

1.1 Introduction

Depuis une vingtaine d'années, encouragées par l'augmentation exponentielle de la puissance de calcul des ordinateurs et une diminution identique des coûts d'accès et de mise en œuvre, les méthodes numériques ont connu un développement très important dans les bureaux d'études et les centres de recherches en géotechnique. Leur utilisation est aujourd'hui très courante et la conception de grands projets passe forcément par des analyses de ce type afin de vérifier la stabilité des ouvrages en interaction avec leur environnement, de contrôler que les valeurs des déplacements et des contraintes soient admissibles et d'aider au dimensionnement des structures. Il existe plusieurs types de méthodes numériques parmi lesquelles on citera :

Les méthodes de type "éléments limites" (*Boundary methods*), pour lesquelles l'intérieur de la masse rocheuse ou du sol est représenté mathématiquement comme un milieu continu infini ou fini suivant que la frontière est ouverte ou fermée ;

- les méthodes des domaines (*Domain methods*), pour lesquelles l'intérieur de la masse rocheuse ou du sol est divisé en éléments géométriques simples, chacun étant doté de propriétés géométriques et mécaniques. Le comportement collectif et l'interaction de ces éléments modélisent le comportement global et plus complexe de la masse.

Parmi les méthodes des domaines, les plus couramment utilisées sont :

- les méthodes des éléments finis et **différences finies**, qui traitent les milieux comme un milieu continu ;
- la méthode des éléments distincts, qui modélise chaque bloc du massif comme un élément unique.

On s'intéresse dans cette étude à la présentation de la méthode des différences finies sur laquelle le code FLAC itasca se base.

1.2 Définition de dérivée d'une fonction d'une seule variable

Soit y une fonction définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ et soit x_0 tel que :

$x_0 \in [a, b]$, ou bien $a < x_0 < b \Rightarrow y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$

$$\Rightarrow \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - y_0 = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Sachant que la dérivée $y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Application. 1.1

Trouver la dérivée de la fonction $f(x) = x^2$

-calculer la valeur de $f'(x_0)$ au point $x_0 = 1$

Solution :

$$*f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x$$

* $f'(x_0) = f'(1) = 2(1) = 2$

1.3 Développement des fonctions en séries entières

Soit la fonction $f(x)$ et ses dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(n)}(x)$

Il est possible que cette fonction soit représentée sous la forme d'une série de Taylor :

$$f(x) = f(a) + f'(a) \frac{(x-a)}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!} + R_n(x) \quad (1.1)$$

Pour $n \rightarrow \infty \Rightarrow R_n(x) = 0$

Et l'expression (2.1) devient :

$$f(x) = f(a) + f'(a) \frac{(x-a)}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}$$

Cette série est appelée série de Taylor

Application. 1.2

Développer en série de Taylor la fonction $f(x) = 2^x$ au point $x = 0$

$$f(x) = 2^x \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = 2^x \ln 2 \Rightarrow f'(0) = \ln 2$$

$$f''(x) = 2^x \ln^2 2 \Rightarrow f''(0) = \ln^2 2$$

$$f'''(x) = 2^x \ln^3 2 \Rightarrow f'''(0) = \ln^3 2$$

....

$$f^{(n)}(x) = 2^x \ln^n 2 \Rightarrow f^{(n)}(0) = \ln^n 2 \quad 0 < \ln 2 < 1$$

$$2^x = 1 + \frac{\ln 2}{1!} x + \frac{\ln^2 2}{2!} x^2 + \frac{\ln^3 2}{3!} x^3 + \cdots$$

1.4 Équation différentielles à dérivées partielles (EDP)

L'équation (2.2) est exemple d'une EDP :

$$a(x, y, z, t)U_t + b(x, y, z, t)U_{yy} = f(x, y, z, t) \quad (1.2)$$

Où x, y, z, t sont des variables indépendants, souvent expriment le temps et l'espace.

a, b, c et f sont des fonctions à variables indépendants. Les dérivées partielles de ces fonctions sont dénotées comme suite :

$$U_t = \frac{\partial U}{\partial t}; \quad U_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad U_{yy} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}; \quad U_{zz} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

L'ordre d'une EDP est l'ordre le plus élevé de ses dérivées. Une EDP est dite linéaire si U et toutes ces dérivées sont de la première puissance seulement, l'équation (1.2) est de second ordre.

La dimension d'une EDP est le nombre de variables spatiales indépendantes que contienne. L'équation (1.2) est à deux dimensions si x et y sont des variables spatiales.

1.5 Solution d'une équation différentielle à dérivées partielles

La solution d'une EDP consiste à trouver la fonction inconnue U . Une solution analytique (exacte) d'une EDP est une fonction qui satisfait EDP et également satisfait n'importe qu'elle limite ou condition initiale données avec l'EDP.

La plupart des EDP ne possèdent pas une solution analytique, d'où une **procédure numérique** doit être utilisée pour trouver une **solution approximative**. Cette approximation est faite via une programmation numérique.

La méthode des différences finies (MDF) consiste à remplacer toutes ces dérivées partielles dans l'EDP par des approximations. Après quelques manipulations mathématiques, un schéma de différences finies est créé, à partir duquel une solution approximative est obtenue.

1.5.1 Conditions initiales et conditions aux limites

Les EDPs requièrent leurs propres conditions initiales (ICs) et celles aux limites (BCs) pour mieux éclaircir le problème posé.

- si plusieurs conditions sont spécifiées, alors il n'y aura pas une solution de l'EDP ;
- si peu de conditions sont spécifiées, la solution ne sera pas unique ;
- si les ICs/BCs sont spécifiées dans un mauvais lieu ou dans un mauvais instant, la solution ne dépendra largement aux ICs/BCs et une petite erreur dans les ICs/BCs entraîne un large changement dans la solution.

1.6 Principe de la méthode des différences finies

La MDF consiste à approximer les dérivées des équations de la physique moyennant le développement de Taylor. Elle est le résultat des travaux de recherches de plusieurs chercheurs du 18^{ème} siècle (Euler, Taylor, Leibniz...)

Cette méthode consiste à discréteriser (diviser) un domaine L en n domaines de pas h ou $h = \Delta x$ (Fig. 2.1).

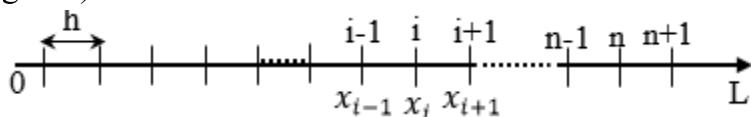


Fig 1.1 Discréterisation du domaine unidirectionnel L

Physiquement, une dérivée représente le taux de variation (changement) d'une quantité physique, représentée par une fonction subordonnée par la variation de ses variables.

La fonction $U(x)$ est graphiquement présentée avec des fonctions évaluées aux trois consécutives variables x_i comme celle indiquée sur la Fig. 2.2

U_{i+1} à x_{i+1} ;

U_i à x_i ;

U_{i-1} à x_{i-1} ; Avec $\Delta x = h$,

Tant que : $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ et $x_{i-1} = x_i - \Delta x$

$$\Rightarrow \frac{dU(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} \approx \frac{\Delta U}{\Delta x} \quad (1.3)$$

L'équation (1.3) montre que le différentiel $\frac{dU(x)}{dx}$ est presque égal à la différence $\frac{\Delta U}{\Delta x}$

$\left(\frac{dU(x)}{dx} \approx \frac{\Delta U}{\Delta x}\right)$. Cette équation traduit le principe des différences finies. Il est important d'être conscient de l'effet des pas de calcul Δx soit minime que possible, pour avoir des valeurs si proches entre le différentiel $\frac{dU(x)}{dx}$ et la différence $\frac{\Delta U}{\Delta x}$ de la fonction $U(x)$

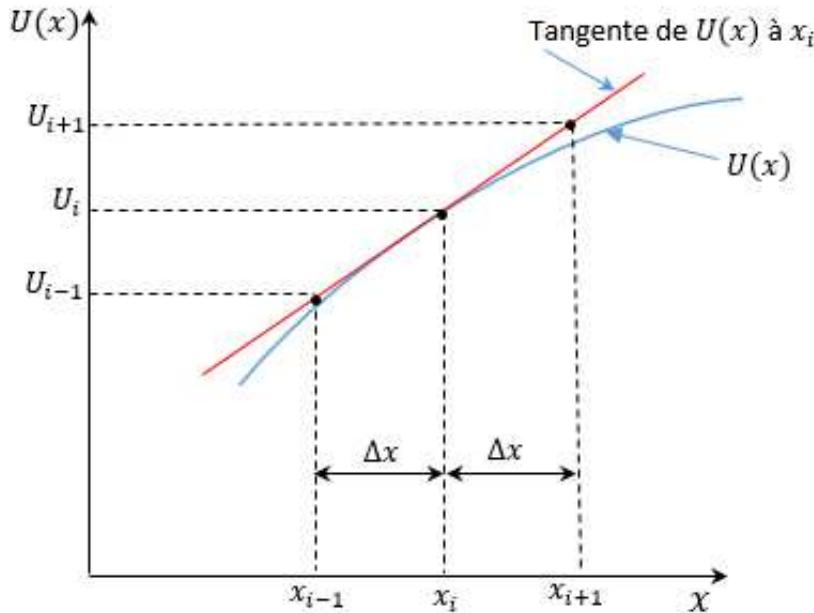


Fig 1.2 Représentation graphique de l'évaluation d'une fonction

1.6.1 Notation indicelle

Considérons un domaine unidirectionnel où l'on souhaite déterminer une grandeur $U(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. La recherche d'une solution discrète de la grandeur U amène à constituer un maillage de l'intervalle de définition. Pour ce faire, on considère un maillage (grille de calcul) composé de $N + 1$ points x_i pour $i = 0, 1, 2, \dots, N$, régulièrement espacés d'un pas Δx . Les points $x_i = i\Delta x$ sont appelés **nœuds** de maillage.

- on note U_i valeur discrète de $U(x)$ au point x_i , soit $U_i = U(x_i)$, de même pour la dérivée de $U(x)$ au nœud x_i

1.7 Approximation par différences finies d'une dérivée

$$U(x_0 + h) = U(x_0) + \frac{h}{1!} U_x(x_0) + \frac{h^2}{2!} U_{xx}(x_0) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} U_{n-1}(x_0) \quad (1.4)$$

$$\text{Où } U_x = \frac{dU}{dx}, U_{xx} = \frac{d^2U}{dx^2}, \dots, U_{n-1} = \frac{d^{n-1}U}{dx^{n-1}}$$

$U(x_0)$: est la dérivée première de la fonction U à $x = x_0$

L'interprétation usuelle du théorème de Taylor dit que si nous disposons de la valeur de U et ses dérivées au point x_0 , alors on peut écrire l'équation 1.4 pour une valeur à un point proche $(x_0 + h)$. En réarrangeant l'équation 1.4, on obtient :

$$U_x(x_0) = \frac{U(x_0+h) - U(x_0)}{h} + \theta(h), \text{ en négligeant le terme } \theta(h) \text{ on trouve :}$$

$$U_x(x_0) = \frac{U(x_0+h)-U(x_0)}{h} \quad (2.5)$$

L'équation 2.5 est appelée approximation du 1^{er} ordre par différences finies de $U_x(x_0)$. h est appelé la taille de pas (step size), il toujours positif ($h > 0$) .

Application. 1.3

Soit la fonction simple U , telque $U(x) = x^2$. Trouver la première approximation de dérivée $U_x(3)$, en utilisant un pas de calcul $h = 0.1$.

Solution :

De l'équation 2.5, l'approximation du 1^{er} ordre par différences finies de $U(x)$ est :

$$U_x(x_0) = \frac{U(x_0+h)-U(x_0)}{h}, \text{ en substituant dans } U(x).$$

$$U_x(x_0) = \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}, \text{ en remplaçant } x_0 \text{ par } 3 \text{ et } h = 0.1 \text{ on aura :}$$

$$U_x(3) = \frac{(3+0.1)^2-3^2}{0.1} = 6.10, \text{ or la solution analytique (exacte) donne :}$$

$U_x(3) = 2x = 2(3) = 6.0$, d'où l'erreur dans cette approximation donne :

$$\text{Erreur} = 6.1 - 6.0 = 0.1$$

- Répétons le problème avec $h = 0.05$, on obtient : $U_x(3) = \frac{(3+0.05)^2-3^2}{0.05} = 6.05$ et l'erreur sera $6.05 - 6.0 = 0.05$. en conséquence l'équation 2.5 est du premier ordre, donc l'erreur doit être proportionnelle à h .

1.8 Schémas des différences finies

Il existe trois façons d'exprimer les différentielles d'une fonction $U(x)$:

1.8.1 Schéma de différences « Avant »

Dans ce cas nous évaluons le taux de changement des valeurs de la fonction $U(x)$ entre l'actuel pas à x_i et la valeur de la fonction au pas en avant $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ (Fig. 1.3). L'expression de la dérivée première de la fonction $U(x)$ est :

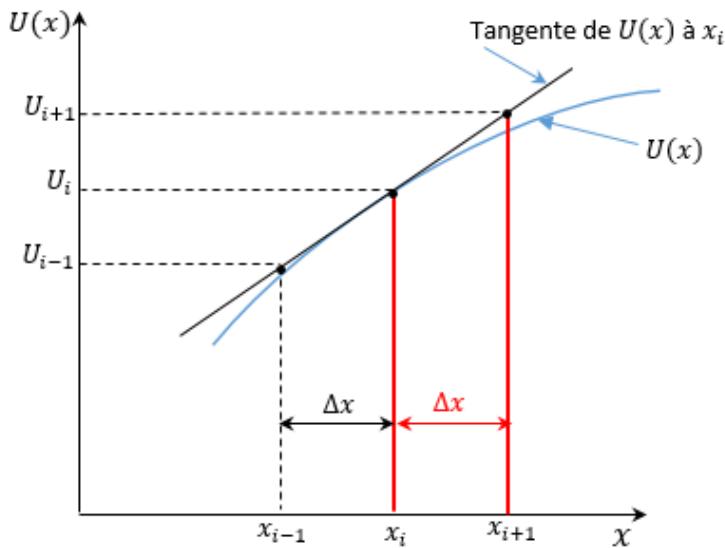
$$\nabla U_i = \frac{dU(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} \approx \frac{\Delta U}{\Delta x} \Big|_{x=x_i} = \frac{U_{i+1}-U_i}{\Delta x} = \frac{U_{i+1}-U_i}{h}, \text{ par analogie on peut écrire :}$$

$$\nabla U_{i+1} = \frac{U_{i+2}-U_{i+1}}{h} \text{ et } \nabla U_{i+2} = \frac{U_{i+3}-U_{i+2}}{h}, \dots$$

- La dérivée du second ordre de la fonction $U(x)$ à x_i peut être dérivée comme suite :

$$\nabla^2 U_i = \frac{d}{dx} \left(\frac{d(U)}{dx} \right) \Big|_{x=x_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\nabla U_{i+1}-\nabla U_i}{\Delta x} \approx \frac{\nabla U_{i+1}-\nabla U_i}{\Delta x} = \frac{\nabla U_{i+1}-\nabla U_i}{h} = \frac{\frac{U_{i+2}-U_{i+1}}{h} - \frac{U_{i+1}-U_i}{h}}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \nabla^2 U_i = \frac{U_{i+2}-2U_{i+1}+U_i}{h^2}$$

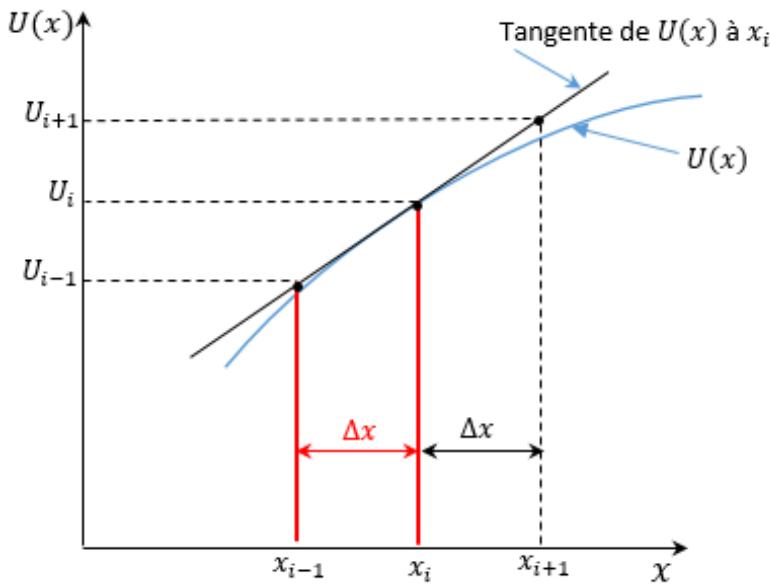
**Fig 1.3** Représentation graphique du schéma de différences ''avant''**1.8.2 Schéma de différences « Arrière »**

Dans ce cas nous évaluons le taux de changement des valeurs de la fonction $U(x)$ entre l'actuel pas à x_i et le pas en arrière $x_{i-1} = x_i - \Delta x$ (Fig. 2.4). Mathématiquement nous allons avoir le résultat suivant :

$$\nabla U_i = \frac{dU(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x} \approx \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x} = \frac{U_i - U_{i-1}}{h}$$

Et la dérivée du second ordre sera comme suite :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \nabla^2 U_i = \frac{U_i - 2U_{i-1} - U_{i-2}}{h^2}$$

**Fig 1.4** Représentation graphique du schéma de différences ''Arrière''

1.8.3 Schéma de différences « Centré »

Le taux de variation de la fonction $U(x)$ est compris entre le pas en arrière : $x_i - \Delta x$ et celui du pas en avant $x_i + \Delta x$ (Fig. 2.5). L'expression d schéma de différences centré est comme suite

$$\nabla U_i = \frac{dU(x)}{dx} \Big|_{x=x_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta x} \approx \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta x} = \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}$$

Alors que la dérivée du second ordre est de la forme :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} = \nabla^2 U_i = \frac{U_{i+2} - 2U_{i+1} - U_i}{(\Delta x)^2} = \frac{U_{i+2} - 2U_{i+1} - U_i}{h^2}$$

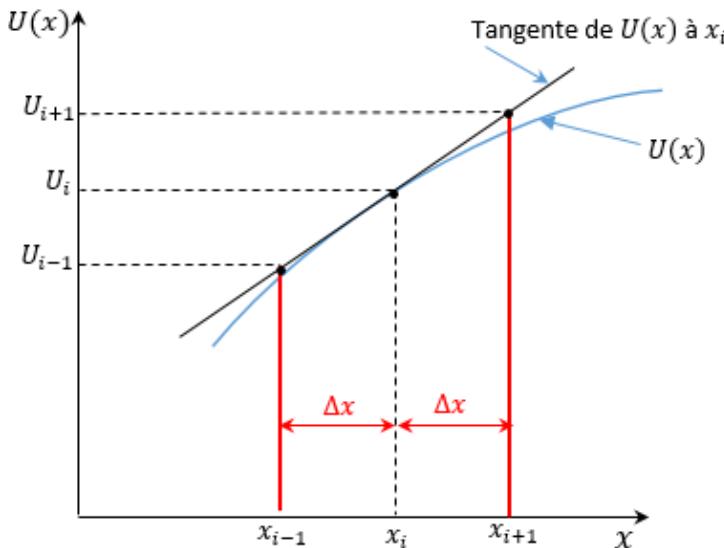


Fig 1.5 Représentation graphique du schéma de différences "Centré"

Application. 1.4

Démontrer les expressions des schémas de différences finies en premier et second ordre, en utilisant le développement de Taylor.

Solution :

1. Différences finies d'ordre 1 (premier ordre)

Considérons T_i comme le i ème développement de Taylor, soient : ($\Delta x = h$)

$$* \textcolor{red}{T_1} \rightarrow U(x+h) = U(x) + \frac{h}{1!} U'(x) + \frac{h^2}{2!} U''(x) + \frac{h^3}{3!} U'''(x) \quad (1)$$

$$\Rightarrow U'(x) = \frac{U(x+h) - U(x)}{h} - \frac{h}{2} U''(x) - \frac{h^2}{6} U'''(x) = \frac{U(x+h) - U(x)}{h} - \theta(h)$$

$$\text{En notation indicelle : } \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_i = U'_i = \frac{U_{i+1} - U_i}{h} = \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x}$$

Où ; $\theta(x) \rightarrow 0$: erreur de troncature à négliger, on obtient l'expression des différences en **avant**.

$$* \textcolor{red}{T_2} \rightarrow U(x-h) = U(x) - \frac{h}{1!} U'(x) + \frac{h^2}{2!} U''(x) - \frac{h^3}{3!} U'''(x) \quad (2)$$

$$\Rightarrow -U'(x) = \frac{U(x-h)-U(x)}{h} - \frac{h}{2} U''(x) + \frac{h^2}{6} U'''(x) + \dots$$

$$\Rightarrow U'(x) = \frac{U(x)-U(x-h)}{h} + \frac{h}{2} U''(x) - \frac{h^2}{6} U'''(x) + \dots$$

$U'(x) = \frac{U(x)-U(x-h)}{h} + \theta(h)$, pour $\theta(h) \rightarrow 0$, on obtient l'expression du schéma de différences en **arrière**. En notation indicelle cette expression s'écrit comme suite :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i = U'_i = \frac{U_i - U_{i-1}}{h} = \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x}$$

$$* \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1 = U(x-h) - U(x+h) = -2hU'(x) - \frac{2h^3}{3!} U'''(x) + \dots$$

$\Rightarrow U'(x) = \frac{U(x+h)-U(x-h)}{2h} + \frac{h^2}{6} U'''(x) = \frac{U(x+h)-U(x-h)}{2h} + \theta(h)$, avec $\theta(h) \rightarrow 0$, on obtient le schéma des différences **centré** du 1^{er} ordre. En notation indicelle l'expression peut être présentée comme suite : $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_i = U'_i = \frac{U_{i+1}-U_{i-1}}{2h} = \frac{U_{i+1}-U_{i-1}}{2\Delta x}$

2. Différences finies d'ordre 2 (second ordre)

$$* \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1 = U(x+h) + U(x-h) = 2U(x) + h^2 U''(x)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_i = U''(x) = \frac{U(x+h) + U(x-h) - 2U(x)}{h^2}$$

En notation indicelle :

$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_i = \frac{U_{i+1}-2U_i+U_{i-1}}{h^2}$, cette expression indique le schéma de différences **centré** du second ordre.

$$* \mathbf{T}_3 \rightarrow U(x+2h) = U(x) + \frac{2h}{1!} U'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} U''(x) + \frac{(2h)^3}{3!} U'''(x) + \dots$$

$$2x\mathbf{T}_1 \rightarrow 2U(x+h) = 2U(x) + \frac{2h}{1!} U'(x) + \frac{2h^2}{2!} U''(x) + \frac{2h^3}{3!} U'''(x) + \dots$$

$$2x\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_3 \Rightarrow 2U(x+h) - U(x+2h) = U(x) - h^2 U''(x) - h^3 U'''(x) + \dots$$

Ou bien :

$$2x\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_3 \Rightarrow 2U_{i+1} - U_{i+2} = U_i - h^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_i - h^3 \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right)_i + \dots$$

$$\Rightarrow -h^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_i = -U_{i+2} + 2U_{i+1} - U_i + h^3 \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right)_i + \dots$$

$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_i = \frac{U_{i+2}-2U_{i+1}+U_i}{h^2} + \theta(h)$, avec $\theta(h) \rightarrow 0$, on obtient le schéma des différences **avant** du 2^{er} ordre.

Maintenant posons :

$$* \mathbf{T}_4 = U(x-2h) = U(x) - \frac{2h}{1!} U'(x) + \frac{(2h)^2}{2!} U''(x) + \frac{(-2h)^3}{3!} U'''(x) + \dots$$

$$* \mathbf{T}_2 \rightarrow U(x-h) = U(x) - \frac{h}{1!} U'(x) + \frac{h^2}{2!} U''(x) - \frac{h^3}{3!} U'''(x) + \dots$$

$$* \mathbf{T}_4 - 2\mathbf{T}_2 \rightarrow U(x-2h) - 2U(x-h) = -U(x) + h^2 U''(x) - h^3 U'''(x) + \dots$$

En notation indicelle :

$$U_{i-2} - 2U_{i-1} + U_i + h^3 \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right)_i = h^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_i \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_i = \frac{U_{i-2}-2U_{i-1}+U_i}{h^2} + h \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right)_i$$

$\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_i = \frac{U_{i-2} - 2U_{i-1} + U_i}{h^2} + \theta(h)$ donne l'expression des différences en arrière.

10

Application. 1.5

En utilisant la méthode de différences finies, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + x(t) = 0 \\ x(0) = 1 \text{ et } x'(0) = 0 \end{cases}$$

Solution :

Laissons-nous utiliser un schéma de différences en **avant** dans cette solution :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \text{ en notation indicelle : } \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_i = \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta t}$$

$$\text{Et } \frac{d^2 x(t)}{dx^2} = \frac{x(t+2\Delta t) - 2x(t+\Delta t) + x(t)}{(\Delta t)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right)_i = \frac{U_{i+2} - 2U_{i+1} + U_i}{(\Delta t)^2}$$

Remplaçons ces grandeurs dans l'équation différentielle on obtient :

$$\frac{x(t+2\Delta t) - 2x(t+\Delta t) + x(t)}{(\Delta t)^2} + x(t) = 0$$

$$\Rightarrow x(t + 2\Delta t) - 2x(t + \Delta t) + [1 + (\Delta t)^2]x(t) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Selon les conditions aux limites nous avons : } x'(0) = \frac{dx(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \Big|_{t=0} = 0$$

$$\Rightarrow x(0 + \Delta t) - x(0) = 0 \Rightarrow x(\Delta t) - 1 = 0 \Rightarrow x(\Delta t) = 1 \quad (2)$$

La relation par récurrence dans l'équation.1, donne les valeurs de la fonction pour différentes valeurs de "t". Les conditions initiales indiquent les points de départ (*starting points*). Nous avons choisi un pas de calcul (Δt) pour des valeurs numériques de la fonction $x(t)$. Un pas de calcul petit veut dire un grand effort dans le processus de solution avec évidemment un temps prolongé, mais avec une grande précision dans les résultats.

*Prenons un pas de calcul ($\Delta t = 0.05 \text{ sec}$)

La relation de récurrence dans l'équation.1 devient :

$$x(t + 2 * 0.05) - 2x(t + 0.05) + [1 + (0.05)^2]x(t) = 0,$$

$$x(t + 2 * 0.05) - 2x(t + 0.05) + 1.0025 x(t) = 0, \text{ selon l'équation 2.}$$

$$x(\Delta t) = x(0.05) = 1$$

A l'instant $t = 0s$, de l'équation .1 on obtient :

$$x(0 + 2 * 0.05) - 2x(0 + 0.05) + 1.0025 x(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(0.1) - 2x(0.05) + 1.0025 * 1 = 0 \Leftrightarrow x(0.1) - 2 * 1 + 1.0025 = 0$$

$\Leftrightarrow x(0.1) = 2 - 1.0025 = 0.9975$, cette valeur représente la solution numérique de la fonction $x(t)$ à l'instant $t = 0s$

Maintenant à l'instant $t = t + \Delta t = 0 + 0.05 \text{ sec}$

La relation par récurrence dans l'équation. 1 devient :

$$x(0.05 + 2 * 0.05) - 2x(0.05 + 0.05) + 1.0025 x(0.05) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(0.15) - 2x(0.1) + 1.0025 x(0.05) = 0$$

$\Leftrightarrow x(0.15) = 2 * 0.9975 + 1.0025 * 1 = 0.9925 \rightarrow$ Solution numérique de la fonction $x(t)$ à l'instant $t = 0.05 \text{ sec}$

A l'instant $t = t + \Delta t = 0.05 + 0.05 = 0.1 \text{ sec}$

La relation par récurrence dans l'équation. 1 devient :

$$x(0.1 + 2 * 0.05) - 2x(0.1 + 0.05) + 1.0025 x(0.1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(0.20) - 2x(0.15) + 1.0025 x(0.1) = 0$$

$\Leftrightarrow x(0.20) = 2 * 0.9925 + 1.0025 * 0.9975 = 0.9850 \rightarrow$ Solution numérique de la fonction $x(t)$ à l'instant $t = 0.1 \text{ sec}$

Les résultats de la solution numérique de la fonction $x(t)$, obtenus par la méthode de différences finies sont confrontés à ceux donnés par la solution analytique classique. Nous verrons dans les prochaines sections de ce document la solution exacte d'une équation différentielle représentant un problème de mécanique, validée et comparée par une autre solution numérique donnée par la MDF.

Le tableau 3.1 regroupe les résultats de la solution numérique comparés à ceux de la méthode exacte ainsi que l'erreur induite à chaque pas de calcul.

Variable (t)	MDF	Méthode exacte	Erreur
0	1	1	0.00
0.05	1	0.999996	$\cong 0.0$
0.1	0.9975	0.995004	0.002496
0.015	0.9925	0.988770	0.00373
0.20	0.9850	0.980066	0.004934

Tab 1.1 Confrontation de la solution exacte à celle numérique

Remarques

1. l'erreur de la solution numérique accroît avec le nombre de pas de calcul :
2. ces erreurs se réfèrent à une accumulation d'erreur ;
3. plus le pas de calcul est grand plus l'effet sur la précision des résultats est signifiant.

1.9 Quelques schémas des différences finies en 1D

	U_i	U_{i+1}	U_{i+2}	U_{i+3}	U_{i+4}
$\Delta x U'_i$	-1	1			
$(\Delta x)^2 U''_i$	1	-2	1		
$(\Delta x)^3 U'''_i$	-1	3	-3	1	
$(\Delta x)^4 U^{(4)}_i$	1	-1	6	-4	1

Tab 1.2 Schéma DF *avant* ordre 1

	U_{i-4}	U_{i-3}	U_{i-2}	U_{i-1}	U_i
$\Delta x U'_i$				-1	1
$(\Delta x)^2 U''_i$			1	-2	1
$(\Delta x)^3 U'''_i$			-1	-3	1
$(\Delta x)^4 U^{(4)}_i$	1		-1	6	-4

Tab 1.3 Schéma DF *arrière* ordre 1

	U_{i-3}	U_{i-2}	U_{i-1}	U_i	U_{i+1}	U_{i+2}	U_{i+3}
$12 \Delta x U'_i$		1	-8	0	8	-1	
$12 (\Delta x)^2 U''_i$		-1	16	30	16	-1	
$8 (\Delta x)^3 U'''_i$	-	-8	13	0	-13	8	-1
$6 (\Delta x)^4 U^{(4)}_i$	-1	12	-39	56	-39	12	-1

Tab 1.4 Schéma DF *centré* ordre 4

	U_{i-2}	U_{i-1}	U_i	U_{i+1}	U_{i+2}
$2 \Delta x U'_i$			-1	0	1
$(\Delta x)^2 U''_i$			1	-2	1
$2 (\Delta x)^3 U'''_i$	-1	2	0	-2	1
$(\Delta x)^4 U^{(4)}_i$	1	-4	6	-4	1

Tab 1.5 Schéma DF *centré* ordre 2

1.10 Conditions aux limites

On distingue les conditions au bord (aux limites) de type **Dirichelet** de type :

$U(a) = \alpha$, Les conditions aux limites de **Neumann** de type : $\alpha * U'(a) = \beta$ et il existe aussi des conditions au bord mixtes mélangeant les deux (**Dirichelet- Neumann**) ou de **Robins** : $\alpha * U'(a) + \beta * U(a) = \gamma$

Application. 1.6

Mettre sous forme matricielle, le problème défini sur le domaine $[0,1]$ et exprimé par l'équation différentielle et aux conditions aux limites de Dirichelet sous-indiquées, en utilisant un schéma de DF en centré, et un pas Δx pour $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{cases} -U''(x) = f(x) \\ U(0) = \alpha \text{ et } U(1) = \beta \end{cases} \quad x \in]0, 1[\text{ et } f \text{ est une fonction continue}$$

Solution :

Le maillage est construit en introduisant $N + 1$ nœuds avec $i = 0, 1, 2, \dots, N$ régulièrement espacé avec un pas Δx . Lorsque la quantité x_i désigne la valeur de la fonction $U(x)$ au nœud x_i L'équation à résoudre sous forme discrète en chaque nœud x_i est comme suite : $-\left(\frac{d^2 U}{dx^2}\right)_i = f(x_i) = f_i$

Approximons la dérivée seconde de U suivant un schéma centré :

$$-\left(\frac{d^2 U}{dx^2}\right)_i = -\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{(\Delta x)^2} = \frac{2U_i - U_{i+1} - U_{i-1}}{(\Delta x)^2} = f_i$$

Discrétisons cette approximation :

$$\text{Pour } i = 1 \Rightarrow \frac{2U_1 - U_2 - U_0}{(\Delta x)^2} = \frac{2U_1 - U_2 - \alpha}{(\Delta x)^2} = f_1 \Rightarrow \frac{1}{(\Delta x)^2}(2U_1 - U_2) = f_1 + \alpha/(\Delta x)^2$$

$$\text{Pour } i = 2 \Rightarrow \frac{2U_2 - U_3 - U_1}{(\Delta x)^2} = \frac{-U_1 + 2U_2 - U_3}{(\Delta x)^2} = f_2 \Rightarrow \frac{1}{(\Delta x)^2}(-U_1 + 2U_2 - U_3) = f_2$$

$$\text{Pour } i = 3 \Rightarrow \frac{2U_3 - U_4 - U_2}{(\Delta x)^2} = \frac{-U_2 + 2U_3 - U_4}{(\Delta x)^2} = f_3 \Rightarrow \frac{1}{(\Delta x)^2}(-U_2 + 2U_3 - U_4) = f_3$$

⋮

$$\text{Pour } i = n - 1 \Rightarrow \frac{2U_{n-1} - U_n - U_{n-2}}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2}(-U_{n-2} + 2U_{n-1} - U_n) = f_{n-1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(\Delta x)^2}(-U_{n-2} + 2U_{n-1}) = f_{n-1} + \frac{\beta}{(\Delta x)^2} = f_{n-1} + \beta/(\Delta x)^2.$$

Sous forme matricielle pour $i = 1, \dots, n - 1$

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{n-2} \\ U_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 + \alpha/(\Delta x)^2 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} + \beta/(\Delta x)^2 \end{Bmatrix}$$

Application. 1.7

Le même problème de l'exemple 1.6, mais avec les conditions aux limites mixtes *Dirichelet- Neumann*.

$$\begin{cases} -U''(x) = f(x) \\ U(0) = \alpha \text{ et } U'(1) = \beta \end{cases} \quad x \in]0, 1[. \text{ Condition de Neumann à } x = 1$$

Solution :

Le nombre des inconnues a changé, il y'a une inconnue au bord $x = 1$, donc nous avons $n - 1$ inconnues et U_i pour i variant de 1 à n .

D'autre part il faut discréteriser (remplacer par une formulation numérique) la condition au limite de Neumann à $x = 1$.

$$U'(1) = \frac{U_n - U_{n-1}}{\Delta x} = \beta \Rightarrow U_n - U_{n-1} = \beta * (\Delta x)$$

$$\text{Pour } i = 1 \Rightarrow \frac{2U_1 - U_2 - U_0}{(\Delta x)^2} = f_1 \Rightarrow \frac{1}{(\Delta x)^2}(2U_1 - U_2) = f_1 + \frac{U_0}{(\Delta x)^2} = f_1 + \frac{\alpha}{(\Delta x)^2}$$

Pour $i = n \Rightarrow \frac{2U_n - U_{n+1} - U_{n-1}}{(\Delta x)^2} = f_n \Rightarrow (U_n - \textcolor{red}{U}_{n+1}) + (\textcolor{blue}{U}_n - \textcolor{blue}{U}_{n-1}) = f_n * (\Delta x)^2$

Par récurrence on calcule l'élément U_n du vecteur $\{U\}$ et puis on déduit les autres.

$$\Rightarrow (U_n - 0) + (\beta * (\Delta x)) = f_n * (\Delta x)^2 \Rightarrow \frac{1}{(\Delta x)^2} U_n = f_n - \beta / \Delta x$$

Sous forme matricielle :

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 + \alpha / (\Delta x)^2 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_{n-1} - \beta / \Delta x \end{Bmatrix}$$

1.11 Exercices

1. Développer en série de Taylor la fonction $f(x) = \cos 2x$ au point $x = 2\text{rad}$
2. Ecrire sous forme matricielle le problème exprimé par l'équation continue sur le domaine $[0, L]$ et aux conditions aux limites sous-indiquées, en utilisant un schéma centré et un pas $\Delta x = h$ pour $0 \leq x \leq L$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u}{dx^2} + A u = B \\ u(0) = 0 \text{ et } u(l) = 0 \end{array} \right\} \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes}$$

3. Donner la solution exacte générale de l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants sur le domaine $0 < x < 1$ et définie par les conditions aux limites sous-indiquées.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u}{dx^2} - u = -1 \quad 0 < x < 1 \\ u'(0) = 1; \quad \text{à} \quad x = 0 \\ u'(1) + u(1) = 0 \quad \text{à} \quad x = 1 \end{array} \right.$$

4. Ecrire sous forme matricielle, le problème exprimé par l'équation différentielle et aux conditions aux limites sous-indiquées en utilisant un schéma de différences finies ‘en avant’ et un pas de calcul $\Delta x = L/4$ pour $0 \leq x \leq L$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u_i}{dx_i^2} = f_i \\ u(0) = 1 \text{ et } u(L) = 0 \end{array} \right\}$$

2.1 Discrétisation de l'équation d'un problème 1D

Considérons le problème unidirectionnel de la conduction de chaleur dans une barre de 1m de longueur. Le champ de température $T(x, t)$ vérifié l'équation de chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

-A cette équation différentielle à dérivée partielle (EDP), s'ajoutent les conditions aux limites aux extrémités de la barre : $T(0, t) = T_g$ et $T(1, t) = T_d$ et une condition initiale $T(x, 0) = T_0$

-L'intervalle $[0, 1]$ est discrétisé en $n + 1$ nœuds de coordonnées x_i ($i = 0$ à n), régulièrement espacés. Notons le pas d'espace par Δx et le pas du temps par Δt .

-Notons T_i^k : la température au nœud $x_i = i * \Delta x$ à l'instant $t = k \Delta t$.

Deux méthodes sont possibles pour discrétiser cette équation de chaleur :

- La première dite explicite (directe), utilise une discrétisation au nœud x_i et à l'itération k telque : $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^k = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^k$;
- La seconde dite implicite (indirecte), utilise une discrétisation au nœud x_i et l'itération $(k + 1)$ telque : $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^{k+1} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{k+1}$ avec $k + 1$: le pas temporel actuel et k pas précédent.

2.1.1 Schéma explicite

Nous utilisons un schéma avant (direct) d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et un schéma centré d'ordre 2 pour discrétiser la dérivée seconde en espace (Fig. 2.1). Les dérivées partielles citées en haut seront remplacées par des approximations des différences finies comme suit :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^k = \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} \quad (2.2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^k = \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} \quad (2.3)$$

Pour $\alpha = 1$ et posons $\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$

La température à l'itération $n + 1$ est donnée par l'expression suivante :

$$T_i^{k+1} - T_i^k = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k) = \lambda (T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k)$$

$$\Rightarrow$$

$$T_i^{k+1} = \lambda T_{i-1}^k + (1 - 2\lambda)T_i^k + \lambda T_{i+1}^k \quad (2.4)$$

Où i , variant de 1 à $n - 1$

Pour ;

$$i = 1 \Rightarrow T_1^{k+1} = \lambda T_0^k + (1 - 2\lambda)T_1^k + \lambda T_2^k$$

$$i = 2 \Rightarrow T_2^{k+1} = \lambda T_1^k + (1 - 2\lambda)T_2^k + \lambda T_3^k$$

$$i = 3 \Rightarrow T_3^{k+1} = \lambda T_2^k + (1 - 2\lambda)T_3^k + \lambda T_4^k$$

⋮

⋮

$$i = N - 2 \Rightarrow T_{n-2}^{k+1} = \lambda T_{n-3}^k + (1 - 2\lambda)T_{n-2}^k + \lambda T_{n-1}^k$$

$$i = n - 1 \Rightarrow T_{n-1}^{k+1} = \lambda T_{n-2}^k + (1 - 2\lambda)T_{n-1}^k + \lambda T_n^k$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{n-2} \\ T_{n-1} \end{Bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} (1 - 2\lambda) & \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \lambda & (1 - 2\lambda) & \lambda & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & (1 - 2\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & (1 - 2\lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{n-2} \\ T_{n-1} \end{Bmatrix}^k + \lambda \begin{Bmatrix} T_g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_d \end{Bmatrix}$$

Ou bien

$$\begin{Bmatrix} T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ T_3^{k+1} \\ \vdots \\ T_{n-2}^{k+1} \\ T_{n-1}^{k+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & (1 - 2\lambda) & \lambda & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \lambda & (1 - 2\lambda) & \lambda & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & (1 - 2\lambda) & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda & (1 - 2\lambda) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & (1 - 2\lambda) & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_g \\ T_1^k \\ T_2^k \\ \vdots \\ T_{n-1}^k \\ T_d^k \end{Bmatrix}$$

Il se produit une matrice tridiagonale, il existe plusieurs algorithmes pour résoudre ce système d'équations, on cite à titre d'exemple celui proposé par Thomas.

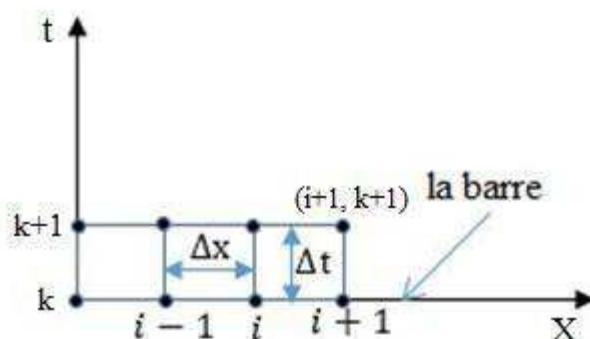


Fig 2.1 Schéma de discréétisation d'un problème 1D

2.1.2 Schéma implicite

Nous utilisons un schéma avant d'ordre 1 pour évaluer la dérivée temporelle et schéma centré d'ordre 2 pour discréétiser la dérivée seconde en espace. Les dérivées partielles $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^{k+1} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{k+1}$ seront remplacées par des approximations des différences finies comme suit :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_i^{k+1} = \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t}; \text{ schéma avant d'ordre 1 par rapport à la variable } t$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_i^{k+1} = \frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2}; \text{ schéma centré d'ordre 2 par rapport à la variable } x$$

↔ Pour $\alpha = 1$ on aura :

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \frac{1}{(\Delta x)^2} (T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}) \quad (2.5)$$

¹ Commentaire

Posons $\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$;

$$T_i^{k+1} - T_i^k = \lambda(T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1})$$

$-T_i^k = \lambda T_{i-1}^{k+1} - (1 + 2\lambda)T_i^{k+1} + \lambda T_{i+1}^{k+1}$ est le schéma numérique du problème

$$i = 1 \Rightarrow \lambda T_0^{k+1} - (1 + 2\lambda)T_1^{k+1} + \lambda T_2^{k+1} = -T_1^k$$

$$i = 2 \Rightarrow \lambda T_1^{k+1} - (1 + 2\lambda)T_2^{k+1} + \lambda T_3^{k+1} = -T_2^k$$

⋮

$$i = n - 1 \Rightarrow \lambda T_{n-2}^{k+1} - (1 + 2\lambda)T_{n-1}^{k+1} + \lambda T_n^{k+1} = -T_{n-1}^k$$

$$i = n \Rightarrow \lambda T_{n-1}^{k+1} - (1 + 2\lambda)T_n^{k+1} + \lambda T_{n+1}^{k+1} = -T_n^k$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \lambda & -(1 + 2\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda & -(1 + 2\lambda) & \lambda & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda & -(1 + 2\lambda) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & -(1 + 2\lambda) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -(1 + 2\lambda) & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_g^{k+1} \\ T_1^{k+1} \\ T_2^{k+1} \\ \vdots \\ T_n^{k+1} \\ T_{n+1}^{k+1} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} T_1^k \\ T_2^k \\ T_3^k \\ \vdots \\ T_{n-1}^k \\ T_n^k \end{Bmatrix}$$

On constate que les inconnues de l'itération $n + 1$ sont reliées entre elles par une relation implicite, d'où le nom de la méthode implicite.

2.2 Calcul de la déflection d'une poutre par la MDF

Nous examinons dans cette section une application de calcul de la déflection d'une poutre isostatique à une seule travée soumise à une charge uniformément répartie, moyennant à la fois par la méthode des différences finies et celle de la méthode exacte (analytique). L'avantage de cette technique réside dans la possibilité de savoir la valeur de ce paramètre à chaque pas de calcul. La Figure 2.2 décrit le modèle géométrique de la poutre utilisé ainsi que le type de chargement proposé. L'expression de la déflection(y) de cette poutre selon le chargement y afférent est déduite à partir de l'équation de la ligne élastique très connue dans la résistance des matériaux (RDM).

$$\frac{d^2y}{dx^2} - T \frac{y}{EI} = \frac{q*x(l-x)}{2EI}$$

Où :

x : Abscisse le long de la poutre (cm)

T : Effort de traction (N)

E : Module d'élasticité ou de Young MN/cm^2

I : Moment d'inertie (cm^4)

q : Charge uniformément répartie et l : longueur de la poutre exprimée en (cm)

Travail demandé :

-trouver la déflection de la poutre au nœud $x = 0.5 cm$ en utilisant un pas de calcul $\Delta x = 0.25 cm$

-Déterminer l'erreur relative réelle entre les deux méthodes à $y(50)$.

Données du problème :

$$T = 7200 \text{ N} ; q = 5400 \text{ N/cm} ; l = 75 \text{ cm} ; E = 30 \text{ MN/cm}^2 ; I = 120 \text{ cm}^4$$

Nota : utiliser un schéma de DF centré pour approximer les dérivées du premier et second ordre.

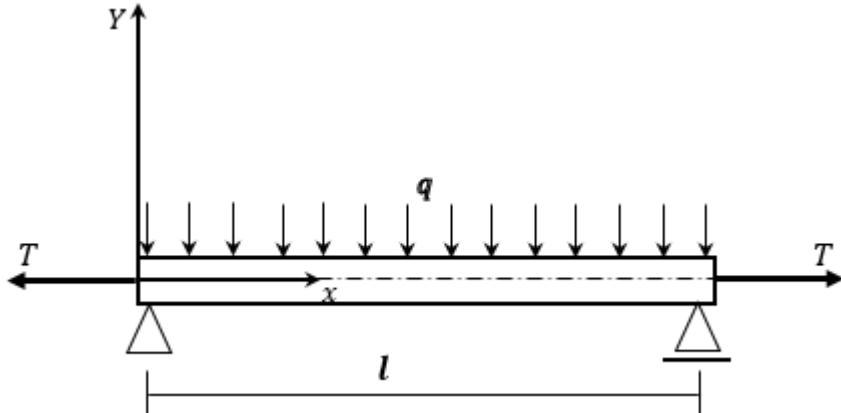


Fig 2.2 Modèle géométrique du problème

Solution :

a) Remplaçant les données dans l'équation différentielle exprimant le modèle mathématique de la déflection de la poutre :

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{7200 * y}{30E6 * 120} &= \frac{5400 * x(75 - x)}{2 * 30E6 * 120} \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - (2E - 6) * y &= (7.5E - 7) * x(75 - x) \end{aligned}$$

a) Solution discrète (numérique) du problème

Approximons la dérivée seconde $\frac{d^2y}{dx^2}$ au noeud i par un schéma de DF centré :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

L'équation discrète (numérique) est comme suite :

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} - (2E - 6) * y_i = (7.5E - 7) * x_i(75 - x_i)$$

Comme le pas de calcul $\Delta x = 25 \text{ cm}$ nous aurons quatre (04) nœuds, situés sur la barre comme il est indiqué sur la Fig. 3.3.

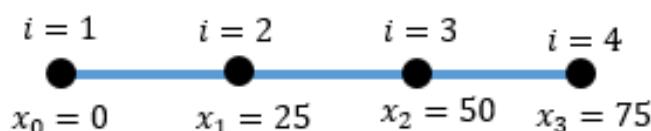


Fig 2.3 Schéma discret du problème en différences finies

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 0 + 25 = 25$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = 25 + 25 = 50$$

$$x_3 = x_2 + \Delta x = 50 + 25 = 75$$

Ecrivons maintenant l'équation discrète pour chaque nœud :

Nœud 1 : $i = 1$

Utilisons les conditions aux limites : à $x = 0 \Rightarrow y_1 = 0$

Nœud 2 : $i = 2$ et $x = 25$

$$\begin{aligned} \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{(25)^2} - (2E - 6) * y_2 &= (7.5E - 7) * x_2(75 - x_2) \\ \Rightarrow \frac{y_1}{(25)^2} + \frac{y_3}{(25)^2} - \frac{2y_2 + (25)^2 * 2 * 10^{-6}y_2}{(25)^2} &= 7.5 * 10^{-7} * 25(75 - 25) \\ \Rightarrow 0.0016y_1 + 0.0016y_3 - 0.003202y_2 &= 9.375 * 10^{-4} \end{aligned}$$

Nœud 3 : $i = 3$ et $x = 50$

$$\begin{aligned} \frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{(25)^2} - (2E - 6) * y_3 &= (7.5E - 7) * x_3(75 - x_3) \\ \Rightarrow 0.0016y_2 + 0.003202y_3 - 0.0016y_4 &= 9.375 * 10^{-4} \end{aligned}$$

Nœud 4 : $i = 4$ et $x = 75$, selon les conditions aux limites $y_4 = 0$

Exprimons ce système d'équation sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0016 & -0.003202 & 0.0016 & 0 \\ 0 & 0.0016 & -0.003202 & 0.0046 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9.375E - 4 \\ 9.375E - 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le système d'équations forme une matrice tridiagonale. Nous proposons l'algorithme de Thomas² pour le résoudre.

2.2.1 Algorithme de Thomas pour la matrice tridiagonale

Dans ce cas où la matrice A est tridiagonale, l'algorithme de Gauss se simplifié est dit :

Algorithme de Thomas. On suppose que :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

Dans ce cas nous proposons deux matrices L et U bidiagonales, déduites de la factorisation $L * U$ ont la forme :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \beta_n & 1 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

² Les inconnues y_i peuvent être tirées facilement en utilisant MATLAB

Les inconnues à déterminer sont les α_i et β_i . Ils peuvent être déterminés en écrivant les coefficients d'égalité³ $L * U = A$ dans l'ordre (1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3), (4,3), (4,4), ..., (n, n-1). Pour mieux comprendre et généraliser ces formules, prenons L , U et A comme matrices carrées d'ordre (4X4).

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_4 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{bmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \end{bmatrix}$$

$$L * U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & 0 & 0 \\ \beta_2\alpha_1 & \beta_2c_1 + \alpha_2 & c_2 & 0 \\ 0 & \beta_3\alpha_2 & \beta_3c_2 + \alpha_3 & c_3 \\ 0 & 0 & \beta_4\alpha_3 & \beta_4c_3 + \alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow L * U = A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & 0 & 0 \\ \beta_2\alpha_1 & \beta_2c_1 + \alpha_2 & c_2 & 0 \\ 0 & \beta_3\alpha_2 & \beta_3c_2 + \alpha_3 & c_3 \\ 0 & 0 & \beta_4\alpha_3 & \beta_4c_3 + \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 \\ 0 & 0 & b_4 & a_4 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\alpha_1 = a_1$$

$$\beta_2\alpha_1 = b_2 \Rightarrow \beta_2 = \frac{b_2}{\alpha_1}$$

$$\beta_2c_1 + \alpha_2 = a_2 \Rightarrow \alpha_2 = a_2 - \beta_2c_1$$

$$\beta_3\alpha_2 = b_3 \Rightarrow \beta_3 = \frac{b_3}{\alpha_2}$$

$$\beta_3c_2 + \alpha_3 = a_3 \Rightarrow \alpha_3 = a_3 - \beta_3c_2$$

$$\beta_4\alpha_3 = b_4 \Rightarrow \beta_4 = \frac{b_4}{\alpha_3}$$

$$\beta_4c_3 + \alpha_4 = a_4 \Rightarrow \alpha_4 = a_4 - \beta_4c_3$$

En général on obtient finalement :

$$\alpha_1 = a_1, \quad \beta_i = \frac{b_i}{\alpha_{i-1}} \text{ et } \alpha_i = a_i - \beta_i c_{i-1} \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Avec cet algorithme, un système de produit matriciel $\mathbf{A} * \mathbf{X} = \mathbf{b}$ se ramène à résoudre deux systèmes bidiagonaux : $\mathbf{L} * \mathbf{y} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{U} * \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Avec :

Développons ces égalités matricielles :

$$\mathbf{L} * \mathbf{y} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{Bmatrix}$$

³ Les coefficients sont : a_i , b_i et c_i

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = b_1 \\ \beta_2 y_1 + y_2 = b_2 \Rightarrow y_2 = b_2 - \beta_2 y_1 \\ \beta_3 y_2 + y_3 = b_3 \Rightarrow y_3 = b_3 - \beta_3 y_2 \\ \beta_4 y_3 + y_4 = b_4 \Rightarrow y_4 = b_4 - \beta_4 y_3 \end{cases}$$

En général on peut écrire :

$$y_1 = b_1 \quad \text{et} \quad y_i = b_i - \beta_i y_{i-1} \quad \forall i = 2, 3, \dots, n$$

D'autre part du système $\mathbf{U} * \mathbf{X} = \mathbf{y}$, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} * \mathbf{X} = \mathbf{y} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \end{bmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 x_1 + c_1 x_2 = y_1 \Rightarrow x_1 = \frac{y_1 - c_1 x_2}{\alpha_1} \\ \alpha_2 x_2 + c_2 x_3 = y_2 \Rightarrow x_2 = \frac{y_2 - c_2 x_3}{\alpha_2} \\ \alpha_3 x_3 + c_3 x_4 = y_3 \Rightarrow x_3 = \frac{y_3 - c_3 x_4}{\alpha_3} \\ \alpha_4 x_4 = y_4 \Rightarrow x_4 = \frac{y_4}{\alpha_4} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc on peut écrire que la solution générale est de la forme :

$$\begin{cases} x_n = \frac{y_n}{\alpha_n}, \quad \text{et} \\ x_i = \frac{y_i - c_i x_{i+1}}{\alpha_i}, \quad \forall i = n-1, n-2, \dots, 1 \end{cases}$$

Revenons maintenant au problème proposé dans cette section, on trouve le vecteur de déflection de la poutre $\{y_i\}$ comme suit :

$$\mathbf{x}_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5856 \\ -0.5852 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et :

$$y(50) = y(x_2) \cong y_2$$

2.2.2 Solution exacte (analytique) du problème

Pour mieux comprendre la solution analytique de ce type d'équations différentielles ordinaires (EDO), il est recommandé de consulter le chapitre 1, réservé au rappel mathématique.

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 * 10^{-6} * y = 7.5 * 10^{-7} * x(75 - x)$$

La solution générale de l'équation de la déflection de la poutre est de la forme :

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{hom} + \mathbf{y}_p$$

Où y_{hom} représente la solution de l'équation homogène et y_p est la solution particulière de l'équation différentielle.

- La solution homogène :

L'équation caractéristique de l'équation homogène est

$$m^2 - 2 * 10^{-6} = 0$$

$$m = \pm 0.0014142$$

D'où la solution homogène est de la forme :

$$y_{hom} = k_1 e^{0.0014142*x} + k_2 e^{-0.0014142*x}$$

- La solution particulière est de la forme :

$$y_p = A * x^2 + B * x + c \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2 * A * x + B \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2A$$

Remplaçons ces valeur de y et $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans l'équation de la déflection de la poutre on obtient :

$$2A - 2 * 10^{-6}(A * x^2 + B * x + c) = 7.5 * 10^{-7} * x(75 - x) \Leftrightarrow$$

$$-2 * 10^{-6}A x^2 - 2 * 10^{-6}Bx - (2A - 2 * 10^{-6})x = 5.625 * 10^{-5} - 7.5 * 10^{-7}x^2$$

En égalisant les termes de même degré de l'égalité on obtient :

$$\begin{cases} -2 * 10^{-6}A = -7.5 * 10^{-7} \\ -2 * 10^{-6}B = 5.625 * 10^{-5} \\ 2A - 2 * 10^{-6}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0.375 \\ B = -28.125 \\ c = 3.75 * 10^5 \end{cases}$$

La solution particulière est donc de la forme :

$$y_p = 0.375 * x^2 - 28.125 * x + 3.75 * 10^5$$

Et par conséquent la solution générale sera :

$$y = k_1 e^{0.0014142*x} + k_2 e^{-0.0014142*x} + 0.375 * x^2 - 28.125 * x + 3.75 * 10^5$$

Appliquons maintenant les conditions aux limites, on trouve :

$$\begin{cases} y_{(x=0)} = 0 \\ y_{(x=75)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3.75 * 10^5 + k_1 + k_2 \\ 0 = 1.1119k_1 + 0.8993k_2 + 3.75 * 10^5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.1119 & 0.89937 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.75 * 10^5 \\ -3.75 * 10^5 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.775656226 * 10^5 \\ -1.974343771 * 10^5 \end{Bmatrix}$$

On remplace les valeurs de k_1 et k_2 dans la solution générale on obtient :

$$y = -1.775656226 * 10^5 e^{0.0014142*x} - 1.974343771 * 10^5 e^{-0.0014142*x} + 0.375 * x^2 - 28.125 * x + 3.75 * 10^5$$

**calcul de l'erreur relative $y(50)$:

$$y(50) = -1.775656226 * 10^5 e^{0.0014142*50} - 1.974343771 * 10^5 e^{-0.0014142*50} + 0.375 * (50)^2 - 28.125 * 50 + 3.75 * 10^5$$

$$y(50) = -0.5320$$

L'erreur réelle = résultat de la solution exacte-résultat de la solution numérique

$$E_r = -0.5320 - (-0.5852) = 0.0532$$

*erreur réelle relative :

$$e_{rr} = \frac{E_r}{résultat réel} * 100\% = \frac{0.0532}{-0.532} * 100 = -10\%$$

2.3 Exercices

1. Soit la poutre console AB réalisée en béton armé (Fig. 1) de longueur $L = 1.20 \text{ m}$ et de section rectangulaire ($0.20 \times 0.30 \text{ m}^2$). La poutre est encastrée en A et libre en B, soumise à une charge uniformément répartie $q = 12 \text{ kN/m}$. La déflection élastique y de la poutre est gouvernée par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q(L-x)^2}{2EI}.$$

Où E : est le module de déformation différée du béton $E_{\text{béton}} = 10000 \text{ MPa}$ et I étant le moment d'inertie de la section.

- Définir les conditions aux limites du système et préciser leur type.
- Déterminer la déflection aux différentes sections de la poutre en utilisant un pas $\Delta x = 40 \text{ cm}$ et un schéma de différences finies centré.
- Tracer approximativement la ligne de courbure induite par la charge q .

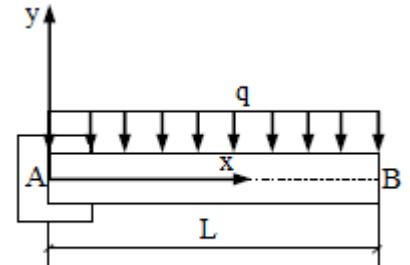


Fig.1

2. Soit la poutre isostatique montrée sur la Fig. 2 ci-contre. En utilisant un schéma centré de différences finies et un pas de calcul $\Delta x = h = L/4$

- Donner l'expression de la déflection V_i aux différentes sections de la poutre.
- calculer la flèche maximale V_{max} par la MDF
- Données du problème : $L = 6 \text{ m}$, $P = 200 \text{ kN}$, $E = 2 \times 10^8 \text{ kPa}$, $I = 1450 \text{ cm}^4$

Nota : utiliser l'équation de la ligne élastique $EIy'' = -M(x)$ pour déterminer l'expression de la flèche.

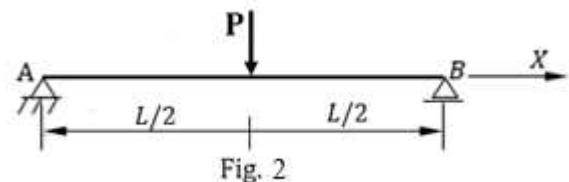


Fig. 2