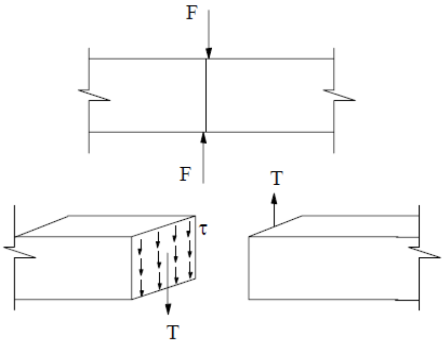
Le cisaillement pur

Définition de la force de cisaillement

Une section droite d'une poutre est sollicitée au cisaillement pur si les éléments de réduction au centre de la section transversale G sont : $\begin{Bmatrix} R \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T \\ 0 \end{Bmatrix}$

Contrainte de cisaillement

On considère le cas d'un tronçon de poutre à deux forces comme le montre la figure
On a l'effort tranchant: T = F



La distribution des contraints sera considérée uniforme sur le plan de la section
Ainsi l'expression :

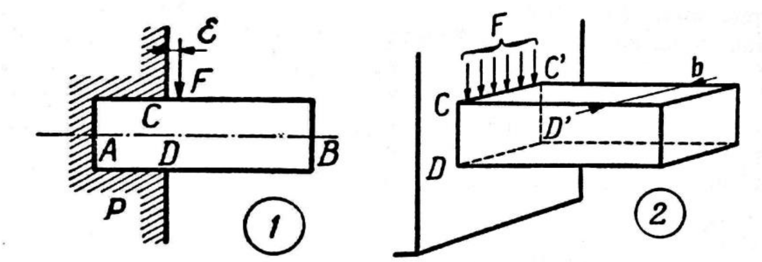
$$\tau = \frac{F}{A}$$

τ : Contrainte de cisaillement moyenne pour la surface considérée.
A : l'aire de la section droite
En réalité les contraintes tangentielles ne sont pas uniformément réparties sur le plan de la section car elles s'annulent aux voisinages des faces supérieures et inférieures d'après la loi de parité.

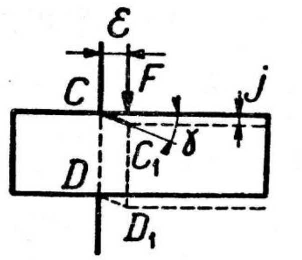
Déformations de cisaillement

Essai de cisaillement

On considère une poutre parfaitement encastrée et on applique une force F uniformément réparti dans le plan de la section droite de l'encastrement.
En réalité il est à peu prés impossible d'exercer la force F rigoureusement dans le plan d'encastrement, cette force est donc appliquée à une distance Δx du plan d'encastrement.



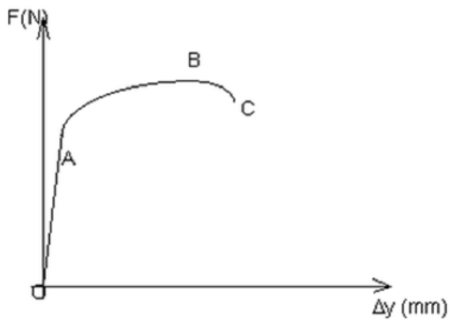
La force F est exercée lentement, son intensité croissant régulièrement à partir de zéro.



La section $C_1 D_1$ se déplace dans son plan parallèlement à la section CD. Ce déplacement peut être observé par la mesure de la dénivellation Δy. Si on admet que CC_1 est rectiligne, la déformation peut se définir par l'angle γ qui dépend à la fois de la dénivellation Δy et de l'intervalle Δx :

$$tan\gamma = \gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

γ : Angle de glissement ou glissement relatif.
Si on trace un diagramme donnant pour chaque valeur de F la valeur de Δy, on obtient une courbe OAB qui comporte une partie rectiligne OA. L'allure générale de la courbe est analogue à celle obtenue pour la traction et la compression. Tant que la force F reste inférieure à FA, on constate que Δy et F sont proportionnels.



En déformation élastique, la contrainte de cisaillement τ varie linéairement en fonction de
γ l'angle de glissement , on introduit alors le module de cisaillement G telle que :

$$\tau = G\gamma$$

$$G = \gamma = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

μ: étant le coefficient de Poisson

Calcul de résistance en cisaillement pur

Le calcul de cisaillement pur consiste à déterminer la contrainte tangentielle τ_{max} dans l'élément le plus sollicité et comparer cette valeur avec la contrainte admissible. La condition de résistance au cisaillement s'écrit sous la forme:

$$\tau \leq \tau_{adm}$$

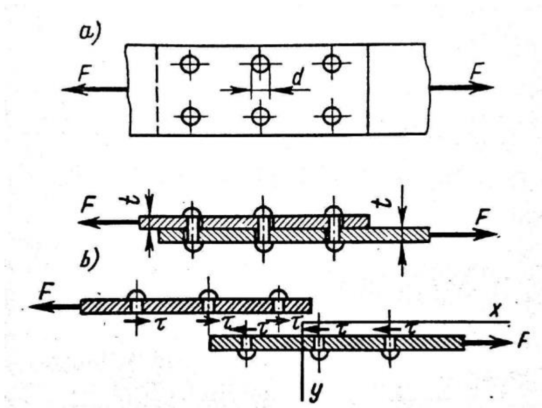
La contrainte de cisaillement admissible est déterminée en fonction de la contrainte normale admissible qui est une caractéristique du matériau.

$$\tau_{adm} = 0.6 \text{ à } 0.8\sigma_{adm}$$

Application aux assemblages par rivets

Les assemblages par rivets sont considérés comme étant des exemples en cisaillement pur.

Si chaque rivet est cisaillé suivant un plan, on dit que le rivetage est monocisaillé.



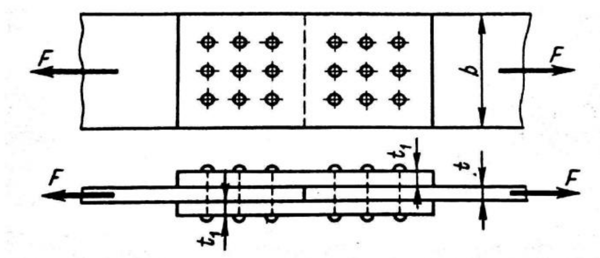
On admet que sous l’action d’une charge statique l’effort tranchant dans chaque rivet vaut

$T = \frac{F}{n}$

F : force subie par l’assemblage

n : nombre de rivets

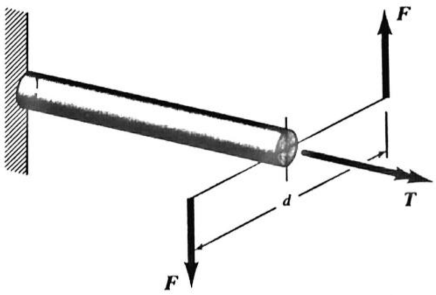
Si la sollicitation est subie suivant deux plans, on dit que l’assemblage est bicisaillé.



La torsion

Définition de la torsion

On considère une barre rigide encastrée à une extrémité et tordue à l'autre par un couple de torsion (moment de torsion) M_t=F.d appliqué dans un plan perpendiculaire à l'axe de la barre. Une telle barre est en torsion.



Construction des diagrammes des moments de torsion

Le moment de torsion se détermine par la méthode des sections. La valeur du moment de torsion M_t dans une section droite arbitraire de la barre est égale à la somme algébrique des moments de tous les couples extérieurs (concentrés M et distribués suivant la longueur d'intensité m), agissant autour de l'axe géométrique de la barre et appliqués à l'une des parties isolées par cette section. La formule générale donnant la valeur du moment de torsion dans une section arbitraire de la barre est de la forme:

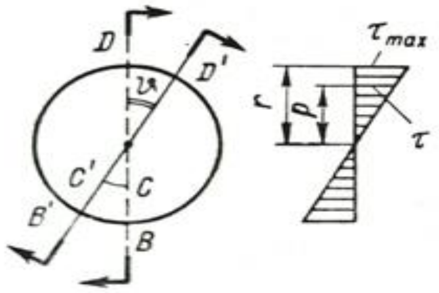
$$M_t = \sum M + \sum \int m dx$$

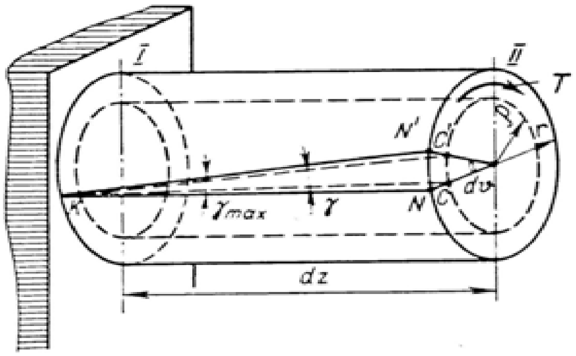
L'intégrale s'étend à la longueur de chaque partie de la barre, soumise à des couples répartis, la sommation à toutes les parties se trouvant d'un côté de la section considérée.

Par convention, on admet que le moment de torsion du côté de la normale extérieure à la section est positif, s'il est dirigé dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Détermination des contraintes pour les barres à section droite circulaire

Sous l'effet du moment de torsion M_t, la section droite subit une rotation $d\theta$ dans son plan. On admet la conservation des sections planes dans le plan.





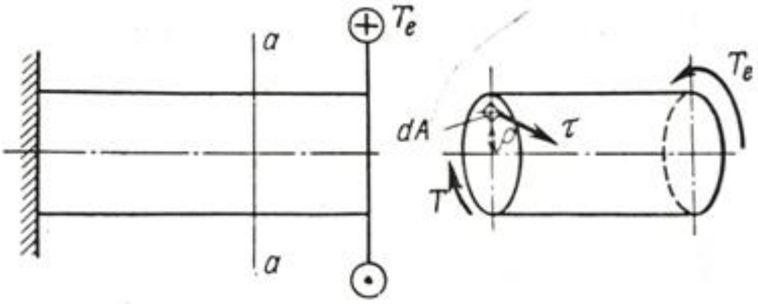
En extrayant de la partie envisagée de la barre un cylindre de rayon arbitraire r , on obtient l'angle de cisaillement de l'élément à la distance r de l'axe :

$$\gamma = r\frac{d\theta}{dx}$$

En vertu de la loi de Hooke, on a pour le cisaillement

$$\tau = G\gamma = Gr\frac{d\theta}{dx}$$

On voit qu'en torsion la déformation de cisaillement et les contraintes tangentielles sont directement proportionnelles à la distance jusqu'au centre de gravité de la section.
Au centre de gravité d'une section circulaire les contraintes tangentielles sont nulles.
Elles sont maximales aux points de la section voisins de la surface de la barre.
Le moment de torsion est la résultante du moment des contraintes tangentielles subies par la section.



$$M_t = \int_A \tau r dA$$

Où τrdA est le moment de torsion élémentaire des forces intérieures appliquées à l'aire dA.
En remplaçant la valeur des contraintes, on obtient

$$M_t = G\frac{d\theta}{dx}\int_A r^2 dA$$

En tenant compte que

$$\int_A r^2 dA = I_p$$

Où I_p est le moment d'inertie polaire de la section, il vient

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M_t}{GI_p}$$

En portant la valeur de $\frac{d\theta}{dx}$ dans la formule l'expression de la contrainte on obtient :

$$\tau = \frac{M_t r}{I_p}$$

Cette formule montre qu'aux points équidistants du centre de la section les contraintes τ sont égales. Les contraintes sont maximales aux points du contour de la section

$$\tau_{max} = \frac{M_t R}{I_p} = \frac{M_t}{W_p}$$

Où $\quad W_p = \frac{I_p}{R}$

La caractéristique géométrique W_p est le couple de résistance polaire ou le couple de réaction à la torsion.
Pour une section circulaire pleine, on a

$$W_p = \frac{I_p}{R} = \frac{\pi d^4}{32\, {}^{d}\!/_{2}} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0.2d^3$$

Pour une section circulaire annulaire, on a

$$W_p = \frac{2I_p}{D} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi D^3}{16}(1 - c^4) \approx 0.2D^3(1 - c^4)$$

Ou c=d/D

Condition de résistance à la torsion

La condition de résistance à la torsion est de la forme

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} \leq \tau_{adm}$$

τ_{adm} la contrainte tangentielle admissible.

A partir de la condition de résistance on peut calculer le diamètre de la barre comme suit :

$$d = \sqrt[3]{M_t/(0.2\tau_{adm})}$$

On peut calculer également le moment de torsion admissible :

$$M_{tadm} = W_p \tau_{adm}$$

Déformation et déplacement des barres en torsion

Pour déterminer les déformations d'une barre soumise à la torsion on applique la formule suivante :

$$d\theta = \frac{M_t dx}{GI_p}$$

La déformation de la barre sur la longueur x vaut :

$$\theta = \int_0^x \frac{M_t dx}{GI_p}$$

GI_p: rigidité de la barre à la torsion

Si le moment de torsion et la rigidité de la barre à la torsion, sont constantes dans tous le domaine de l'intégration.

$$\theta = \frac{M_t x}{GI_p}$$

Pour une barre de longueur l, on obtient :

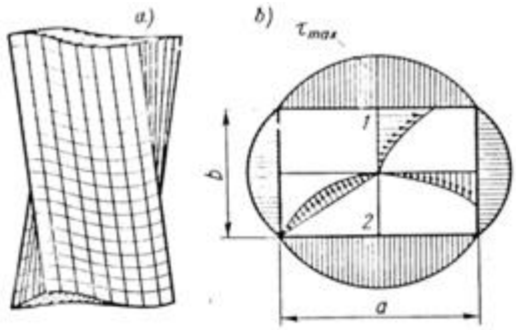
$$\theta = \frac{M_t l}{GI_p}$$

Et l'angle de torsion relatif vaut :

$$\gamma = \frac{\theta}{l} = \frac{M_t}{GI_p}$$

La torsion des barres de sections non circulaires

Dans les barres de section non circulaire sollicitées à la torsion, les sections ne restent pas planes et sont gauchies (fig a).



Pour des barres de section non circulaire la détermination des contraintes tangentielles est un problème assez compliqué, résolu par les méthodes de la théorie de l'élasticité. Voici les résultats principaux pour les barres de section rectangulaire avec a > b (fig b). Les contraintes tangentielles maximales apparaissent aux points 1 et 2, c'est-à-dire au milieu des côtés longs.

.

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\alpha a b^2} = \frac{M_t}{W_t}$$

l'angle de torsion :

$$\theta = \frac{M_t l}{G \beta a b^3} = \frac{M_t l}{G I_t}$$

α et β sont des coefficients qui dépendent des rapports entre les côtés. Leurs valeurs sont consignées sur le tableau suivant :

a/b	1	2	3	4	5	10	20	∞
α	0.21	0.25	0.27	0.28	0.29	0.31	0.32	0.33
β	0.14	0.23	0.26	0.28	0.29	0.31	0.32	0.33

Les quantités $W_t = \alpha a b^2$ et $I_t = \beta a b^3$ sont respectivement les caractéristiques géométriques de la résistance et de la rigidité à la torsion de la barre de section rectangulaire