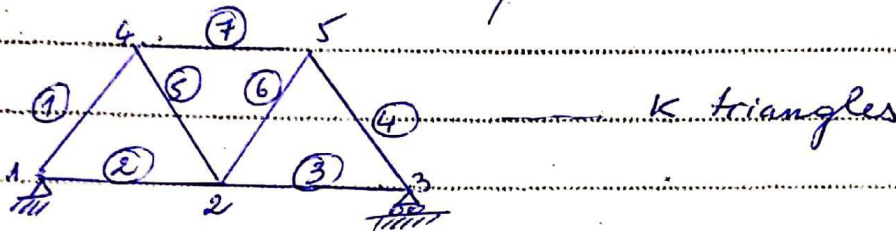


Chap I : Treillis isostatiques

Hypothèses simplificatrices :

- 1) Les barres sont articulées.
- 2) poids propre des barres est négligé
- 3) forces extérieures appliquées aux nœuds
- 4) Les axes des articulations sont k axes au plan.
- 5) systèmes triangulés plans et forces extérieures situées dans ce plan.



b : nombre de barres

n : nombre de nœuds

r : nombre de réactions d'appuis

exp :

Le 1^{er} triangle (1 2 4) a :

$$b = 3, n = 3$$

ajoutons K autres triangles au 1^{er} (1 2 4)

A chaque opération, nous apportons 2 barres et 1 nœud.

Donc, b et n deviennent

$$\begin{cases} b = 3 + 2K & \text{--- (1)} \\ n = 3 + K & \text{--- (2)} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - 2 \times \textcircled{2} \Rightarrow b - 2n = 3 - 6 + 2K - 2K$$

$$\Rightarrow b = 2n - 3$$

si $b = 7 \Rightarrow n = 5$ et $r = 3$

* système intérieurement isostatique : $2n - 3 = b$

si $2n - 3 < b \Rightarrow$ syst intérieurement hyperstatique

$\Rightarrow d = b - 2n + 3$: degré d'hyperstatisme (barres surabondantes)

* $r = 3$: système extérieurement isostatique

$r > 3$: " " hyperstatique

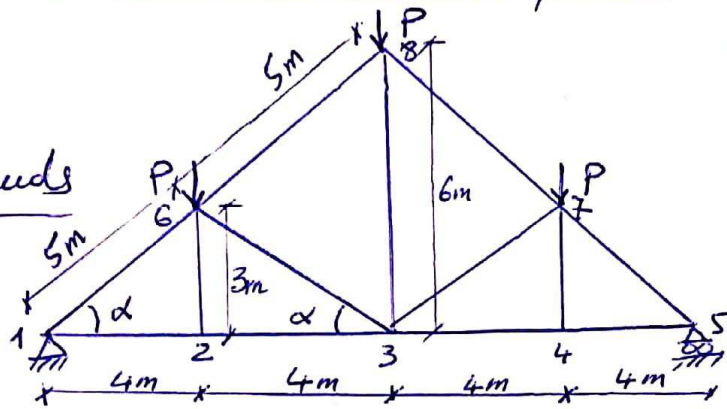
$d = r - 3$: degré d'hyperstatisme extérieure

(1)

TD n°1: Treillis isostatiques.

Exo 1 :

Méthode des nœuds



1) Degré d'hyperstaticité :

* extérieurement :

$$r = 3 \rightarrow d = r - 3 = 0 \Rightarrow \text{structure isostatique extérieurement}$$

* intérieurement :

$b = 13$ barres

$n = 8$ nœuds

$$d = b - (2n - 3) = 13 - (2 \cdot 8 - 3) = 0 \Rightarrow \text{structure isostatique intérieurement}$$

2) Réactions d'appuis :

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_1 + R_5 = 3P \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow 16 R_5 = 4P + 8P + 12P = 24P \Rightarrow R_5 = \frac{24}{16}P$$

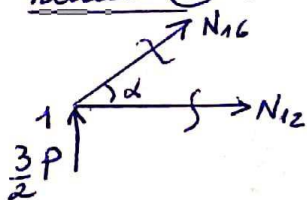
$$\Rightarrow \boxed{R_5 = \frac{3}{2}P}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow R_1 = 3P - R_5 = 3P - \frac{3}{2}P = \frac{3}{2}P \Rightarrow \boxed{R_1 = \frac{3}{2}P}$$

3) Efforts dans les barres :

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} ; \sin \alpha = \frac{3}{5} ; \tan \alpha = \frac{3}{4} (\alpha = 36.86^\circ)$$

nœud ① :



$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_{12} + N_{16} \cos \alpha = 0 \dots \dots \textcircled{2}$$

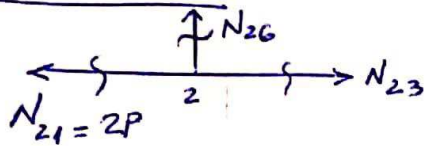
$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{3}{2}P + N_{16} \sin \alpha = 0 \Rightarrow N_{16} = -\frac{\frac{3}{2}P}{\frac{3}{5}} = -\frac{5}{2}P$$

$$\boxed{N_{16} = -\frac{5}{2}P \text{ (cmp)}}$$

$$\text{d'eq. ②} \Rightarrow N_{12} = -N_{16} \cos \alpha = \frac{5}{2}P \cdot \frac{4}{5} = 2P ; \boxed{N_{12} = 2P \text{ (trc)}}$$

(2)

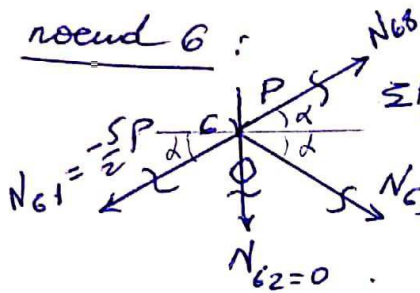
noeud 2 :



$$\sum F_y = 0 \rightarrow N_{26} = 0$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N_{23} = N_{21} = 2P \text{ (trc)}$$

noeud 6 :



$$\sum F_z = 0 : N_{68} \cos \alpha + N_{63} \cos \alpha - N_{61} \cos \alpha = 0 \dots (3)$$

$$\sum F_y = 0 : -N_{63} \sin \alpha - N_{61} \sin \alpha + N_{68} \sin \alpha - P = 0 \dots (4)$$

$$\text{l'eq. (4)} \Rightarrow N_{68} = N_{63} + N_{61} + \frac{P}{\sin \alpha}$$

$$= N_{63} - \frac{5}{2}P + \frac{P}{3/5} = N_{63} - \frac{5}{6}P$$

remplaçons N_{68} dans l'eq. (3) :

$$(N_{63} - \frac{5}{6}P) + N_{63} - N_{61} = 0$$

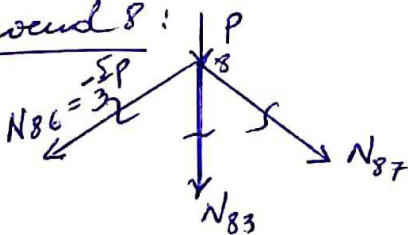
$$2N_{63} - \frac{5}{6}P + \frac{5}{2}P = 0 \Rightarrow 2N_{63} = \frac{5}{6}P - \frac{5}{2}P = \frac{-10P}{6} = -\frac{5}{3}P$$

$$\Rightarrow N_{63} = -\frac{5}{6}P \text{ (cmp)}$$

$$\Rightarrow N_{68} = N_{63} - \frac{5}{6}P = -\frac{5}{6}P - \frac{5}{6}P = -\frac{10}{6}P = -\frac{5}{3}P$$

$$\Rightarrow N_{68} = -\frac{5}{3}P \text{ (cmp)}$$

noeud 8 :



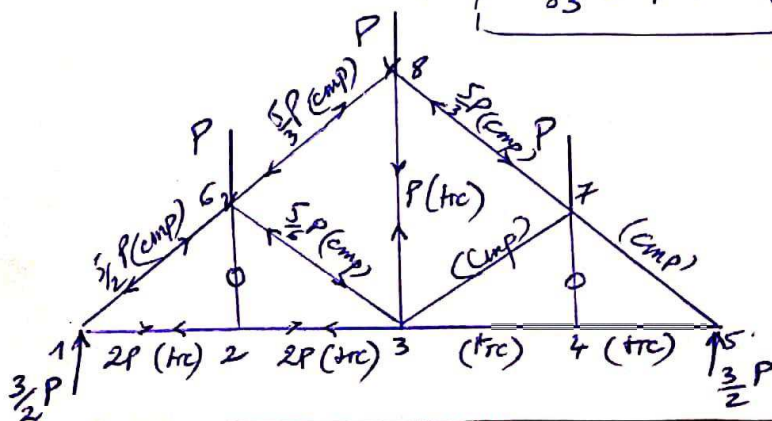
$$\sum F_z = 0 \rightarrow N_{87} \cos \alpha - N_{86} \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow N_{87} = N_{86} = -\frac{5}{3}P \text{ cmp}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -P - N_{86} \sin \alpha - N_{87} \sin \alpha - N_{83} = 0$$

$$\Rightarrow N_{83} = -P - 2N_{86} \sin \alpha = -P - 2(-\frac{5}{3}P) \frac{3}{5}$$

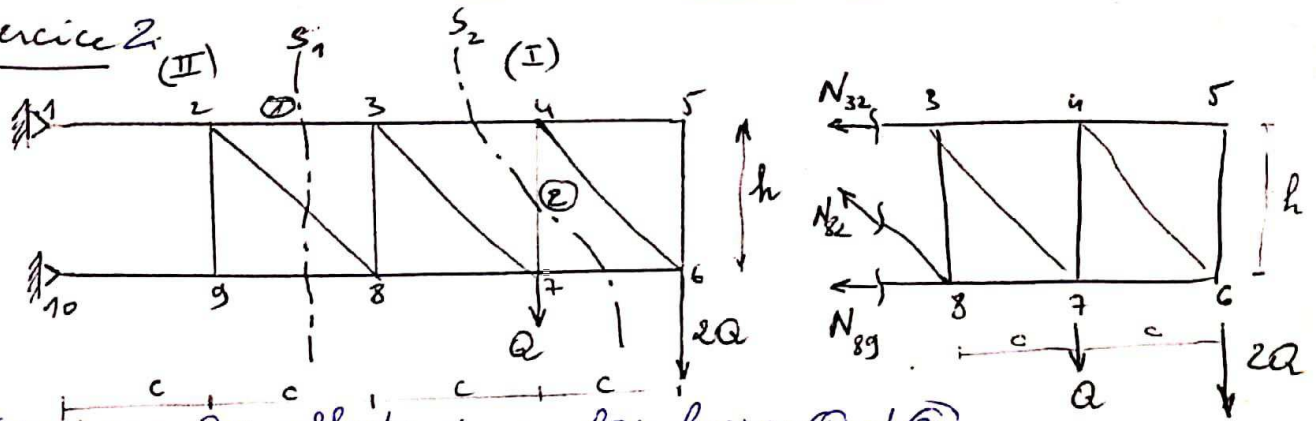
$$\Rightarrow N_{83} = +P \text{ (trc)}$$



structure symétrique.

(3)

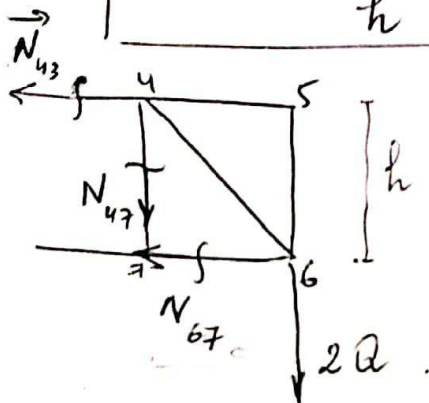
Exercice 2 (II)



Déterminer les efforts dans les barres ① et ②.

$$* \sum M_B = 0 \Rightarrow N_{32} \cdot h - Q \cdot c - 2Q \cdot 2c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{32} = \frac{5Qc}{h} > 0} \quad (\text{trc})$$



$$* \sum \vec{F} = \vec{0} \quad (\Rightarrow) \quad \vec{N}_{43} + \vec{N}_{47} + \vec{N}_{46} + 2\vec{Q} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -N_{43} - N_{67} = 0 \\ -2Q - N_{47} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{N_{47} = -2Q} < 0$$

Chapre : Déformations des structures élastiques.

2.1. Généralités :

Sous l'action des charges, toutes structures subit des déformations qui sont la conséquence de la déformabilité des matériaux utilisés à leur réalisation.

La structure passe donc de sa position initiale non déformée à une autre, d'équilibre, toute proche de la première, qu'on appelle "position déformée".



(b)



(a)

Savoir déterminer la déformation en n'importe quel point d'une structure présente pour l'ingénieur un intérêt tant théorique que pratique :

• Intérêt théorique : il est motivé par la possibilité que donne l'analyse des déformations pour résoudre les structures hyperstatiques.

• L'intérêt pratique est justifié par le fait que la conception raisonnée d'un élément de construction ne peut pas se borner à exiger de celui-ci qu'il remplisse la seule condition de résistance c-à-d que les $\sigma_{\max}$ dans les sections les plus dangereuses ne dépassent pas une certaine limite prévue.

Dans beaucoup de cas, la condition esthétique ou de bon fonctionnement imposent que les déformations ne dépassent pas elles aussi une certaine limite imposée par des normes.

2.2. Hypothèses

Dans le calcul des déformations dans les structures, on suppose que les matériaux utilisés respectent les hypothèses suivantes de la R.D.M.

- Milieu continu
- Milieu isotrope
- Milieu est parfaitement élastique
- d) déformations faibles ; e) linéarité entre les efforts et les déformations (Loi de Hooke) ; f) planéité des sections planes après déformations (Hypothèse de Bernoulli) ; g) principe de Saint Venant : distribution identique des efforts pour des systèmes de forces équivalents

Parmi les hypothèses les deux suivantes ont une importance particulière :

- linéarité entre les efforts et les déformations, qui permet l'application du principe de la superposition des effets ;
- déformation faible (domaine élastique), qui permet d'écrire les équations d'équilibre de la structure déformée en utilisant le schéma de la structure non déformée sans faire de grosse erreurs.

2.3. Possibilité d'exprimer la condition d'équilibre.

Pour exprimer la condition d'équilibre dans la position déformée, on peut procéder de deux manières :

- Appliquer le principe de la Conservation de l'énergie : Méthodes Energetiques
- Appliquer le principe des déplacements virtuels : Méthodes Cinématiques.

2.3.1. Méthodes Energetiques

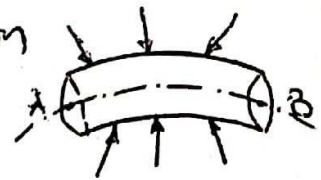
Pour déterminer les déformations par cette méthode, la loi de la conservation de l'énergie peut être énoncée ainsi :
"le travail mécanique des forces extérieures est égal au travail mécanique des forces intérieures (Efforts)".

2.3.2. Energie de déformation ou énergie potentielle Travail mécanique des efforts internes.

Considérons un corps élastique (AB) soumis à un chargement qq. les charges étant appliquées statiquement.

Rappelons l'expression de l'énergie de déformation de chaque type de sollicitation.

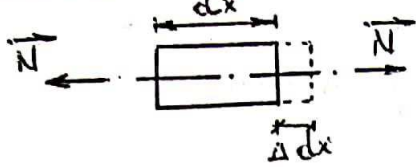
Dans le cas général, le torseur des efforts de cohésion s'écrit :



$$\begin{cases} \vec{R} = N \vec{e} + T_y \vec{j} + T_z \vec{k} \\ d\vec{B}_A = Q \vec{e} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} \end{cases}$$

Sollicitations

a/ Effort Axial



Energie de déformation

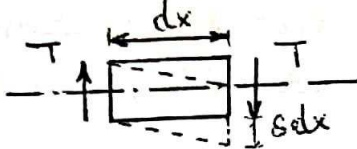
$$dW^N = \frac{1}{2} N \Delta dx$$

$$\text{or: } \Delta dx = \frac{N}{E} \cdot \frac{dx}{A}$$

$$\text{donc: } dW^N = \frac{1}{2} \cdot N \cdot \frac{N}{EA} \cdot dx$$

$$W^N = \int_{AB} \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} dx$$

b/ Effort tranchant (T_y, T_z):



$$dW^T = \frac{1}{2} T \cdot s \cdot dx$$

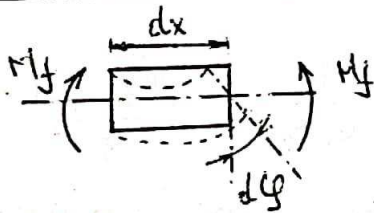
$$\text{or: } s = \frac{K \cdot T}{G \cdot A} \quad (K: \text{coeff de correction})$$

$$\text{donc: } dW^T = \frac{1}{2} K \cdot \frac{T^2}{G \cdot A} dx$$

$$W^T = \int_{AB} \frac{1}{2} \frac{T^2}{G \cdot S_r} dx$$

$$S_r = \frac{A}{K} \text{ parti réduite.}$$

c/ Moment flechissant (M_y, M_z):



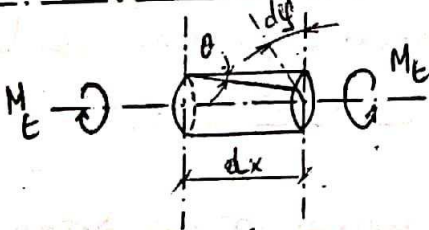
$$dW^{My} = \frac{1}{2} M_y \cdot d\theta$$

$$\text{or: } d\theta = \theta \cdot ds \quad ; \quad \theta = \frac{\tau}{E} = \frac{M_y}{EI_y}$$

$$dW^{My} = \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{EI_y} dx$$

$$W^{My} = \frac{1}{2} \int_{AB} \frac{M_y^2}{EI_y} dx$$

d/ Moment de torsion



$$dW^{Me} = \frac{1}{2} M_e d\theta$$

$$\text{or: } d\theta = \frac{M_e}{G I_p} dx$$

$$dW^{Me} = \frac{1}{2} \frac{M_e^2}{G I_p} dx$$

$$W^{Me} = \int_{AB} \frac{1}{2} \frac{M_e^2}{G I_p} dx$$

Dans le cas général (toutes les sollicitations agissant simultanément)
l'expression de l'énergie de déformation s'écrit:

$$W = \frac{1}{2} \int_{AB} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{T^2}{G S_r} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_e^2}{G I_p} \right) dx$$

Avec : E : module de Young ;

A : Section ;

G : module de cisaillement ;

I : moment d'inertie ax quadratiques ;

I_p : dI_x^2 d'inertie polaires

S_r : Section réduite, ($S_r = \frac{A}{k}$, k : coeff de correction).

On observe que l'intégration s'effectue sur toute la longueur du corps. Quand la fonction de l'effort n'est pas continue on fait l'intégration sur chaque intervalle de continuité ; puis on somme pour toute la longueur.

L'énergie potentielle d'une structure est la somme des énergies potentielles de toutes les éléments composant cette structure.

Dans le cas des corps à plan moyen :

$$\vec{R} = N\vec{i} + T_y\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{R}}{dx} = \frac{d\vec{R}_y}{dx} \cdot k, \quad W = \frac{1}{2} \int_{AB} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{T_y^2}{G \cdot S_y} + \frac{d\vec{R}_y^2}{EI_y} \right) dx.$$

L'expérience montre que l'on peut prendre en considération sans faire de grosse erreurs - seulement les termes donnés par les sollicitations principales, à savoir :

$d\vec{R}_y$: pour les structures planes formées des barres ;

N : pour les poutres en treillis ;

$d\vec{R}_y$ et N : pour les arcs plans ;

$d\vec{R}_y$ et $d\vec{R}_x$: pour les structures spatiales formées des barres.

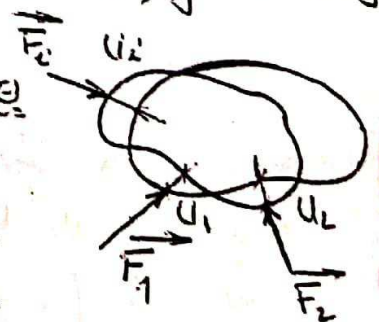
2.3.3 Expression du travail des forces extérieures.

a/ Théorème de Clapeyron.

Considérons un solide élastique (S) soumis à un système de forces $\vec{F}_i$, $i = 1, \dots, n$.

Soit U_i → déplacement du pt d'application de $\vec{F}_i$ suivant la direction.

On suppose que les forces $\vec{F}_i$ prennent des valeurs progressivement croissantes (actionnement statiquement) de la forme : $\lambda \vec{F}_i$, $0 \leq \lambda \leq 1$



de manière continue.

Pour une variation $d\lambda$ de λ , la variation du travail de la force $\lambda \vec{F}_i$, sera : $\lambda F_i \cdot d\lambda U_i$

la variation totale du travail de toutes les forces s'écrit :

$$dW_e = \sum_{i=1}^n \lambda d\lambda F_i U_i$$

$$= d\lambda \sum_{i=1}^n F_i U_i$$

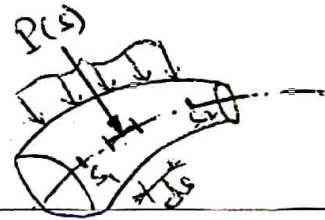
Quand λ varie de $0 \rightarrow 1$, le travail des efforts extérieurs s'écrit :

$$W_e = \sum_{i=1}^n F_i U_i \int_0^1 \lambda d\lambda$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i U_i$$

Remarque

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\lambda_i}^{\lambda_f} p(s) U(s) ds$$



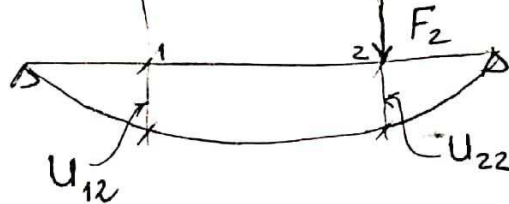
b) Théorème de Maxwell - Betti:

Soit deux états d'équilibre d'une même structure, le travail des efforts extérieurs du 1^{er} état dans les déplacements du 2^e état est égal au travail des efforts extérieurs du 2^e état dans les déplacements du 1^{er} état.

état 1 :



état 2 :



c'est à dire : $F_1 \cdot U_{12} = F_2 \cdot U_{21}$

Exemple :

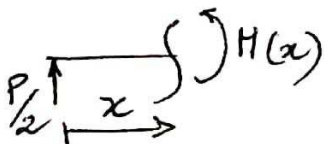
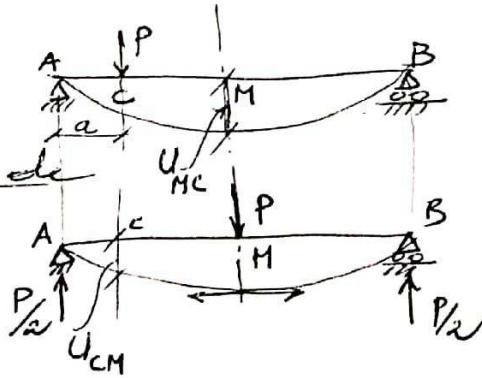
Calculer U_{MC} .

D'après le théorème de

Maxwell - Betti :

$$P \cdot U_{CH} = P \cdot U_{MC}$$

$$\Rightarrow U_{CH} = U_{MC}$$



$$M(x) = \frac{P}{2} x$$

$$EI y'' = M(x) = \frac{P}{2} x \Rightarrow EI y' = \frac{P}{2} \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\Rightarrow EI y = \frac{P}{4} \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

les conditions aux limites:

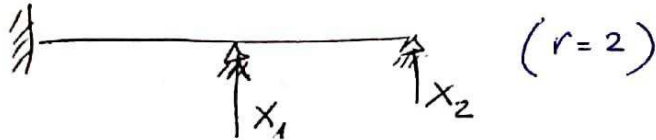
$$U(0) = 0 \Rightarrow EI y(0) = \frac{P}{12} \cdot 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$U'(\frac{l}{2}) = 0 \Rightarrow EI y'(\frac{l}{2}) = \frac{P}{4} (\frac{l}{2})^2 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{Pl^2}{16}$$

$$\Rightarrow EI y(x) = \frac{Px^3}{12} - \frac{Pl^2}{16} x \Rightarrow U_{MC} = U_{CH} = \frac{P}{EI} \left(\frac{a^3}{12} - \frac{al^2}{16} \right) = \frac{Pa}{48EI} (4a^2 - 3l^2)$$

d) Théorème de Manabréa:

Dans un système de corps élastiques, les valeurs que prennent les réactions hyperstatiques correspondant aux liaisons surabondantes minimisent l'énergie de déformation du système.



$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial X_i} = 0 \quad i = 1, \dots, r}$$

r : étant le n^{bre} d'inconnues hyperstatiques.

c) Théorème de Castigliano :

Soit un solide (E) soumis à un ensemble de n forces données. La dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à la $i^{\text{ème}}$ force $\vec{F}_i$ (indépendante des autres) est égale au déplacement algébrique u_i pris dans la direction et le sens de $\vec{F}_i$, soit :

$$\frac{\partial W}{\partial F_i} = u_i$$

De la même façon, pour un moment concentré M_i , nous avons

$$\frac{\partial W}{\partial M_i} = \theta_i$$

θ_i étant la rotation autour de l'axe du moment au point d'application du moment.

d) Méthode de Maxwell-Mohr :

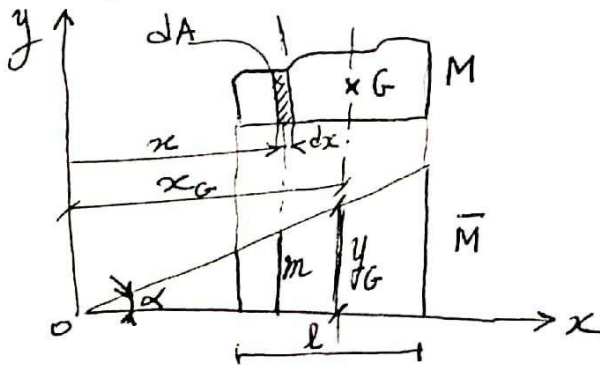
Principe de la méthode :

- 1 - On écrit les expressions et on trace les diagrammes des efforts internes N, M, T
- 2 - On applique sur la structure, dans la section et suivant la direction du déplacement recherché, une force de valeur unitaire et on écrit, on trace les diagrammes des efforts internes $\bar{N}, \bar{T}, \bar{M}$.
- 3 - On fait l'intégration des produits des fonctions, d'après l'expression suivante :

$$\Delta = \int_0^l \frac{N \bar{N}}{EA} dx + \int_0^l \frac{T \bar{T}}{G S_r} dx + \int_0^l \frac{M_f \bar{M}_f}{EI} dx + \int_0^l \frac{M_t \bar{M}_t}{G I_p} dx.$$

e) Méthode de Vereshaguine

Cette méthode permet de déterminer la valeur de l'intégral sans passer par l'opération d'intégration.



$$I = \int_l M \cdot m dx.$$

$$dA = M dx$$

$$m = x \operatorname{tg} \alpha$$

$$\Rightarrow I = \int_l x \operatorname{tg} \alpha dA = \int_l \operatorname{tg} \alpha x dA$$

$$\text{or } \int_0^l x dA = x_G \cdot A$$

$$\text{et } x_G \operatorname{tg} \alpha = y_G$$

$$\text{Donc : } I = \int_l M m dx = y_G \cdot A.$$

TD n°2

Exercice n°1 :

Soit la console de section rectangulaire ($b \times h$) soumise à l'action d'une charge concentrée P à son extrémité.



- 1) Calculer le potentiel interne en fonction de P , l , S_r et I
- 2) Evaluer l'importance relative du moment fléchissant et de l'effort tranchant pour l'application numérique suivante :

$$l = 1 \text{ m}, \quad h = b = 0,04 \text{ m}, \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \quad \nu = 0,25 \text{ (acier)}.$$

$$(k = \frac{G}{S_r}) \quad (S_r = \frac{A}{k})$$

Solution :

* Eléments de réduction :

$$\begin{cases} T = P \\ M = -P(l-x) \end{cases}$$

* Le potentiel interne a pour expression :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{T^2}{G S_r} + \frac{M^2}{E I} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{P^2}{G S_r} + \frac{P^2 (l-x)^2}{E I} \right] dx$$

$$\Rightarrow W = \underbrace{\frac{P^2 l}{2 G S_r}}_{\text{dû à } T} + \underbrace{\frac{P^2 l^3}{6 E I}}_{\text{dû à } M}$$

* Importance relative de M et T dans l'expression de W :

$$S_r = \frac{A}{k} = \frac{b h}{k} = \frac{0,04 \times 0,04}{6/5} = 0,00133 \text{ m}^2$$

$$I_z = \frac{b h^3}{12} = \frac{(0,04)^4}{12} = 0,213 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,25$$

$$\Rightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0,25)} = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$\frac{W}{T} = \frac{P^2 l}{2 G S_r} = \frac{P^2 \times 1}{2 \times 8 \cdot 10^4 \times 0,00133} = 4,7 \cdot 10^{-3} P^2$$

$$\frac{W}{M} = \frac{P^2 l^3}{6 EI} = \frac{P^2 \times 1^3}{6 \times 2 \cdot 10^5 \times 0,213 \cdot 10^{-6}} = 3,912 P^2$$

$$\frac{W/T}{W/M} = \frac{4,7 \cdot 10^{-3} P^2}{3,912 P^2} = 1,2 \cdot 10^{-3}$$

On en déduit que la part du potentiel interne due au moment fléchissant est plus importante que celle due à l'effort tranchant.

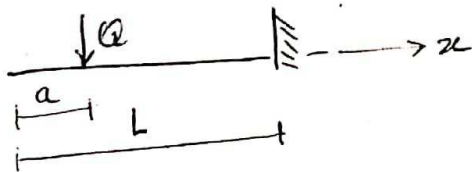
Exercice n° 2 :

On connaît l'expression de la flèche d'une poutre en porte à faux soumise à une charge P à son extrémité libre

$$y = -\frac{P}{6EI} (2L^3 - 3L^2x + x^3)$$



On demande de trouver à l'aide du th de réciprocité l'expression de la flèche à l'extrémité libre de cette poutre, lorsqu'on applique une charge Q à une distance a de cette extrémité.



Solution :

D'après le th de réciprocité de Maxwell - Betti :

$$P (U_P)_Q = Q (U_Q)_P$$

où : $(U_P)_Q$ est la flèche au pt d'application de P due à la force Q

$$\Rightarrow (U_P)_Q = \frac{Q}{P} (U_Q)_P$$

or $(U_Q)_P$ est la flèche au pt d'application de Q due à la force P

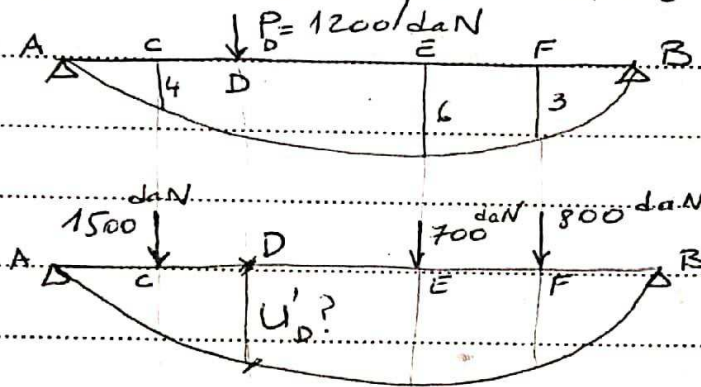
$$\Rightarrow (U_Q)_P = -\frac{P}{6EI} (2L^3 - 3L^2a + a^3)$$

$$\text{d'où : } (U_P)_Q = -\frac{Q}{6EI} (2L^3 - 3L^2a + a^3)$$

Exercice 3 : Théorème de Réciprocité de Max-well Betti

Une charge $P_D = 1200 \text{ daN}$ agissant en D, provoque des déplacements en 3 points C, E et F de 4, 6 et 3 mm respectivement.

Quel sera le déplacement en D provoqué par 3 charges agissant en C, E et F de 1500, 700 et 800 daN respectivement.



D'après le th de réciprocité de Betti-Maxwell :

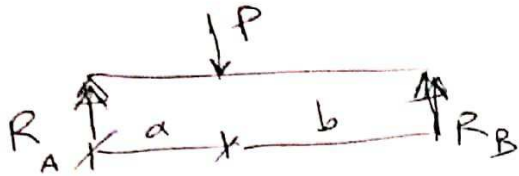
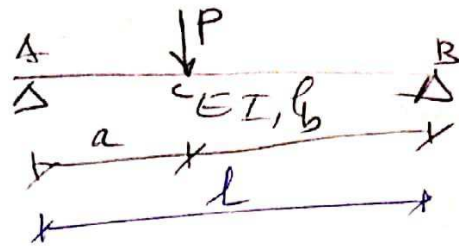
$$P_D \cdot U'_D = P'_C \cdot u_C + P'_E \cdot u_E + P'_F \cdot u_F$$

$$1200 \cdot u'_D = 1500 \cdot 4 + 700 \cdot 6 + 800 \cdot 3$$

$$u'_D = 10,5 \text{ mm}$$

Exo 4 :

Calculer l'énergie interne de la poutre



$$R_A + R_B = P$$

$$\sum M/A = 0 \Rightarrow R_B \cdot L = P \cdot a$$

$$R_B = \frac{P \cdot a}{L}$$

$$\sum M/B = 0 \Rightarrow R_A \cdot L = P \cdot b$$

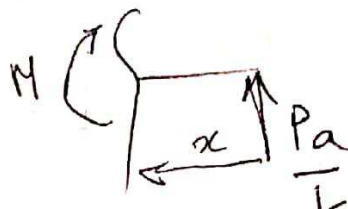
$$R_A = \frac{P \cdot b}{L}$$

Sur AC : $0 \leq x \leq a$

Free body diagram of segment AC of length x. A reaction force of $\frac{P \cdot b}{L}$ acts upwards at A. A bending moment M acts at C. The moment is given by $M = \frac{P \cdot b}{L} x$.

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^a \frac{P^2 b^2}{L^2} x^2 dx = \frac{P^2 b^2 a^3}{6EI L^2}$$

Sur CB : $a \leq x \leq L$



$$U_2 = \frac{1}{2EI} \int_a^L \left(\frac{P \cdot a}{L} x \right)^2 dx$$

$$U_2 = \frac{1}{2EI} \frac{P^2 a^2 b^3}{L^2 \cdot 3} = \frac{P^2 a^2 b^3}{6EI L^2}$$

$$U = U_1 + U_2 = \frac{P^2 a^3 b^2}{6EI L^2} + \frac{P^2 a^2 b^3}{6EI L^2}$$

$$= \frac{P^2 a^2 b^2}{6EI L^2} (a+b) = \frac{P^2 a^2 b^2}{6EI L}$$

Exo 5: (th. de Castigliano)

Déterminer la flèche au milieu M de la poutre AB.

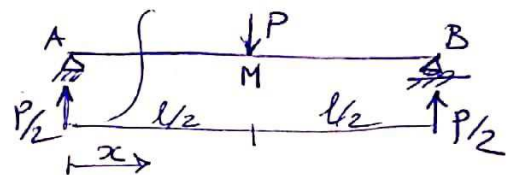
$0 \leq x \leq l/2$:

$$M(x) = \frac{P}{2} x ; \quad \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{x}{2}$$

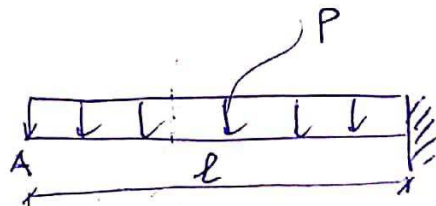
$$u_M = \frac{\partial W}{\partial P} = \int_A^B \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx = 2 \int_0^{l/2} \left(\frac{P/2 x}{EI} \right) \left(\frac{x}{2} \right) dx \quad (\text{symétrie})$$

$$u_M = \frac{P}{2EI} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{l/2} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

$$\boxed{u_M = \frac{Pl^3}{48EI}}$$



Exo 6: (th. de Castigliano)
Déterminer la flèche en A.



On applique une force fictive en A, qu'on fera tendre vers 0 (th. de la force évanescente).

$$M(x) = -\phi x - \frac{Px^2}{2} \quad \phi \downarrow \quad \uparrow M(x)$$

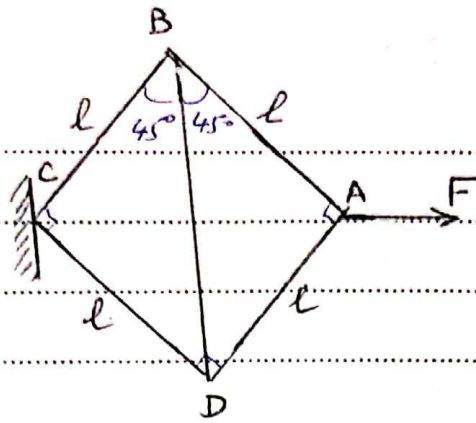
$$\frac{\partial M}{\partial \phi} = -x$$

$$u_A = \int_0^l \frac{(-\phi x - \frac{Px^2}{2})}{EI} (-x) dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\phi x^2 + \frac{Px^3}{2} \right) dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{\phi x^3}{3} + \frac{Px^4}{24} \right]_0^l$$

$$u_A = \frac{1}{EI} \left[\cancel{\frac{\phi l^3}{3}} + \frac{Pl^4}{8} \right] \Rightarrow \boxed{u_A = \frac{Pl^4}{8}}$$

Exercice 7: (th. de Castigliano)

Treillis



Un treillis de forme carrée est constitué de barres ayant la même section S (figure).
Calculer le déplacement horizontal en A.

noeud A :

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\rightarrow N_{AB} = N_{AD} \\ \sum F_x = 0 &\rightarrow 2 N_{AB} \cos 45^\circ = F \\ N_{AB} &= \frac{F}{2 \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{F}{\sqrt{2}} = \frac{F\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$N_{AB} = N_{AD} = \frac{F\sqrt{2}}{2}$

noeud B :

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\rightarrow N_{BC} = \frac{F\sqrt{2}}{2} \\ \sum F_y = 0 &\rightarrow N_{BD} + 2 \frac{F\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ N_{BD} &= -F \end{aligned}$$

$N_{BD} = -F$

Vue la symétrie :

$N_{AB} = N_{AD} = N_{BC} = N_{CD} = \frac{F\sqrt{2}}{2}$

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \frac{N_i^2 l_i}{E_i S_i}$$

$$S_i = S, \quad E_i = E$$

$$W = \frac{1}{2ES} \left[4 \left(\frac{F\sqrt{2}}{2} \right)^2 l + (-F)^2 \sqrt{2} l \right]$$

$$W = \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right) \frac{F^2 l}{ES}$$

$$u_A = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{2(2 + \sqrt{2}) Fl}{2ES}$$

$$u_A = (2 + \sqrt{2}) \frac{Fl}{ES}$$

Autre alternative (sans calculer W)

$$u_A = \frac{\partial W}{\partial F} = \sum_i \frac{N_i}{ES_i} \frac{\partial N_i}{\partial F} l_i$$

$$u_A = \frac{1}{ES} \left[\frac{F\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \times 4l + (-F)(-1) \times \sqrt{2}l \right]$$

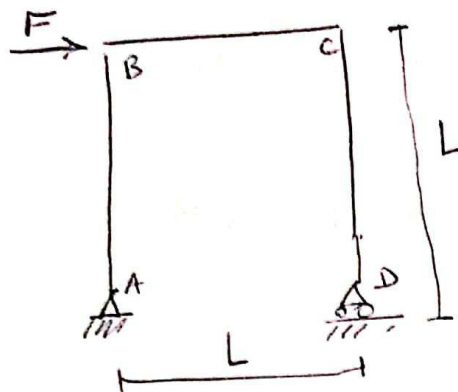
$$u_A = \frac{1}{ES} [2Fl + \sqrt{2}Fl]$$

$$u_A = (2 + \sqrt{2}) \frac{Fl}{ES}$$

Méthode de Maxwell - Mohr

Exercice : Portique isostatique.

Données :

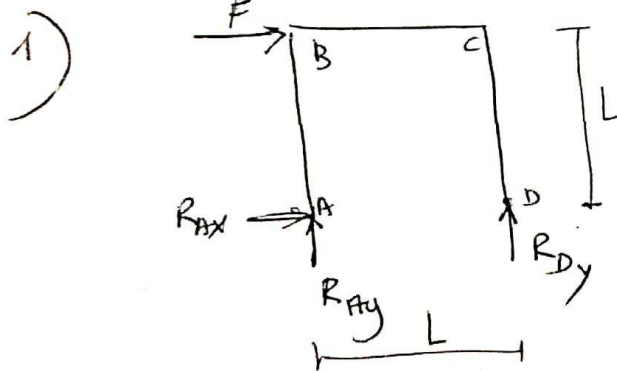


$$L = 4 \text{ m}, F = 500 \text{ daN}, E = 210 \text{ GPa}$$

$$I = 3,89 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

1. Tracer les diagrammes N, M, T .
 2. Calculer le dpt horizontal en D, u_D .
 3. Calculer la rotation en A, ω_A .
- (Utiliser la méthode de Maxwell - Mohr)

Solution :



$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_{Ax} + F = 0$$

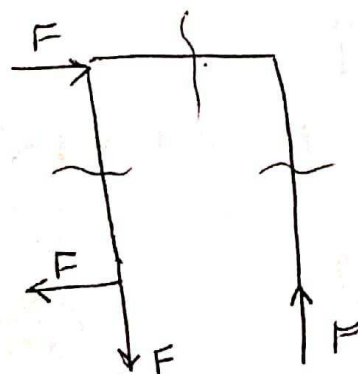
$$\Rightarrow \boxed{R_{Ax} = -F = -500 \text{ daN}}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_{Ay} + R_{Dy} = 0$$

$$\sum M/A = 0 \rightarrow R_{Dy} L - F L = 0$$

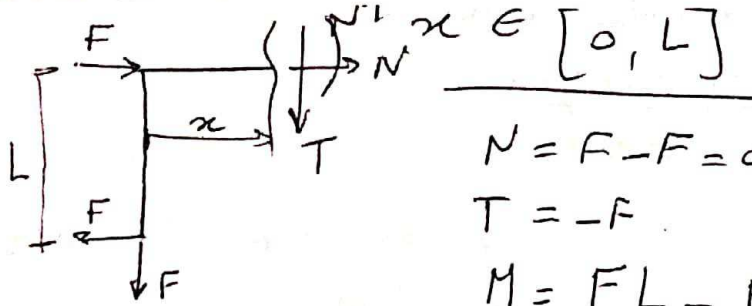
$$\Rightarrow \boxed{R_{Dy} = F}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{Ay} = -R_{Dy} = -F}$$



$y \in [0, L] : N = F$
 $T = F$
 $M - Fy = 0$
 $\Rightarrow M = F \cdot y$

$y = 0 \rightarrow M = 0$
 $y = L \rightarrow M = FL$



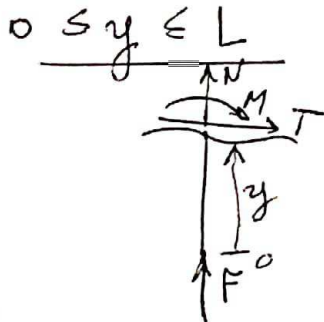
$$N = F - F = 0$$

$$T = -F$$

$$M = FL - Fx$$

$$x=0 \rightarrow M = FL$$

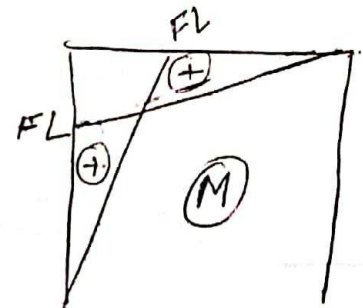
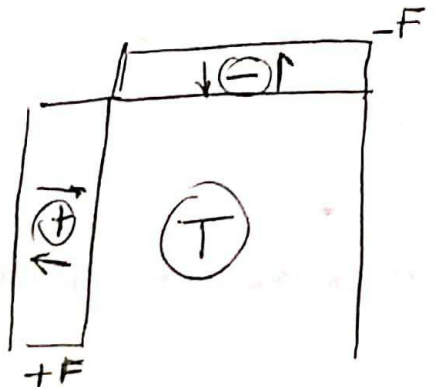
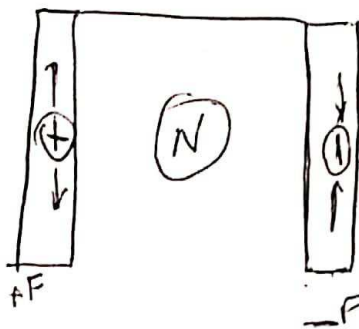
$$x=L \rightarrow M = 0$$



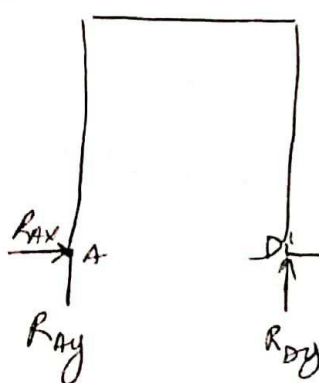
$$N = -F$$

$$T = 0$$

$$M = 0$$



Déplacement en D: (u_D)

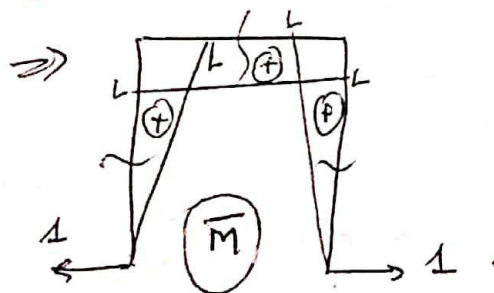


$$\sum F_y = 0: R_{Ay} + R_{Dy} = 0$$

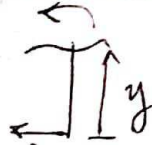
$$\sum F_x = 0: R_{Ax} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow R_{Ax} = -1$$

$$\sum M_A = 0: R_{Dy} L = 0 \rightarrow R_{Dy} = 0 \Rightarrow R_{Ay} = 0$$



$$y \in [0, L]$$



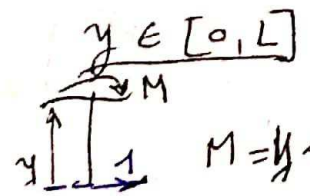
$$M = 1 \cdot y = y$$

$$M = L$$

$$x \in [0, L]$$



$$M = L$$



$$M = y$$

$$U_D = \int \frac{M \bar{M}}{EI} dx$$

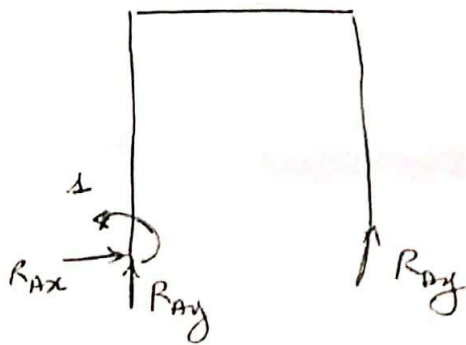
$$= \int_0^L \frac{Fy \cdot y}{EI} dy + \int_0^L \frac{(FL - Fx)L}{EI} dx + \int_0^L \frac{0 \times y}{EI} dy$$

$$= \frac{FL^3}{3EI} + \frac{FL^3}{EI} - \frac{FL^3}{2EI} = \frac{5FL^3}{6EI}$$

$$U_D = \frac{5FL^3}{6EI}$$

AN: $U_D = \frac{5 \times 5000(4)^3}{6(210) \cdot 10^9 \times 3,89 \cdot 10^{-5}} = 0,0326 \text{ m} = 3,26 \text{ cm}$

3) Rotation en A :

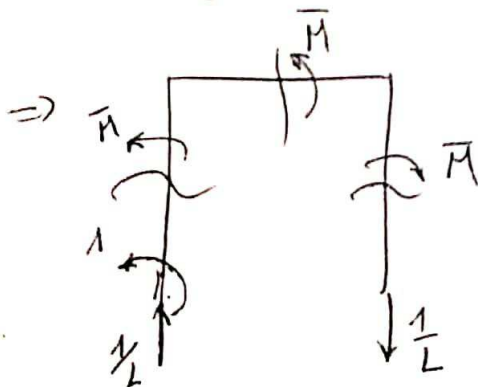


$$R_{Ax} = 0$$

$$R_{Ay} + R_{By} = 0$$

$$1 + R_{By}L = 0 \rightarrow R_{By} = -\frac{1}{L}$$

$$\Rightarrow R_{Ay} = \frac{1}{L}$$



$$y \in [0, L]$$

$$\bar{M} = -1$$

$$x \in [0, L]$$

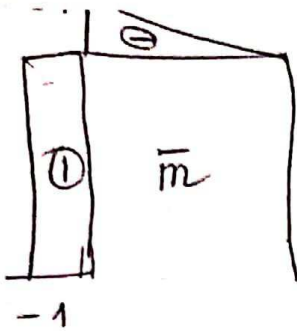
$$\bar{M} + 1 - \frac{1}{L}x = 0$$

$$\Rightarrow \bar{M} = -1 + \frac{x}{L}$$

$\left\{ \begin{array}{l} x=0 \rightarrow \bar{M} = -1 \\ x=L \rightarrow \bar{M} = 0 \end{array} \right.$

$$y \in [0, L] :$$

$$\bar{M} = 0$$



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \omega_A &= \int \frac{M \bar{m}}{EI} dx \\
 &= \int_0^L \frac{F_y (-1)}{EI} dy + \int_0^L \frac{(FL - Fx) (-1 + \frac{x}{L})}{EI} dx + 0 \\
 &= - \frac{F y^2}{2EI} \Big|_0^L - F \int_0^L \frac{(x-L)(x-L)}{EIL} dx \\
 &= - \frac{FL^2}{2EI} + \frac{F}{L} \frac{(x-L)^3}{3EI} \Big|_0^L = - \frac{FL^2}{2EI} + \frac{FL^2}{3EI}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\omega_A = - \frac{5}{6} \frac{FL^2}{EI}}$$

AN :

$$\omega_A = - \frac{5}{6} \frac{5000 (4)^2}{210 \cdot 10^9 \cdot 3,89 \cdot 10^{-5}} = -8,15 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$