A_s = 0 \quad \rightarrow \quad M_{SER} - \frac{1}{2} \sigma_{bc} \cdot b \cdot y \cdot (d - y/3) = 0 \quad (2)$$

En (1) et (2) on a 3 équations (A_s , σ_{bc} , y)

Le diagramme des contraintes nous permet d'écrire :

$$\sigma_{bc}/y = (\bar{\sigma}_s/n)/d-y \quad \rightarrow \quad \sigma_{bc} = (\bar{\sigma}_s/n) \cdot [\alpha/1-\alpha] \quad (3)$$

$$\text{avec } y = \alpha d \quad \rightarrow \quad M_{SER} - \frac{1}{2} \cdot (\bar{\sigma}_s/n) \cdot [\alpha/1-\alpha] \cdot b \cdot \alpha d \cdot (d - \alpha d/3)$$

En combinant les équations (1) et (2), on aura une équation du 3ème degré en fonction de α :

$$\bar{\sigma}_s \cdot \alpha^3 - 3 \bar{\sigma}_s \cdot \alpha^2 - (6n \cdot M_{SER}/bd^2) \cdot \alpha + (6n \cdot M_{SER}/bd^2) = 0 \quad (4)$$

$$M_{SER} = \bar{\sigma}_s/90 \cdot b \cdot y^2 \cdot (3d-y)/(d-y) \quad \rightarrow \quad by^2 + 30 \cdot (A_s + A_s') \cdot y - 30(A_s \cdot d + A_s' \cdot d') = 0$$

$$I = 1/3 \cdot b \cdot y^3 + 15[A_s(d-y)^2 + A_s'(y-d')^2] \quad \text{Moment d'inertie}$$

$$\left. \begin{aligned} M_{SER} - \frac{1}{2} \sigma_{bc} \cdot b \cdot y \cdot (d-y/3) &= 0 \quad (2) \\ \sigma_{bc} &= (\bar{\sigma}_s/n) \cdot [\alpha/1-\alpha] \quad (3) \end{aligned} \right\} M_{SER} - (\bar{\sigma}_s/n) \cdot [\alpha/1-\alpha] \cdot b y / 2 (d-y/3) = 0$$

On développant ces équations on arrive à :

$$\bar{\sigma}_s \alpha^3 - 3\bar{\sigma}_s \alpha^2 - 6n(M_{SER}/bd^2) \alpha + 6n(M_{SER}/bd^2) = 0$$

$$\alpha = 1 + 2\sqrt{\lambda} \cdot \cos(240^\circ + \zeta/3) \quad \text{avec} \quad \lambda = 1 + (30 \cdot M_{SER}/bd^2 \sigma_s)$$

$$\cos \zeta = 1/\sqrt{\lambda} \quad \text{avec} \quad \zeta \text{ en degré}$$

α étant connue, donc :

$$\sigma_{bc} = (\bar{\sigma}_s/n) \cdot [\alpha/1-\alpha] \leq 0.6f_{c28} \quad \text{doit être vérifié}$$

$$A_s \bar{\sigma}_s = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{bc} \cdot b \cdot y \quad \rightarrow \quad A_s = (\sigma_{bc}/\bar{\sigma}_s) \cdot b \cdot y / 2$$

$$\text{Alors : } A_s = (\alpha \cdot b \cdot d) / 2 \cdot (\sigma_{bc}/\bar{\sigma}_s)$$

$$\text{On sait que : } \sigma_{bc} = (\sigma_s/n) \cdot [\alpha/1-\alpha] \quad \rightarrow \quad \sigma_{bc}/\bar{\sigma}_s = (1/15) \cdot (\alpha/1-\alpha)$$

Ce qui donne :

$$A_s = (bd/30) \cdot (\alpha^2/1-\alpha)$$

7.2.2 La condition de compression n'est pas vérifiée.

Dans ce cas on propose de redimensionner la section du béton en faisant travailler le béton à son maximum.

$$\text{c.a.d : } \bar{\sigma}_{bc} = 0.6.f_{c28} \quad \text{et les aciers à leur maximum } \sigma_s = \bar{\sigma}_s$$

L'équation d'équilibre donne :

$$M_{SER} - F_b \cdot (d-y/3) = 0$$

$$M_{SER} - \sigma_{bc} \cdot b \cdot y / 2 \cdot (d-y/3) = 0$$

$$M_{SER}/bd^2 - (\bar{\sigma}_{bc}/2) \cdot \alpha(1-\alpha/3) = 0$$

$$M_{SER}/bd^2 - (0.6.f_{c28}/6) \cdot \alpha(3-\alpha) = 0$$

$$bd^2 = 10M_{SER} / f_{c28} \cdot \alpha(3 - \alpha)$$

$$\overline{\sigma}_{bc} / (\overline{\sigma}_s / n) = y / d - y = \alpha / 1 - \alpha \quad \rightarrow \quad \overline{\sigma}_{bc}(1 - \alpha) = (\overline{\sigma}_s / n) \alpha$$

$$0.6 \cdot f_{c28} \cdot (1 - \alpha) = (\overline{\sigma}_s / n) \alpha \quad \rightarrow \quad \alpha [(f_{c28} / 15) + 0.6 \cdot f_{c28}]$$

$$\alpha = 9 \cdot f_{c28} / (9 \cdot f_{c28} + \overline{\sigma}_s)$$

La section d'armatures sera:

$$A_s \cdot \overline{\sigma}_s = \overline{\sigma}_{bc} \cdot b \cdot y / 2 \quad \rightarrow \quad A_s = (0.6 \cdot f_{c28} / 2) \cdot (b \cdot y) / \overline{\sigma}_s$$

$$A_s = (0.3 f_{c28} \cdot b \cdot d \cdot \alpha) / \overline{\sigma}_s$$

Résumé:

Si : $\sigma_{bc} \leq \overline{\sigma}_{bc}$ et $\sigma_s \leq \overline{\sigma}_s$ \rightarrow On ne fait pas de vérification à l'ELS, A_s à l'ELU est acceptée

Si : $\sigma_{bc} > \overline{\sigma}_{bc}$ et $\sigma_s \leq \overline{\sigma}_s$ \rightarrow On redimensionne la section du béton

Si : $\sigma_{bc} \leq \overline{\sigma}_{bc}$ et $\sigma_s > \overline{\sigma}_s$ \rightarrow On recalcule la section des armatures A_s

Si : $\sigma_{bc} > \overline{\sigma}_{bc}$ et $\sigma_s > \overline{\sigma}_s$ \rightarrow On redimensionne la section du béton

Exercice 1:

Soit à déterminer les armatures de la poutre à section rectangulaire **(71x30)**, soumise à un moment de flexion : $M_U = 450 \text{ KN.m}$ et $M_S = 500 \text{ KN.m}$, sachant que les armatures sont en acier **FeE400**, situation normale $\varphi_s = 1.15$, fissuration préjudiciable. Le béton : $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$, $\sigma_{bc} = 14.2 \text{ MPa}$.

Solution :**1) Calcul à l'ELU :**

Le calcul donne une section simplement armée , pivot A donc : $A_s = 19.10 \text{ cm}^2$; $A_s' = 0$

2) Calcul à l'ELS :

Vérification des contraintes,

$$\sigma_b = K \cdot y_{an} \quad \text{avec} \quad K = M_{SER} / I ; \quad \sigma_s = n \cdot K \cdot (d - y_{an})$$

$$\text{c.a.d :} \quad \text{le béton : } \overline{\sigma}_{bc} = 0.6 \cdot f_{c28}$$

$$\text{les aciers : } \sigma_s = \overline{\sigma}_s = \min \{ 2/3 \cdot f_e \cdot \max (240 \text{ mpa} ; \sqrt{110\eta} \cdot f_{t28}) \} \text{ fissuration préjudiciable}$$

Alors : y est donné par la formule :

$$y_{an} = \text{racine de } by^2 + 30 \cdot (A_s + A_s') \cdot y - 30(A_s \cdot d + A_s' \cdot d') = 0$$

$$\text{Vu que } A_s' = 0 \text{ l'équation devient : } 30y^2 + 30 \cdot A_s \cdot y - 30 \cdot A_s \cdot d = 0$$

$$30y^2 + 573y - 40683 = 0 \rightarrow \underline{Y = 28.49 \text{ cm}}$$

Le moment d'inertie de la section :

$$I = 1/3 \cdot b \cdot y^3 + 15[A_s(d-y)^2 + A_s'(y-d')^2] \quad \text{avec } A_s' = 0$$

$$I = 1/3 \cdot b \cdot y^3 + 15[A_s(d-y)^2] \quad \text{on remplace : } I = 748981.84 \text{ cm}^4$$

$$K = M_{SER} / I = 500.10^6 / 748981.84 = 0.0668 \text{ N/mm}^3$$

$$\sigma_s = n \cdot K \cdot (d - y_{an}) = 15 \cdot 0.0668 (710 - 284.9) = \underline{425.95 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_b = K \cdot y_{an} = 0.00668 \cdot 284.9 = \underline{19.03 \text{ MPa}}$$

Vérification :

$$\overline{\sigma}_{bc} = 0.6 \cdot f_{c28} = 0.6 \cdot 25 = 15 \text{ MPa}$$

$$\overline{\sigma}_s = \min \{ 2/3 \cdot f_e \cdot \max (240 \text{ mpa} ; \sqrt{110\eta} \cdot f_{t28}) \} = \min (2/3 \cdot 400 \cdot (240 ; 110 \sqrt{1.6 \cdot 2.1}) = 240 \text{ MPa}$$

Conclusion :

$$\sigma_{bc} = 19.03 \text{ MPa} > \overline{\sigma}_{bc} = 15 \text{ MPa} \quad \text{non vérifier}$$

$$\sigma_s = 425.95 \text{ MPa} > \overline{\sigma}_s = 240 \text{ MPa} \quad \text{non vérifier}$$

Il faut donc redimensionner la section du béton

Pour : $\sigma_{bc} = 0.6 \cdot f_{c28}$ et $\sigma_s = \overline{\sigma_s}$

On a : $bd^2 = 10M_{SER} / f_{c28} \cdot \alpha(3 - \alpha)$ avec $\alpha = 9 \cdot f_{c28} / 9 \cdot f_{c28} + \overline{\sigma_s} = 9.25 / 9.25 + 240 = \underline{0.484}$

$$bd^2 = 10M_{SER} / f_{c28} \cdot \alpha(3 - \alpha) = 10.500.10^6 / 25.0.484 \cdot (3 - 0.484) = \underline{16423.132 \text{ cm}^3}$$

On garde $b = 30 \text{ cm} \rightarrow \underline{d = 74 \text{ cm}}$

La section d'armature devient :

$$A_s = (0.3 f_{c28} \cdot b \cdot d \cdot \alpha) / \overline{\sigma_s} = 0.3 \cdot 25 \cdot 300 \cdot 740 \cdot 0.484 / 240 = \underline{33.55 \text{ cm}^2}$$

On peut choisir: $3\emptyset 32 + 3\emptyset 20 = 33.58 \text{ cm}^2$

Exercices:

Reprendre les exercices 2, 3, 4 de la partie flexion simple ELU et faire le calcul à l'ELS.