

Chapitre I

INTRODUCTION

1- Historique

Les constructions métalliques sont apparues au moment où le béton armé ne pouvait plus remplir certaines exigences de la construction telle que les grandes portées dans les bâtiments et les ouvrages d'arts.

Le développement de la construction métallique a commencé au 19.^{ème} siècle. Actuellement l'utilisation des structures métalliques s'est étendue presque dans tous les domaines de la construction (Individuelle, collective, industrielle, chaudronnerie, et les ouvrages d'art).

2- Avantages

- Industrialisation totale; il est très aisé de fabriquer l'ouvrage en entier et faire le montage ensuite par simple assemblage ; ce qui permet de gagner du temps et diminuer le prix de revient.
- Grande résistance aux diverses sollicitations: traction , flexion, cisaillement et torsion.....
. Ceci est due aux grandes caractéristiques mécaniques de l'acier.
- Possibilité de réparation de la structure: Au lieu de perdre l'ouvrage en entier on peut facilement remplacer les éléments endommagés par d'autres.
- Facilité de transport des éléments de structures à cause de la légèreté de l'acier : pour un même rôle un élément de structure en acier est plus léger qu'un élément en béton armé.
- Possibilités architecturales beaucoup plus étendues.

3- Inconvénients

- Mauvaise tenue au feu et à la chaleur.
- Corrosion facile ce qui nécessite un entretien permanent surtout pour les ouvrages spéciaux.
- Risque de perte de stabilité des éléments à cause du flambage, voilement et le déversement.

4- Matériau utilisé dans la construction métallique

Le matériau principal des éléments porteurs est l'acier. Les aciers sont classés selon leur teneur en Carbone (Fig. I-1) et selon leurs caractéristiques mécaniques vis à vis des diverses sollicitations.

L'acier est un matériau constitué essentiellement de Fer, de Carbone (carbone moins de 1%) et d'autres impuretés. Sa destination est fonction du pourcentage de Carbone contenu dans celui-ci.

Les impuretés sont parfois nuisibles (difficiles à éliminer en fonderie) tels que : Phosphore, Soufre . Par contre certains peuvent améliorer la qualité de l'acier et on les rajoute volontairement tels que : le Nickel, le Chrome, le Manganèse, le Vanadium etc.

Types des aciers	C: % en Carbone	Domaine d'utilisation
Doux	$0,05 < C < 0,3$	Charpente métallique
Mi-durs	$0,3 < C < 0,6$	Rails et pièces forgés
Durs	$0,6 < C < 0,75$	Outils
Extra-durs	$0,75 < C < 1,2$	Outils et Poinçons

Tab I-1 Classification des Aciers selon la teneur en Carbone.

4.1- Essais sur les Aciers.

On distingue les essais destructifs et les essais non destructifs. Les essais destructifs nous permettent de déterminer les caractéristiques mécaniques (Traction, Flexion, Torsion, Cisaillement,). Les essais non destructifs sont utilisés pour le contrôle de la qualité de l'acier tel que Homogénéité, Isotropie, Constituants, Imperfection des surfaces (Macrographiques, Micrographiques, par Radiographie).

4.2- Essais de Traction.

Cet essais nous permet de déterminer:

- Le module d'Elasticité **E**,

- La contrainte Limite Elastique σ_e ,
- La contrainte de Limite de Rupture σ_r ,
- Ainsi que toutes les déformations correspondantes ε_e et ε_r .

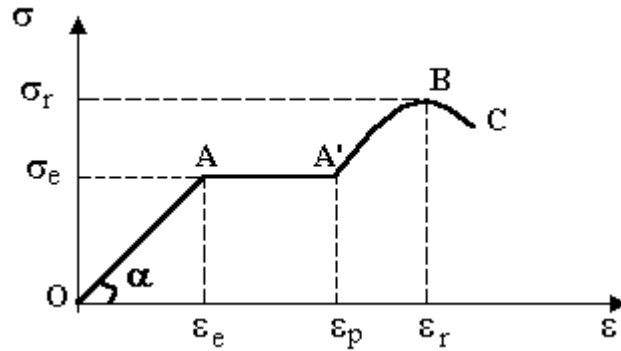


Figure I-1 : Comportement de l'acier doux à la traction simple

Phase OA: zone élastique

Phase AA': zone où zone plastique d'écoulement

Phase A'B: zone élasto-plastique avec un comportement non linéaire. Le point B est supposé point de rupture.

Phase BC: zone de striction jusqu'à dislocation.

Le module d'élasticité E est mesuré sur le graphe dans la zone OA:

$$E = \tan \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = 21.10^5$$

Le coefficient de poisson

$$\nu = \frac{\Delta a / a}{\Delta l / l} = 0,3$$

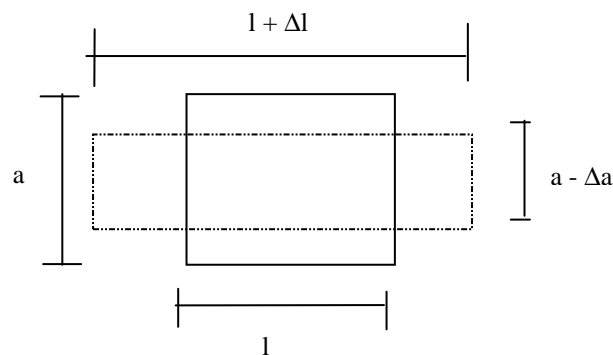


Figure I-2 : Coefficient de poisson

Le module d'élasticité transversal G :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = 8100 \text{ daN} / \text{mm}^2$$

Cette expression est déterminée par la théorie d'élasticité.

Remarque:

La limite d'élasticité des aciers dont le domaine élastique n'est pas linéaire est déterminée conventionnellement comme étant la valeur correspondante à 2% d'allongement.

4.3- Classification selon les caractéristiques mécaniques

Dans la charpente métallique on utilise généralement les aciers **E24** ou **E28** dont la limite d'élasticité est respectivement **2350 kg/cm²** et **2750 kg/cm²**. On utilise aussi de façon exceptionnelle les aciers **E36** qui sont en principe destinés aux ouvrages d'art.

Dans le tableau (fig. I-3) on donne une classification selon les normes françaises AFNOR.

Nuance d'acier	Qualité de l'acier	Limite d'élasticité R_{eL} (daN/mm ²)		rupture R_{mL} (daN/mm ²)	Allongement à la rupture A_L (%)	
		e < 30mm	30 < e < 100		e < 30	30 < e < 100
E24	2	235	215	340/440	28	27
	3	-/-	-/-		-/-	-/-
	4	-/-	-/-		-/-	28
E28	2	275	255	440/540	24	28
	3	-/-	-/-		-/-	23
	4	-/-	-/-		-/-	25
E36	2	355	335	490/630	22	21
	3	-/-	-/-		-/-	-/-
	4	-/-	-/-		23	22

e est l'épaisseur de l'élément considéré

Figure I-3 Classification des aciers selon caractéristiques mécaniques.

4.4- Ecouissage des aciers:

Un acier ayant travaillé au delà de sa limite d'élasticité est un acier écroui. L'acier écroui est un acier fragile par rapport à l'acier doux car il ne présente plus de grandes réserves plastiques. L'acier écroui présente une limite d'élasticité à la traction différente de celle à la compression. Un acier écroui ne permet pas de grande déformation, il est surtout utilisé en béton armé. L'écrouissage peut être volontaire (acier utilisé pour le béton) ou involontaire (par dilatation thermique ou par fusion au voisinage d'une soudure par exemple).

5- Produits sidérurgiques

Les produits sidérurgiques de la construction métallique sont normalisés. On les trouve dans des catalogues offerts par les industriels de la sidérurgie. En Algérie on utilise les normes françaises AFNOR.

On trouve dans les produits sidérurgiques tous les types d'éléments de structure nécessaires aux constructions. On distingue en particulier les tôles, les sections pleines ou creuses (carré ou circulaire), les sections en **I** (**IPE** ou **IPN**), les sections en **H** (**HEA** ou **HEB**), les cornières **L** (ailes égales ou ailes inégales), section en **T**, etc.

Toutes les caractéristiques géométriques ainsi que le poids de chaque élément sont mentionnés sur des catalogues (voir tableaux en annexe).

6- Codes régissant la charpente métallique

Ils existent plusieurs codes à travers le monde qui régissent les constructions métalliques. En Algérie le code est en cours d'élaboration, c'est pour cela actuellement on utilise en général le code français (**CM66, Additif 80**) ou le code européen (**EUROCODE**).

6.1- Pondération en C.M

Soient:

- S_p une charge ou un effort dû aux charges permanentes,
- S_e une surcharge ou un effort dû aux surcharges d'exploitation ou d'essais,
- γ coefficient de pondération de S_p ($\gamma = 1,35$ ou 1 selon le cas le plus défavorable).

Selon l'Eurocode 3

$$\rho.S_p + 1,5.Se$$

Remarques

- dans tous les cas si les charges d'exploitation ou d'essais sont favorable leur coefficient de pondération doit être considéré nul en d'autres termes on ne doit pas les prendre en considération ;
- Il est aussi à noter que lorsque une charge permanente est composée de deux parties, une favorable et l'autre défavorable, il faut multiplier la première par 1,1 et la deuxième par 1,35 ;
- en cas de prise en compte des charges accidentelle et de fatigue, tous les coefficients de pondération précédents sont pris égaux à 1.
- pour le cas de la neige ou le vent il faut consulter la réglementation en vigueur.

6.1.2- Exemples d'application**Exercice 1 :**

Calculer les combinaisons des charges et surcharges majorées sur 1 m² d'un plancher , selon les données suivantes :

- Charge permanente G = 200 dan/m²
- Surcharge d'exploitation Q = 6000 dan / m²
- Surcharge de neige normale S_n = 300 dan / m²
- Surcharge du vent normal W_n = -500 dan / m² .

Solution :

Les combinaisons à considérer son les suivantes :

$$\frac{4}{3}G + \frac{3}{2}Q = \frac{4}{3}200 + \frac{3}{2}6000 = 9266,67 \text{ dan} / \text{m}^2$$

$$G + \frac{3}{2}W_n = 1 \times 200 + \frac{3}{2}(-500) = -550 \text{ dan} / \text{m}^2$$

$$\frac{4}{3}G + \frac{17}{12}(S_n + Q) = \frac{4}{3}200 + \frac{17}{12}(600 + 300) = 9191,67 \text{ dan} / \text{m}^2$$

$$\frac{4}{3}G + \frac{4}{3}\left(Q + \frac{S_n}{2} + W_n\right) = \frac{4}{3}200 + \frac{4}{3}\left(6000 + \frac{300}{2} - 500\right) = 7800 \text{ dan} / \text{m}^2$$

La première combinaison est la plus défavorable .

Exercice 2 :

La poutre de la figure suivante est soumise aux charges et surcharges :

- Charge permanente G appliquée au point B .
- Surcharge d'exploitation Q_1 appliquée au point D .
- Ou une surcharge d'exploitation Q_2 appliquée au point B .

Déterminer la section la plus sollicitée, sachant que :

$$G = 30t, \quad Q_1 = 1,1 G, \quad Q_2 = 0,2 G, \quad l = 4 \text{ m} .$$

Solutions :

Combinaisons des charges

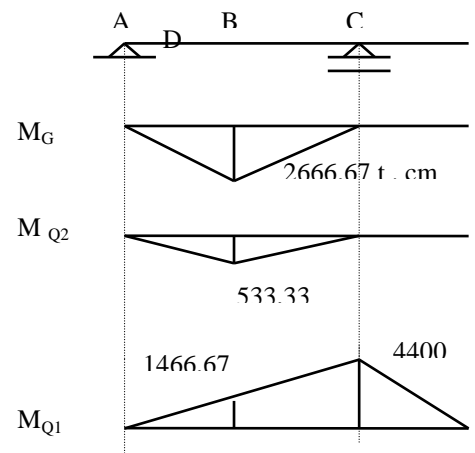
Section B :

$$M_B = \frac{4}{3} M_G + \frac{3}{2} M_{Q_2} = \frac{4}{3} 2666,67 + \frac{3}{2} 533,33 = 4355,56 t.cm$$

Section C :

$$M_C = \frac{3}{2} M_{Q_1} = \frac{3}{2} (-4400) = -6600 t.cm$$

La section C est la plus sollicitée .

**Exercice 3 :**

Soit la structure de la figure suivante, sachant que :

$P = 30 \text{ t}$ est une charge permanente

$Q = 1,2 P$ est une surcharge d'exploitation

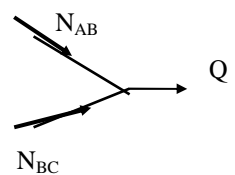
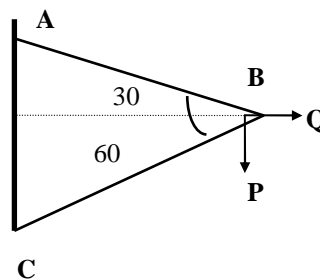
Trouver la combinaisons la plus défavorable pour chacune des barres AB et BC .

Solutions :

Effet de Q :

$$\sum X = 0 ,$$

$$N_{AB} \cos 30 + N_{BC} \cos 60 = 0$$



$$N_{AB} = -N_{BC} \frac{\cos 60}{\cos 30} \quad (1)$$

$$\sum Y = 0$$

$$N_{BC} \cos 30 + N_{AB} \cos 60 = -P \quad (2)$$

de (1) et (2) , on trouve :

$$N_{BC} = -25,98 \text{ t} \quad (\text{effort de compression})$$

$$N_{AB} = 14,99 \text{ t} \quad (\text{effort de traction})$$

Effet de P :

$$\sum X = 0, \quad N_{AB} \cos 30 + N_{BC} \cos 60 = Q \quad (1)$$

$$\sum Y = 0, \quad N_{AB} \cos 60 - N_{BC} \cos 30 = 0 \quad (2)$$

de (1) et (2) , on trouve

$$N_{AB} = 31,18 \text{ t}$$

$$N_{BC} = 18 \text{ t}$$

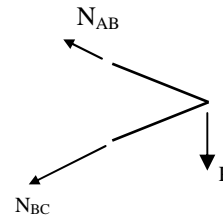
Combinaison des charges

barre AB : (traction défavorable)

$$N_{AB} = \frac{4}{3}N_P + \frac{3}{2}N_Q = \frac{4}{3}14,99 + \frac{3}{2}31,18 = 66,76 \text{ t}$$

barre BC (compression défavorable)

$$N_{BC} = \frac{4}{3}N_P = \frac{4}{3}(-25,98) = -34,64 \text{ t}$$



Chapitre II

TRACTION SIMPLE

Dans ce chapitre nous allons voir comment peut-on calculer un élément soumis à la traction simple et à la compression simple.

1 Condition de résistance

La condition de résistance donnée par la résistance des matériaux est admis comme suffisante par l'Eurocode 3.

si N est un effort de traction;

si f_y est la contrainte limite élastique et si f_u est la contrainte limite de rupture. La condition de résistance est alors:

$$N \leq N_R$$

Avec :

$$N_R = \min (N_{pl} ; N_u ; N_{net})$$

$$N_{pl} = A_b \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \quad ; \quad N_u = 0,9 \cdot A_{net} \cdot \frac{f_u}{\gamma_{M2}} \quad ; \quad N_{net} = A_{net} \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

A_b représente la section brute ;

A_{net} représente la section nette de l'élément.

Respectivement N_{pl} effort plastique de la section brute, N_u effort ultime de rupture, N_{net} effort plastique pour les assemblages munis de boulons précontraints.

2 Notion de la section nette

1^{er} cas:

Lorsque les trous se trouvent sur une seule ligne droite de rupture la section nette est calculée de la manière suivante:

$$A_{net} = A_b - n.d.e$$

A_{net} : section nette

A_b : section brute;

n: le nombre de trous;

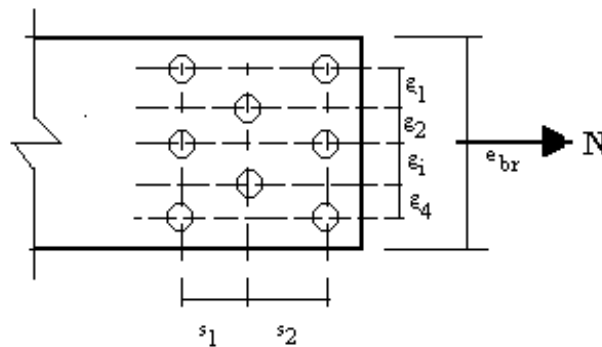
d: est le diamètre des trous;

e: épaisseur de élément.

2^{eme} cas:

Lorsque les trous se trouvent sur une seule ligne brisée de rupture la section nette est calculée d'après la relation de **Cochrane**:

$$A_{net} = A_b - n.d.e + e \cdot \sum \frac{S_i^2}{4.g_i}$$



où:

- **S_i** est la distance parallèle à l'axe de l'effort entre deux trous successifs de la ligne de rupture;
- **g_i** est la distance perpendiculaire à l'axe de l'effort entre deux trous successifs de la ligne de rupture.
- Comme il faut déterminer la section nette **A_o**; celle ci correspond à la plus petite section nette de toute les lignes de rupture.

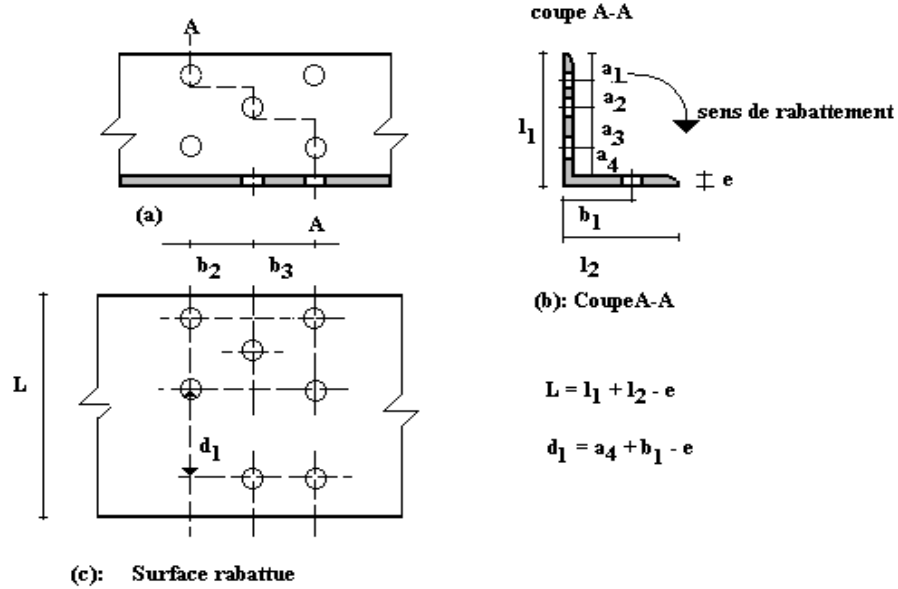
$$A_o = \text{Min}(A_{net1}, A_{net2}, A_{net3}, \dots)$$

3^{eme} cas:

Dans le cas d'une section particulière on doit rabattre la section pour pouvoir la considérer comme section rectangulaire.

Exemple de la cornière :

La cornière doit être rabattue pour qu'elle soit considérée comme pièce rectangulaire



$$L = l_1 + l_2 - e$$

$$d_1 = a_4 + b_1 - e$$

Chapitre III

COMPRESSION SIMPLE

1- Phénomène de Flambage

Sous l'effet d'un effort normal de compression simple, on peut facilement remarquer qu'une poutre flexible se déstabilise. Cette instabilité est appelée flambage.

1.1 Méthode d'EULER

a) Hypothèse

La méthode d'EULER n'est applicable que dans les cas d'une poutre remplissant les conditions suivantes :

- Parfaitement rectiligne ;
- parfaitement homogène et isotrope ;
- son poids est négligeable par rapport l'effort de compression ;
- les déformations de second ordre sont négligées

b) Cas d'une poutre simplement appuyée

Soit la poutre représentée sur la figure 1.1. Celle-ci est soumise à effort de compression N , appliqué au C.D.G de la section.

Supposons que la courbe se déforme sous l'influence de N .

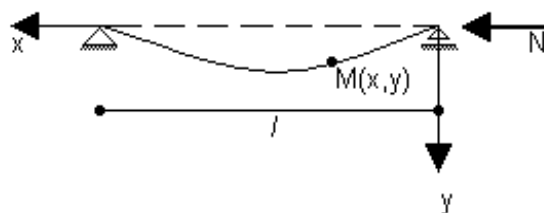


Fig. III-1

Au point $M(x, y)$ se développe un moment fléchissant M tel que :

$$M = N \cdot y, \quad [\text{III-1}]$$

sachant que $E.I. y'' = -M$, [III-2]

on peut écrire l'équation suivante :

$$E.I. y'' + N. y = 0 \quad [III-3]$$

$$y'' + \frac{N}{E.I} y = 0 \quad [III-4]$$

on posant $k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$ on aura l'équation suivante : $y'' + k^2 y = 0$ [III-5]

la solution générale de l'équation (I-5) est de la forme :

$$y = a. \cos kx + b. \sin kx \quad [III-6]$$

Conditions aux limites :

quand $x = 0$; $y = 0$ d'où $a = 0$

quand $x = l$; $y = 0$ d'où $b. \sin kl = 0$

$$\Rightarrow \sin kl = 0 \Rightarrow kl = n. \pi$$

$$\Rightarrow N = n^2 \frac{\pi^2 . E.I}{l^2} \quad [III-7]$$

N représente l'ensemble des efforts qui provoquent le flambage. On remarque que pour l'entier $n = 1$, on obtient la plus petite valeur de N qui provoque le flambage, elle est généralement notée N_{cr} . On la définit comme étant l'effort critique d'EULER.

Donc pour le cas d'une poutre articulée des deux cotés l'effort critique est :

$$N_{cr} = \pi^2 \frac{E.I}{l^2} \quad [III-8]$$

c) Cas d'une poutre encastree d'un coté et libre de l'autre.

De la même manière que précédemment au point $M(x, y)$ (fig. III-2) se développe un moment fléchissant M tel que :

$$M = -N(\delta - y), \quad [III-9]$$

comme $E.I. y'' = -M$, [III-2]

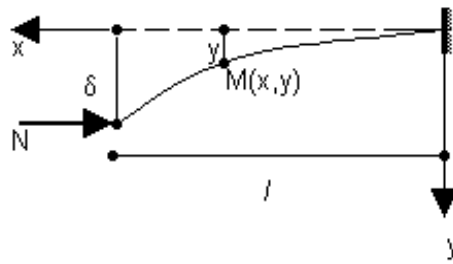


Fig. III-2

d'où $EIy'' = N(\delta - y)$

d'où l'écriture de l'équation suivante :

$$y'' + k^2 y = k^2 \delta \quad [\text{III-10}]$$

avec $k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$ on aura l'équation suivante

la solution générale de l'équation (I-5) est de la forme :

$$y = a.Coskx + b.Sin kx + \delta \quad [\text{III-11}]$$

Conditions aux limites :

quand $x = 0$; $y = 0$ d'où $a = -\delta$

quand $x = l$; $y' = 0$ d'où $b = 0$

quand $x = l$; $y = 0$ d'où $\delta = -\delta Coskl + \delta$

$$\Rightarrow Coskl = 0 \Rightarrow kl = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow N = (2n+1)^2 \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(2l)^2} \quad [\text{III-12}]$$

N représente l'ensemble des efforts qui provoquent le flambage. On remarque que pour l'entier $n = 0$, on obtient la plus petite valeur de N qui provoque le flambage, elle est généralement notée N_{cr} . On la définit comme étant l'effort critique d'EULER.

Donc pour le cas d'une poutre articulée d'un coté et libre de l'autre ; l'effort critique est :

$$N_{cr} = \pi^2 \frac{E \cdot I}{(2l)^2} \quad [\text{III-13}]$$

d) Cas d'une poutre articulée d'un coté et encastrée de l'autre

De la même manière que précédemment au point $M(x, y)$ se développe un moment fléchissant M tel que :

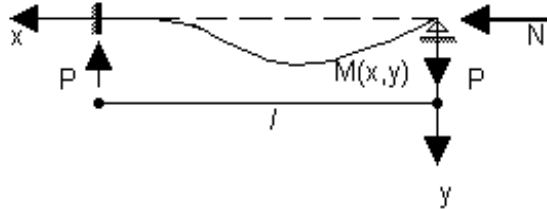


Fig. III-3

$$M = Ny - Px, \quad [\text{III-14}]$$

comme $E.I.y'' = -M, \quad [\text{III-2}]$

d'où $EIy'' = -Ny + Px$

d'où l'écriture de l'équation suivante :

$$y'' + k^2 y = k^2 x \quad [\text{III-15}]$$

avec $k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$ on aura l'équation suivante

la solution générale de l'équation (I-5) est de la forme :

$$y = a.Coskx + b.Sin kx + \frac{P}{N}x \quad [\text{III-16}]$$

Conditions aux limites :

quand $x = 0; \quad y = 0 \quad \text{d'où} \quad a = 0$

quand $x = l; \quad y' = 0 \quad \text{d'où} \quad k.b.Coskl + \frac{P}{N} = 0$

quand $x = l; \quad y = 0 \quad \text{d'où} \quad b.Sin kl + \frac{P}{N}l = 0$

$\Rightarrow \quad Tgkl = kl$ la solution de cette équation n'est que graphique (Fig. III-4)

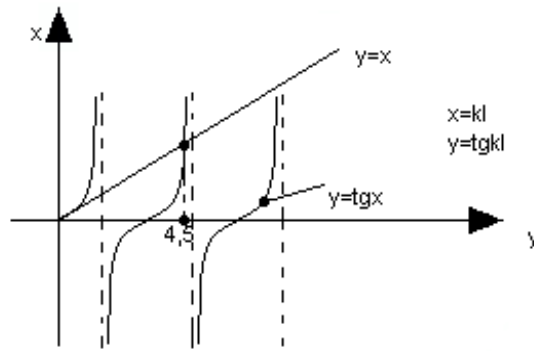


Fig. III-4 : solution graphique de $Tgkl = kl$

N_{cr} représente le plus petit effort de l'ensemble des N solutions représentés sur le graphe.

Donc le plus petit effort N_{cr} correspond à la première solution du graphe soit $kl = 4,5$; d'où :

$$N_{cr} = \pi^2 \frac{E.I}{(0,7.l)^2} \quad [III-17]$$

e) Cas d'une poutre encastrée des deux cotés (Fig. III-5) :

De la même manière que précédemment

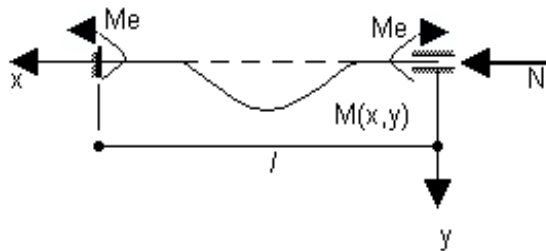


Fig. III-5

$$M = Ny - M_e$$

$$y'' + k^2 y = \frac{M_e}{N} k^2$$

La solution générale est de la forme $y = a.Sinkx + b.Coskx + \frac{M_e}{N}$

Après les conditions aux limites on trouve que :

$$N_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{(0,5.l^2)}$$

f) Définitions générales :

- **Effort critique :**

Sachant que l'effort critique est le plus petit effort qui provoque le flambage, à partir des cas précédents on peut généraliser l'écriture de l'effort critique d'Euler de la manière suivante :

$$N_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{(\mu l)^2} = \pi^2 \frac{EI}{l_f^2}$$

où l_f est appelée longueur de flambement et μ coefficient qui dépend du mode d'appui.

$\mu = 1$ pour une poutre articulée des deux cotés ;

$\mu = 0,7$ pour une poutre articulée d'un coté et encastrée de l'autre

$\mu = 2$ pour une poutre articulée d'un coté et libre de l'autre

$\mu = 0,5$ pour une poutre encastrée des deux cotés

- **Contrainte critique :**

La contrainte critique correspond au rapport de l'effort N sur la section A

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \pi^2 \frac{EI}{A l_f^2} = \pi^2 \frac{E I}{l_f^2 A} = \pi^2 \frac{E}{l_f^2} i^2 = \pi^2 \frac{E}{(l_f/i)^2} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$$

où $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ est le rayon de giration

et $\lambda = \frac{l_f}{i}$ est l'élancement de la poutre

- **Elancement critique (Fig. III-6) :**

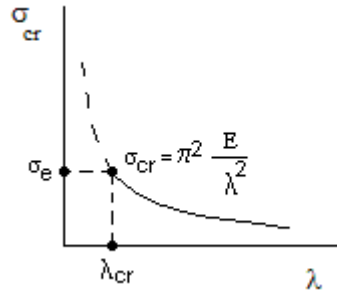
Quand $\sigma_{cr} = \sigma_e$ l'élancement correspondant à cet état est appelé élancement critique λ_{cr} .

$$\lambda_{cr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}}$$

- **Elancement réduit**

L'élancement réduit est le rapport de l'élancement sur l'élancement critique

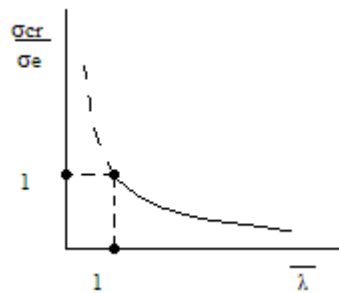
$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_{cr}}$$



Courbe d'Euler

En fonction de $\bar{\lambda}$ on peut écrire une autre expression de la courbe d'Euler :

$$\sigma_{cr} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda_{cr}^2 \cdot \bar{\lambda}^2} = \frac{\sigma_e}{\bar{\lambda}^2} \Rightarrow \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_e} = \frac{1}{\bar{\lambda}^2}$$



Autre forme de la courbe d'Euler

Remarque :

- Dès que l'élancement λ est grand la contrainte critique σ_{cr} est grande ; donc il y a plus de risque de flambage.
- Etant donné que la limite de résistance est limitée par σ_e , dans la courbe d'Euler on peut facilement constaté qu'il n'y a flambage que si $\lambda > \lambda_{cr}$.
- Etant donné que la limite de résistance est limitée par σ_e , dans l'autre forme de la courbe d'Euler on peut facilement constaté qu'il n'y a flambage que si $\bar{\lambda} > 1$.
- Etant donné qu'on a deux axes centraux principaux, le flambage se fait dans le plan perpendiculaire à l'axe dont l'élancement est maximum.

2- Prise en compte des défauts de rectitude.

Contrairement à la méthode d'Euler ; dans la réalité une barre n'est jamais parfaitement rectiligne. Nous allons prendre en compte cette imperfection et voir son influence sur l'effort N_{cr} et sur les contraintes provoquée par un effort normal de compression.

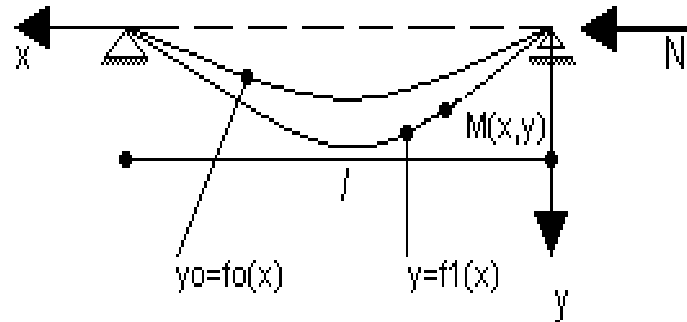


Fig. III-7

$y_0 = f_1(x)$ est l'équation de la courbe après chargement qui suppose que la poutre est parfaitement rectiligne (Fig.III-7).

$y_0 = f_0(x)$ est l'équation de la courbe avant chargement, elle définit les défauts de rectitude (Fig.III-7). La courbe y_0 est supposé remplir les conditions pour pouvoir se développer en série de Fourier.

$$y_0 = a_1 \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right) + a_2 \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{l}\right) + \dots + a_n \cdot \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right)$$

Etant donné qu'on est dans les petites déformations on ne prendra que le 1^{er} terme d'où :

$$y_0 = a \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right) \quad [\text{III-17}]$$

où a est l'amplitude (flèche) au milieu de la poutre

Au point $M(x, y)$ se développe un moment !

$$M = N(y + y_0) \quad [\text{III-18}]$$

$$\text{sachant que } EIy'' = -M \quad [\text{III-2}]$$

$$\text{et on posant que } k = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

$$\text{l'équation [III-2] devient } y'' + k^2(y + y_0) = 0 \quad [\text{III-19}]$$

en remplaçant y_0 par sa valeur [III-17] on aura :

$$y'' + k^2 \left(y + a \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right) \right) = 0 \quad [\text{III-20}]$$

La solution générale de l'équation [III-20] est du type :

$$y = D \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right) \quad [\text{III-21}]$$

$$y'' = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot D \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right)$$

En remplaçant y'' par sa valeur l'équation [III-20] devient :

$$\sin\left(\pi \cdot \frac{x}{l}\right) \cdot \left(a \cdot k^2 + D \cdot k^2 - D \cdot \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \right) = 0$$

$$\text{d'où : } D = \frac{a}{\left(\frac{\pi}{kl}\right)^2 - 1}$$

$$\text{d'où } y = \frac{a}{\left(\frac{\pi}{kl}\right)^2 - 1} \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right) \quad [\text{III-22}]$$

Remarque :

- quand $x = l/2$; y est maximum d'où $y_{\max} = f = \frac{a}{\left(\frac{\pi}{kl}\right)^2 - 1}$
- sachant que $N_{cr} = \pi^2 \frac{E \cdot I}{l^2}$ et $k^2 = \frac{N}{EI}$ ce qui implique que :

$$f = a \cdot \left(\frac{N}{N_{cr} - N} \right) = a \cdot \left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr} - \sigma} \right) \text{ d'où la flèche totale } f_t = a + f \text{ sera :}$$

$$f_t = a \cdot \left(\frac{N_{cr}}{N_{cr} - N} \right) = a \cdot \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr} - \sigma} \right) \quad [\text{III-23}]$$

Analyse du résultat

- L'équation [III-21] signifie qu'une poutre simplement appuyée possédant un défaut de rectitude définit par l'amplitude a ; sous l'influence d'un effort N la flèche au milieu de la poutre sera

a multipliée par le coefficient $\left(\frac{N_{cr}}{N_{cr} - N} \right)$. Ce coefficient est appelé coefficient

d'amplification de la flèche.

On remarque que :

$$\text{Quand } \begin{cases} N = 0 & \rightarrow f_t = a \quad \text{défaut de rectitude} \\ N = N_{cr} & \rightarrow f_t = \infty \quad \text{ruine} \end{cases}$$

Ceci signifie que l'instabilité (flambage) est atteinte avant que N n'atteint N_{cr} .

• Contrainte

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{N}{A} + \frac{M}{I} v = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot f}{I} v = \sigma + \frac{\sigma \cdot A \cdot f}{I} \cdot v = \sigma \left(1 + \frac{f}{i^2} \cdot v \right) = \sigma \left(1 + \frac{f}{c} \right) \\ &= \sigma \left(1 + \frac{a}{c} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_{cr} - \sigma} \right) \end{aligned} \quad \text{[III-24]}$$

où $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ est le rayon de giration, $\sigma = \frac{N}{A}$ et $c = \frac{i^2}{v}$ un coefficient.

L'équation [III-24] signifie que sous l'influence d'un effort de compression N agissant sur une poutre la contrainte maximale sera σ multipliée par le facteur $\left(1 + \frac{a}{c} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_{cr} - \sigma} \right)$. Ce facteur est appelé coefficient d'amplification des contraintes de compression et il est > 1 .

Condition de résistance

- on considérant σ comme connue . Soit alors $k_I = 1 + \frac{a}{c} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_{cr} - \sigma}$; k_I est appelé coefficient

d'amplification des contraintes de compression et il faut vérifier que $k_I \sigma \leq \sigma_e$

- on considérant que $\sigma_{max} \leq \sigma_e \rightarrow \sigma \left(1 + \frac{a}{c} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_{cr} - \sigma} \right) - \sigma_e = 0 \quad \text{[III-25]}$

Soit alors σ_s solution de l'équation [III-25]; elle est appelée contrainte limite d'affaissement et la condition de résistance devient :

$$\begin{aligned} \sigma \leq \sigma_s \quad \text{on posant que } k &= \frac{\sigma_e}{\sigma_s} \quad \text{la condition de résistance devient :} \\ k \sigma &\leq \sigma_e \end{aligned}$$

3- Méthode du code CM66

Cette méthode est appelée Méthode de DUTEUIL

DUTEUIL a établi que la flèche $f = 0,3.\sigma \cdot \frac{I}{v.N_{cr}} \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr} - 1,3.\sigma} \right)$ [III-26]

$M = N.f = \sigma.A.f$ en remplaçant f par sa valeur dans l'équation [III-26], M sera alors :

$$M = \frac{0,3.\sigma^2}{\sigma_{cr} - 1,3.\sigma} \cdot \frac{I}{v} \quad \text{sachant que} \quad \sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} v \leq \sigma_e \rightarrow \sigma \cdot \frac{\sigma_{cr} - \sigma}{\sigma_{cr} - 1,3} \leq \sigma_e$$

- on considérant σ connue : soit $k_1 = \frac{\mu - 1}{\mu - 1,3}$ avec $\mu = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma}$

d'où la condition de résistance suivante $k_1 \sigma \leq \sigma_e$

- on considérant le 2^{ème} cas de solution on aura à résoudre l'équation en σ_s suivante :

$$\sigma_s \cdot \frac{\sigma_{cr} - \sigma_s}{\sigma_{cr} - 1,3\sigma_s} - \sigma_e = 0 \quad \text{d'où :}$$

$$\sigma_s^2 - \sigma_s(\sigma_{cr} + 1,3.\sigma_e) + \sigma_e.\sigma_{cr} = 0 \quad \text{la solution est alors :}$$

$$\sigma_s = \frac{1}{2}(\sigma_{cr} + 1,3.\sigma_e) - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_{cr} - 1,3.\sigma_e)^2 - \sigma_e.\sigma_{cr}}$$

on posant $k = \frac{\sigma_e}{\sigma_s}$ la valeur de k sera :

$$k = \left(0,5 + 0,65 \cdot \frac{\sigma_e}{\sigma_{cr}} \right) - \sqrt{\left(0,5 + 0,65 \cdot \frac{\sigma_e}{\sigma_{cr}} \right)^2 - \frac{\sigma_e}{\sigma_{cr}}}$$

sachant que $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ la valeur de k sera :

$$k = \left(0,5 + 0,65 \cdot \frac{\sigma_e}{\pi^2 E} \lambda^2 \right) - \sqrt{\left(0,5 + 0,65 \cdot \frac{\sigma_e}{\pi^2 E} \lambda^2 \right)^2 - \frac{\sigma_e}{\pi^2 E} \lambda^2} \quad \text{[III-27]}$$

Donc pour vérifier un élément soumis à la compression simple il suffit de déterminer λ puis k et ensuite vérifier que $k.\sigma \leq \sigma_e$.

Pour éviter à chaque fois d'utiliser la relation [III-27], dans le CM66 on trouve des tableaux [Tab. III-1] qui nous donnent directement les valeurs de k en fonction de λ pour une valeur de σ_e donné.

Valeur de k pour $\sigma_e = 2400 \text{ kg/cm}^2$										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,000	1.000	1.000	1.000	1.001	1.001	1.002	1.002	1.002	1.003
10	1,004	1004	1.005	1.006	1.007	1.008	1.009	1.010	1.012	1.013
20	1,015	1.016	1.08	1.019	1.021	1.023	1.025	1.028	1.030	1.032
30	1,035	1.037	1.04	1.043	1.046	1.049	1.052	1.056	1.060	1.063
40	1,067	1.071	1.076	1.080	1.085	1.090	1.095	1.100	1.105	1.111
50	1,117	1.123	1.120	1.137	1.144	1.151	1.159	1.166	1.175	1.183
60	1,192	1.201	1.211	1.221	1.231	1.242	1.253	1.265	1.277	1.289
70	1,302	1.315	1.328	1.342	1.357	1.372	1.387	1.403	1.420	1.436
80	1,453	1.471	1.489	1.508	1.527	1.547	1.567	1.587	1.608	1.629
90	1,651	1.674	1.696	1.719	1.743	1.767	1.792	1.817	1.842	1.868
100	1,814	1.921	1.947	1.975	2.003	2.031	2.060	2.089	2.118	2.148
110	2,178	2.209	2.250	2.271	2.303	2.335	2.367	2.400	2.433	2.467
120	2,501	2.535	2.570	2.605	2.640	2.676	2.712	2.748	2.785	2.822
130	2,860	2.897	2.936	2.974	3.013	3.052	3.091	3.131	3.172	3.212
140	3,252	3.294	3.335	3.377	3.419	3.468	3.504	3.548	3.591	3.635
150	3,679	3.723	3.768	3.813	3.858	3.904	3.950	3.997	4.043	4.090
160	4,137	4.18	4.23	4.28	4.33	4.38	4.43	4.48	4.53	4.58
170	4,63	4.68	4.73	4.78	4.83	4.88	4.94	4.99	5.04	5.09
180	5.15	5.2	5.26	5.31	5.36	5.42	5.48	5.53	5.59	5.64
190	5.70	5.76	5.81	5.87	5.93	5.99	6.05	6.11	6.16	6.22
200	6.28	6.34.	6.40	6.46	6.53	6.59	6.65	6.71	6.77	6.84
210	6.90	6.96	7.03	7.09	7.15	7.22	7.28	7.35	7.41	7.48
220	7.54	7.68	7.67	7.74	7.81	7.88	7.94	8.01	8.08	8.15
230	8.22	8.29	8.36	8.43	8.49	8.57	8.64	8.71	8.78	8.85
240	8.92	8.99	9.07	9.14	9.21	9.29	9.36	9.43	9.52	9.58
250	9.66	9.75	9.81	9.88	9.96	10.04	10.11	10.19	10.27	10.35
260	10.43	10.50	10.58	10.66	10.74	10.82	10.90	10.98	11.06	11.14
270	11.22	11.30	11.38	11.47	11.55	11.63	11.71	11.80	11.88	11.96
280	12.05	12.13	12.22	12.30	12.39	12.47	12.56	12.64	12.73	12.82
290	12.90	12.99	13.08	13.17	13.26	13.35	13.4	13.52	13.61	13.71
300	13.79									

[Tab. III-1] : exemple de valeurs de k pour $\sigma_e = 2400 \text{ kg / cm}^2$

Origine de la formulation des courbes Européenne de flambement (Eurocode 3) :

Partant du principe d'une barre avec défaut de rectitude défini par $y_0 = e_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)$

L'équation différentielle d'un poteau biarticulé chargé axialement est :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{N(y + y_0)}{E \cdot I}$$

$$e = \frac{e_0}{1 - \frac{N}{N_{cr}}}$$

Connaissant e , on peut écrire en flexion composée :

$$\frac{N_{\max}}{A} + \frac{N_{\max} \cdot e}{w_{el}} = f_y$$

En divisant l'ensemble par $N_{pl} = A \cdot f_y$: effort normal de plastification, on aura :

$$\frac{N_{\max}}{N_{pl}} + \frac{N_{\max} \cdot e_0 \cdot A}{w_{el} \left[1 - \frac{N_{\max}}{N_{pl}} \frac{N_{pl}}{N_{cr}} \right] \cdot N_{pl}} = 1$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$\chi + \frac{\chi}{1 - \chi \cdot \bar{\lambda}^2} \cdot \frac{e_0 \cdot A}{w_{el}} = 1$$

On peut l'écrire aussi :

$$(1 - \chi) \left(1 - \chi \cdot \bar{\lambda}^2 \right) = \frac{e_0 \cdot A}{w_{el}} \cdot \chi \quad \text{Équation d'Ayrton-Perry}$$

Posons alors $\eta = \frac{e_0 \cdot A}{w_{el}}$ appelé facteur d'imperfection généralisée

$$\text{et } \zeta = \frac{e_0}{l} \text{ on peut écrire } \eta = \frac{\lambda \cdot \zeta}{\left(\frac{i}{v} \right)}$$

La limite d'élasticité n'ayant qu'une très faible influence, les courbes Européennes ont été établies

pour une valeur de $f_y = 255 \text{ Mpa}$ (acier E28) ; sachant que $\lambda = \bar{\lambda} \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}$

Sachant que pour $\chi = 1$, alors $\bar{\lambda} \leq 0,2$; on trouve alors que $\eta = \frac{90,15 \cdot \zeta \cdot (\bar{\lambda} - 0,2)}{\frac{i}{v}}$

En posant $\alpha = \frac{90,15 \zeta}{\frac{i}{v}}$, alors $\eta = \alpha (\bar{\lambda} - 0,2)$. Notons que α est le facteur d'imperfection qui

dépend des défauts de la section donc des dimensions des éléments qui la composent.

L'équation d'Ayrton Perry peut s'écrire de la forme suivante :

$$\left(1 - \chi \cdot \bar{\lambda}^2\right)(1 - \chi) = \eta \chi = \alpha \chi (\bar{\lambda} - 0,2)$$

La solution minimale de cette équation du second degré en χ est

$$\chi = \frac{\phi - \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}}{\bar{\lambda}^2}$$

ou $\phi = 0,5 \left[1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2 \right]$, χ peut s'écrire de la forme suivante :

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \text{ c'est l'expression donnée par l'Eurocode 3}$$

Méthode de l'Eurocode 3:

Pour les barres à section pleines possédant $\bar{\lambda} \leq 0,2$ le flambement n'est pas à craindre. On prendra $\chi = 1$

$$N_{bRd} = \chi \cdot \beta_A \cdot A \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M1}}$$

Ou $\beta_A = 1$: pour les sections de classe 1, 2 et 3

Et $\beta_A = \frac{A_{eff}}{A}$ pour les sections de classe 4

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}}$$

$$\phi = 0,5 \left[1 + \alpha \left(\bar{\lambda} - 0,2 \right) + \bar{\lambda}^2 \right]$$

α : Facteur d'imperfection de la barre considérée. Il dépend
a, b, c et d représentent les courbes Européennes de flambement.

- La courbe **a** correspond aux profiles comportant très peu d'imperfection.
- La courbe **b** concerne les profiles possédant un degré moyen d'imperfection.
- La courbe **c** est relative aux profilés possédant d'importantes imperfections.
- La courbe **d** s'applique aux profilés possédant d'extrême imperfection.

Courbe de flambement	a	b	c	d
α	0,21	0,34	0,49	0,76

Pour simplifier les calculs on peut directement faire usage des courbes européennes ou du tableau donnant ci-dessous :

Courbes européennes de flambement

Tableau contenant les valeurs des courbes européennes

Exercice :

Soit le poteau de longueur $l = 4m$ représenté sur la figure ci-contre.

Vérifier la résistance du poteau sous la charge

N de compression avec $f_y = 2350 \text{ kg/cm}^2$:

- 1- Lorsque $N=85t$ et la section du poteau est tubulaire (voir figure) :

$$d_{ext} = 16 \text{ cm} ; d_{int} = 15 \text{ cm}$$

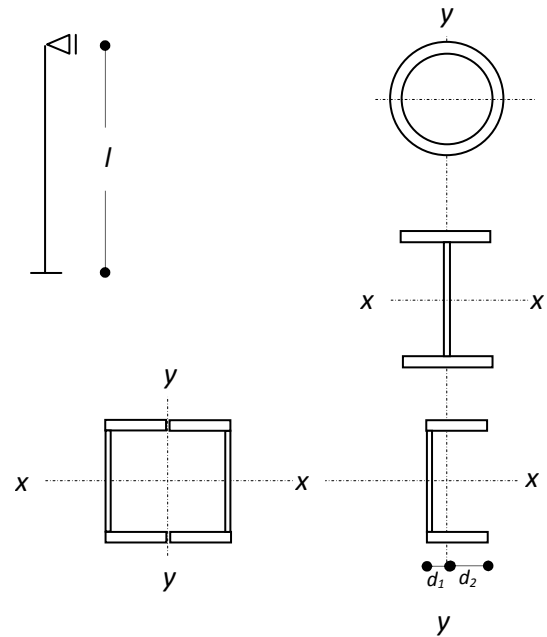
- 2- Lorsque $N=20t$ et la section est un IPE 200

$$A = 28,5 \text{ cm}^2 ; I_x = 1943 \text{ cm}^4 ; I_y = 142 \text{ cm}^4$$

- 3- Lorsque $N=32t$ la section est formée d'une double section soudée en UAP100

$$A = 13,4 \text{ cm}^2 ; I_x = 209 \text{ cm}^4 ; I_y = 32,8 \text{ cm}^4, d_1 = 1,7 \text{ cm} ; d_2 = 3,3 \text{ cm}$$

N.B: toutes les sections sont laminées à chaud.

**Solutions :**

- 1- Section tubulaire

$$\text{Moment d'inertie : } I = \pi \frac{d_{ext}^4 - d_{int}^4}{64} = 1330,57 \text{ cm}^4$$

$$\text{Section : } A = \pi \frac{d_{ext}^2 - d_{int}^2}{4} = 47,1 \text{ cm}^2$$

$$\text{Elancement : } \lambda = \frac{l_f}{\sqrt{\frac{I}{A}}} = \frac{0,7 \cdot 400}{\sqrt{\frac{1330,57}{47,1}}} = 52,7 \quad \lambda_{cr} = 93,9 \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_{cr}} = \frac{52,7}{93,9} = 0,56$$

$$\text{Classe de la section : } \frac{d_{ext}}{t} = \frac{16}{2} = 8 \leq 50 \text{ donc classe 1 alors } \beta_A = 1$$

Section laminée à chaud ; on prendra la courbe a on tire $\chi = 0,9$

$$N_{bRd} = \chi \cdot \beta_A \cdot A \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = 0,91 \times 1 \times 47,1 \times \frac{2350}{1,1} = 90,5t$$

$N < N_{bRd}$ donc il y a résistance

- 2- Section IPE200 :

$$\lambda_{xx} = \frac{l_f}{\sqrt{\frac{I_{xx}}{A}}} = \frac{0,7 \cdot 400}{\sqrt{\frac{1943}{28,5}}} = 33,9$$

$$\lambda_{yy} = \frac{l_f}{\sqrt{\frac{I_{yy}}{A}}} = \frac{0,7 \cdot 400}{\sqrt{\frac{142}{28,5}}} = 125,44$$

Le flambage se fait alors par rapport à l'axe yy

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_{yy}}{\lambda_{cr}} = \frac{125,44}{93,9} = 1,33$$

Choix de la courbe de flambement :

$$\frac{h}{b} = \frac{200}{50} = 4 > 1,2 \quad t_f = 0,85 < 40 \quad \text{axe de flambement } yy \text{ donc courbe } b$$

On tire $\chi = 0,4$

Classe de la section : l'âme $\frac{d}{t_w} = \frac{15,9}{0,56} = 28,4 < 33$ semelle $\frac{d}{t_w} = \frac{2,5}{0,85} = 2,9 < 10$ donc la section est de classe 1.

$$N_{bRd} = \chi \cdot \beta_A \cdot A \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = 0,4 \times 1 \times 28,5 \times \frac{2350}{1,1} = 24,3t$$

$N < N_{bRd}$ donc il y a résistance

3- Section Double UAP100 :

Moment d'inertie :

$$\begin{aligned} I_{XX} &= 2 \cdot I_{xx} = 2 \times 209 = 418 \text{ cm}^4 \\ I_{YY} &= 2 \cdot (I_{yy} + A \cdot d_2^2) = 2(32,8 + 13,4 \times 3,30^2) = 357,45 \text{ cm}^4 \\ \lambda_{XX} &= \frac{l_f}{\sqrt{\frac{I_{XX}}{A}}} = \frac{0,7400}{\sqrt{\frac{418}{2 \times 13,4}}} = 70,9 \\ \lambda_{yy} &= \frac{l_f}{\sqrt{\frac{I_{yy}}{A}}} = \frac{0,7400}{\sqrt{\frac{357,45}{13,4 \times 2}}} = 76,67 \end{aligned}$$

Le flambage se fait alors par rapport à l'axe yy

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_{yy}}{\lambda_{cr}} = \frac{76,67}{93,9} = 0,81$$

Choix de la courbe de flambement :

Pour les caisson on général on prend la courbe c

On tire $\chi = 0,7$

Classe de la section : l'âme $\frac{d}{t_w} = \frac{6,6}{0,55} = 12 < 33$ semelle $\frac{d}{t_w} = \frac{5}{0,85} = 5,88 < 10$ donc la section est de classe 1.

$$N_{bRd} = \chi \cdot \beta_A \cdot A \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = 0,7 \times 1 \times 26,8 \times \frac{2350}{1,1} = 40,0t$$

$N < N_{bRd}$ donc il y a résistance

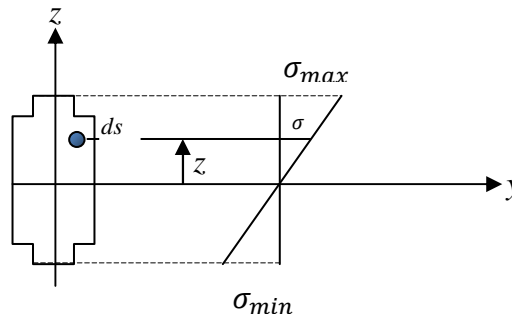
Chapitre IV

FLEXION SIMPLE

1. Flexion pure :

- **Domaine élastique**

Soit une section quelconque S (figure ci-dessous) soumise à un moment de flexion, après déformation la section reste droite et les contraintes sont linéaires sur toute la hauteur de la section.



Ce qui nous permet d'écrire :

$$M = \int_S (\sigma \cdot ds) \cdot y \text{ sachant que } k = \text{tg } \alpha = \frac{\sigma}{y} \text{ est un constant sur toute la hauteur de la section d'où } \sigma = k \cdot z, \text{ ainsi on exprime le moment } M = k \cdot \int_S z^2 \cdot ds = k \cdot I_y = \frac{\sigma}{z} \cdot I_y \text{ d'où l'expression connue: } \sigma = \frac{M}{I_y} \cdot z$$

L'état limite élastique est obtenu quand $\sigma_{max} = f_y$ cette valeur est obtenue pour $z = z_{max}$

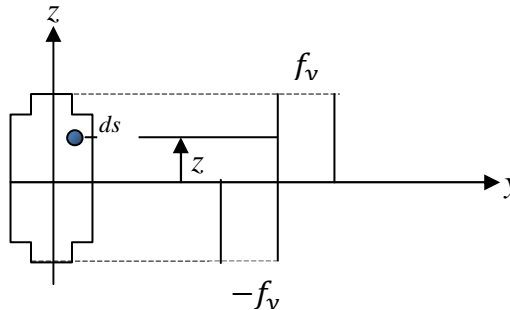
Ainsi le moment limite élastique $M_{el} = f_y \cdot \frac{I_y}{z_{max}}$ d'où :

$$M_{el} = f_y \cdot W_{el}$$

- **Domaine plastique**

Le domaine plastique dépend de la loi de comportement dans le domaine élasto-plastique. En cas général la loi de comportement choisie est celle possédant un palier de plasticité avec les déformations illimitées. Ce qui permet de définir l'état limite

plastique comme étant les cas où toutes les fibres travaillent à f_y . On dit aussi qu'en est en présence d'une rotule plastique.



$$M_{pl} = \int_S (f_y \cdot ds) \cdot y = f_y \cdot \int_S y \cdot ds = f_y \cdot (2 \cdot S_x) = f_y \cdot W_{pl}$$

Où S_x est le moment statique d'une demi-section par rapport à l'axe principal d'inertie.

W_{pl} est appelée module de résistance plastique.

Exemple d'une section rectangulaire

Il est évident qu'une section qui peut atteindre le domaine plastique, on doit la vérifier dans ce domaine c'est le cas des sections de classe 1 et 2 définie par l'Eurocode 3. Si une section ne peut atteindre l'état limite plastique, elle doit être vérifiée dans le domaine élastique c'est le cas des sections de classe 3 et 4. Pour les sections de classe 4 les caractéristiques à prendre en compte doivent être celles de la section efficace.

Méthode de vérification selon l'EC3

FLEXION PURE :

- quand l'effort tranchant $v = 0$

M_{sd} moment obtenu à partir des charges extérieures

M_{cRd} moment limite de résistance

$$M_{cRd} = W_{pl} \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \text{ pour les sections de la classe 1 et 2}$$

$$M_{cRd} = W_{el} \frac{f_y}{\gamma_{M0}} \text{ pour les section de la classe 3}$$

$$M_{cRd} = W_{eff} \frac{f_y}{\gamma_{M1}} \text{ pour les section de la classe 4}$$

Cas de présence des trous dans la semelle tendue

En cas de présence de trous dans la zone tendue, on négligera l'effet de ces trous si la condition suivante est remplie :

$$0,9 \frac{A_{fnet}}{A_f} \geq \frac{f_y}{f_u} \frac{\gamma_{M2}}{\gamma_{M1}}$$

Si cette condition n'est pas remplie, on prendra en considération une section réduite de la semelle :

$$A_{fred} = 0,9 \cdot A_{fnet} \cdot \frac{f_u}{f_y} \cdot \frac{\gamma_{M0}}{\gamma_{M2}}$$

où :

- A_f section brute de la semelle
- A_{fnet} section nette de la semelle
- A_{fred} section réduite de la semelle

Cas de présence des trous dans la partie tendue de l'âme :

Les trous de fixation dans la zone tendue de l'âme sont négligés si la condition suivante est vérifiée :

$$\left(\frac{A_{vnet}}{A_v} \right) \geq \frac{f_y}{f_u} \frac{\gamma_{M2}}{\gamma_{M1}}$$

A_f est l'aire de la semelle.

Dans le cas contraire, il faut considérer l'aire de la semelle à la valeur réduite suivante :

$$A_{veff} = A_{vnet} \cdot \frac{f_u}{f_y} \cdot \frac{\gamma_{M0}}{\gamma_{M2}}$$

A noter que : $\gamma_{M0} = 1$ et $\gamma_{M2} = 1,25$

Dans le calcul de résistance au cisaillement on remplace A_{veff} par A_v

Les trous dans les zones comprimées sont négligés sauf si les diamètres sont surdimensionnés (Trous non destinés aux assemblages) et les trous oblongs.

EFFORT TRANCHANT :

- Cisaillement pure ($M = 0$)

v_{sd} effort tranchant donné par les charges extérieures ;

v_{plRd} effort limite ultime

$$v_{sd} \leq v_{plRd}$$

$$V_{plRd} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot A_v \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

A_v l'aire de cisaillement considérée comme étant la section de l'âme qui tient compte de la partie courbe qui se trouve aux extrémités de l'âme. On peut la prendre d'une façon simplifiée on ne considérant que la partie de l'âme soit ($A_v = t_w \cdot d$). Selon l'EC3 on peut le calculer de la manière suivante :

A aire de la section transversale ;

b largeur de la semelle ;

d hauteur de l'âme ;

h hauteur totale de la section;

r rayon de congé de raccordement ;

t_f épaisseur de la semelle ;

t_w épaisseur de l'âme ;

Type de sections	A_v
Profilés laminés I, H. $V_{sd} //$ à l'âme	$A - 2 \cdot b \cdot t_f + (t_w + 2 \cdot r) \cdot t_f$
Profilés laminés U. $V_{sd} //$ à l'âme	$A - 2 \cdot b \cdot t_f + (t_w + r) \cdot t_f$
Profilés soudés I, H et caisson. $V_{sd} //$ à l'âme	$2(d \cdot t_w)$
Profilés laminés I, H et caisson. $V_{sd} //$ à la semelle.	$A - 2(d \cdot t_w)$
Profilés creux rectangulaires laminés d'épaisseur uniforme	$V //$ hauteur $A \cdot h / (b + h)$
	$V //$ largeur $A \cdot b / (b + h)$

Profilés circulaires creux	$2.A/\sqrt{2}$
Plats et barres pleines	A
Type de sections	A_v

Interaction moment effort tranchant

Dans ce cas $M_{sd} \neq 0$ et $V_{sd} \neq 0$

Selon l'EC3 lorsque $V_{sd} \leq \frac{V_{plRd}}{2}$; l'influence de l'effort tranchant est négligeable. La vérification de la section se fera en flexion pure.

Si $V_{sd} > \frac{V_{plRd}}{2}$ l'influence de l'effort tranchant est prise en compte dans le moment M_{VRd} .

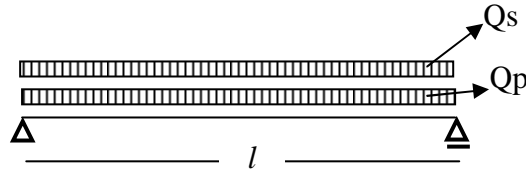
Où :

$$M_{VRd} = \left(W_{pl} - \frac{\rho \cdot A_v^2}{4 \cdot t_w} \right) \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

$$\text{Avec } \rho = \left(2 \cdot \frac{V_{sd}}{V_{plRd}} - 1 \right)^2$$

Exercice :

Soit la poutre de la figure ci-dessous.



Vérifier la résistance et la rigidité de la poutre.

- 1- Lorsque la poutre n'est pas munie de trous
- 2- On admet que les semelles sont munies de deux trous au milieu de la travée chacune de diamètre $\varnothing = 20 \text{ mm}$
- 3- En admettant que les trous sont situés à $l/4$ de l'appui.
- 4- Vérifier la flèche de la poutre (Rigidité).

On donne $Q_p = 1,5 \text{ t/m}$; $Q_s = 3,4 \text{ t/m}$; $l = 4\text{m}$; $f_y = 2350 \text{ kg/cm}^2$; $f_u = 3400 \text{ kg/cm}^2$
 $f/l = 1/300$

Caractéristiques de l'IPE-A 330 laminé:

$I_x = 10230 \text{ cm}^4$; $S_x = 351 \text{ cm}^3$; $h = 327 \text{ mm}$; $b = 160 \text{ mm}$; $d = 271 \text{ mm}$;
 $t_w = 6,5 \text{ mm}$; $t_f = 10 \text{ mm}$; $r = 18 \text{ mm}$; $A = 54,7 \text{ cm}^2$; $P = 43,0 \text{ kg/m}$; $I_x = 10230 \text{ cm}^4$.

Solution :**Classe de la section**

$$\text{Âme : } \frac{d}{t_w} = \frac{271}{6,5} = 41,7 < 72 \quad \text{classe 1}$$

$$\text{Semelle : } \frac{b/2}{t_f} = \frac{80}{10} = 8 < 10 \quad \text{classe 1}$$

La section est de classe 1

Calcul du moment de calcul M_{sd} et de l'effort tranchant V_{sd}

$$M_{sd} = \frac{(1,35 \cdot (Q_p + P) + 1,5 \cdot Q_s) \cdot l^2}{8} = 14,36 \text{ t.m}$$

$$V_{sd} = \frac{(1,35 \cdot (Q_p + P) + 1,5 \cdot Q_s) \cdot l}{2} = 14,36 \text{ t}$$

A- Section sans trous de fixationCalcul du M_{cRd} et V_{plRd}

$$M_{cRd} = W_{pl} \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = 16,5 \text{ t.m}$$

$$A_v = A - 2 \cdot b \cdot t_f + t_f(t_w + 2 \cdot r) = 26,95 \text{ cm}^2$$

$$V_{plRd} = A_v \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = 26,95 \cdot \frac{2350}{\sqrt{3}} = 36,56 \text{ t}$$

$M_{sd} < M_{cRd}$ et $V_{sd} < V_{plRd}$ donc condition de résistance vérifiée

B- Section munie de trous

$$\left(\frac{A_{fnet}}{A_f} \right) \geq 1,1 \cdot \frac{f_y}{f_u} \cdot \frac{\gamma_{M2}}{\gamma_{M1}}$$

$$A_f = 160 \cdot 10 = 1600; \quad A_{fnet} = 160 \cdot 10 - 2 \cdot 20 \cdot 10 = 1200 \text{ mm}^2$$

$$\frac{A_{fnet}}{A_f} = \frac{1200}{1600} = 0,75 < 1,1 \cdot \frac{f_y}{f_u} \cdot \frac{1,25}{1} = \frac{1,1 \cdot 2350 \cdot 1,25}{3400} = 0,95$$

Donc, on doit prendre en considération l'influence des trous en calculant l'aire de la réduite de la semelle :

$$A_{f\text{réduite}} = 0,9 \cdot A_{fnet} \cdot \frac{f_u}{f_y} \cdot \frac{\gamma_{M0}}{\gamma_{M2}}$$

$$A_{f\text{réduite}} = 0,9 \cdot 1200 \cdot \frac{3400}{2350} \cdot \frac{1}{1,25} = 1250 \text{ mm}^2 \text{ Ceci est l'aire de la semelle à prendre en}$$

compte dans la suite des calculs.

Moment statique réduit :

$$S_x = 12,50 \cdot \left(\frac{32,7}{2} - 5 \right) + \frac{27,1}{2} \cdot 0,65 \cdot \frac{27,1}{4} = 257,8 \text{ cm}^3$$

$$W_{plr} = 2 \cdot S_x = 515,6 \text{ cm}^3$$

C- Calcul du M_{cRd} et V_{pLRd}

$$M_{cRd} = W_{plr} \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = 515,6 \cdot \frac{2350}{1} = 12,12 \text{ t.m}$$

$$V_{pLRd} = A_v \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M0}} = 26,95 \cdot \frac{2350}{\sqrt{3}} = 56,08 \text{ t}$$

$M_{sd} > M_{cRd}$ condition de résistance non vérifiée

D- Vérification de la résistance à $l/4$ de l'appui

Le moment M_{sd} à $l/4$

$$M_{sd(l/4)} = \frac{3}{32} \cdot [1,35(Q_p + P) + 1,5 Q_s] = 10,77 \text{ t/m} < M_{cRd}$$

On remarque $V_{sd} < \frac{1}{2} \cdot V_{pLRd}$ donc l'effort tranchant est négligeable (on ne tiendra pas compte de l'interaction moment effort tranchant)

Condition de résistance vérifiée

E- Flèche de la poutre

1- Charge non pondérée :

$$Q = Q_p + Q_s = 4,9 \text{ t/m}$$

2- Calcul de (f/l) :

$$\frac{f}{l} = \frac{5}{384} \frac{Q \cdot l^3}{E \cdot I}$$

$$\frac{f}{l} = \frac{5}{384} \frac{49 \cdot 400^3}{21 \cdot 10^5 \cdot 10230} = 0,002 \quad \left[\frac{f}{l} = \frac{1}{300} = 0,003 \right]$$

3- Vérification de la flèche :

$$\frac{f}{l} < \left[\frac{f}{l} \right] ; \text{ la condition de flèche est vérifiée}$$

Remarque : Les classes des sections sont déterminées à partir des tableaux suivants issus de l'Eurocode 3

CHAPITRE VI

DEVERSEMENT EN FLEXION SIMPLE

1. Condition de résistance selon l'EC3

$$M_{sd} \leq \chi_{LT} \cdot W_{pl} \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M1}} \cdot \beta_w$$

Où :

- $\beta_w = 1$ pour les sections de classe 1 et 2
- $\beta_w = \frac{W_{el}}{W_{ply}}$ pour les sections de classe 3
- $\beta_w = \frac{W_{eff}}{W_{ply}}$ pour les sections de classe 4
- χ_{LT} coefficient de réduction pour le déversement qui est fonction de l'élanement réduit λ_{LT} de l'élément vis-à-vis du déversement (il est déterminé de la même manière de χ pour le flambage).
- M_{sd} le moment provoqué par les charges extérieures

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + [\phi_{LT}^2 + \bar{\lambda}_{LT}^2]^{0.5}}$$

$$\phi_{LT} = 0,5[1 + \alpha_{LT}(\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2]$$

Notons que les courbes européennes peuvent être utilisées pour la détermination de χ_{LT} en fonction de $\bar{\lambda}_{LT}$

α_{LT} déterminé de la même manière que α pour le flambage.

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\beta_w \cdot W_{pl} \cdot \frac{f_y}{M_{cr}}} = \frac{\lambda_{LT}}{\lambda_1} \cdot \sqrt{\beta_w}$$

Lorsque la valeur de $\lambda_{LT} \leq 0,4$ il n'est pas nécessaire de vérifier le déversement.

$$\lambda_1 = 93,9 \cdot \varepsilon \text{ avec } \varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}, f_y \text{ doit être exprimé en N/mm}^2$$

Il est clair pour vérifier la résistance au déversement, on doit déterminer soit M_{cr} ou λ_{LT} . Ces deux facteurs dépendent de la géométrie de la section, de la position de la charge par rapport du CDG et du mode de fixation de la barre.

2. Moment critique élastique

Dans le cas d'une poutre à section transversale constante symétrique par rapport à l'axe de faible inertie et pour une flexion suivant l'axe de forte inertie, le moment critique élastique est :

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{(k \cdot L)^2} \cdot \left\{ \left[\left[\frac{k}{k_w} \right]^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(k \cdot L)^2 \cdot G \cdot I_t}{\pi^2 \cdot E \cdot I_z} + (C_2 \cdot z_g - C_3 z_j) \right]^{0,5} - (C_2 \cdot z_g - C_3 z_j) \right\}$$

I_z : moment d'inertie suivant l'axe de faible inertie

I_w : moment de gauchissement $I_w = I_z \cdot \left[\frac{h-t_f}{2} \right]^2$

I_t : moment de torsion $I_t = \sum b_i \cdot t_i^3$, avec b_i et t_i respectivement largeur et épaisseur d'un élément composant la section ;

L : longueur de la poutre entre points d'appuis latérale.

C_1, C_2 et C_3 : Facteurs dépendant des conditions de charge et d'encastrement

k, k_w : facteurs de longueur effective. En général il est recommandé de prendre $k_w = 1$, mais k dépend du mode d'appui ($k = 1$ lorsque la poutre est simplement appuyée, $k = 0,5$ lorsqu'elle est encastree des deux cotés et $k = 0,7$ lorsqu'elle est encastree d'un coté et articulée de l'autre).

z_a : L'ordonnée du point d'application de la charge ;

z_s : L'ordonnée du point de cisaillement

$$z_g = z_a - z_s$$

En général z est positif pour la semelle comprimée et z_g est positif lorsque la charge est au dessus du centre de cisaillement

$$z_j = z_s - \frac{0,5 \int_A z(y^2 + z^2) dA}{I_y}. \text{ Pour les sections constantes et doublement symétriques } z_j = 0$$

Les valeurs de C_1, C_2 et C_3 sont données sur des tableaux et dépendent du type de chargement, du diagramme de moments et des valeurs de k

Il est à noter que le moment critique est utilisé pour le calcul de l'élancement λ_{LT} . Les valeurs du moment critique et de l'élancement correspondant peuvent obtenus d'une façon simplifiée en fonction des différents paramètres géométriques et de charges. On trouvera d'une façon détaillée ces simplifications dans la partie annexe de l'EC3.

CHAPITRE VIII

LES POTEaux MIXTES

On distingue deux types de poteaux mixtes. D'une part les poteaux partiellement ou totalement enrobés tels que les sections en forme de I, de H, et composées ... etc. D'autre part les poteaux remplis de béton tels que les sections creuses d'aciers circulaires ou carrées remplis de béton (fig.1).

Les sections mixtes en général sont régies par le code Eurocode 4.

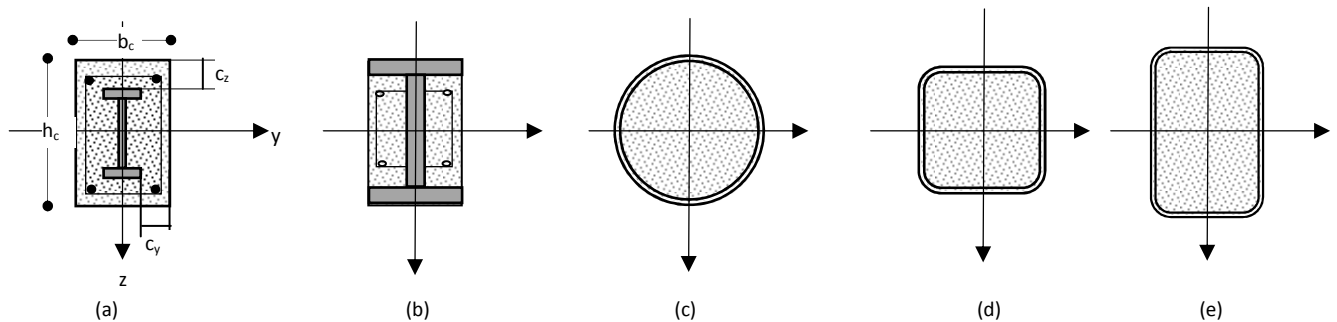


Figure 1 : Différents types de poteau mixtes

- (a) Section totalement enrobée ;
- (b) Section partiellement enrobée ;
- (c) Section creuse circulaire remplie de béton ;
- (d) Section creuse carrée remplie de béton ;
- (e) Section creuse rectangulaire remplie de béton.

METHODE DE CALCUL A LA COMPRESSION SELON L'EC4

Les poteaux mixtes à section constante et doublement symétriques peuvent être calculés sur la base des courbes européennes de flambement. Dans le cas contraire un calcul numérique est indispensable.

Hypothèses de calcul

- La section du poteau est constante sur toute la hauteur ;
- L'élancement du poteau $\bar{\lambda}$ ne doit pas dépasser **2,0** ;

- Le rapport de contribution de l'acier δ doit être compris entre **0,2** et **0,9** avec $\delta = \frac{f_y \cdot A_a}{\gamma_a \cdot N_{plRd}}$;
- Pour les profilés totalement enrobés les épaisseurs d'enrobage respectivement c_y et c_z doivent comprises entre **40mm** et **0,4** fois la largeur **b** de la section du profilé et entre **40mm** et **0.3** fois la hauteur **h** de la section profilé.

N_{plRd} est l'effort ultime de la section mixte,. Il est calculé en tenant compte des composantes de la section (Profilé + Béton + Barre d'acier).

Profilés enrobés de béton :

$$N_{plRd} = A_a \cdot \frac{f_y}{\gamma_a} + A_c \cdot 0,85 \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} + A_s \cdot \frac{f_{sk}}{\gamma_s}$$

Profilés remplis de béton :

$$N_{plRd} = A_a \cdot \frac{f_y}{\gamma_a} + A_c \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} + A_s \cdot \frac{f_{sk}}{\gamma_s}$$

A_a , A_c et A_s sont respectivement la section du profilé, la section du béton et la section des barres d'acier.

Les sections remplies de béton une capacité de résistance légèrement supérieure à celle des sections enrobées à cause de l'effet de confinement.

f_y , f_{ck} et f_{sk} sont les contraintes caractéristiques respectivement du profilé d'acier, du béton et des barres d'acier.

Effort critique de flambement

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot (EI)_e}{l^2}$$

$(EI)_e$ est appelée rigidité du poteau

$$(EI)_e = E_a \cdot I_a + 0,8 \cdot E_{cd} \cdot I_c + E_s \cdot I_s$$

E_a , E_{cd} et E_s sont les modules d'élasticité longitudinales respectivement du profilé, du béton et des barres d'acier. Pour le béton $E_{cd} = \frac{E_{cm}}{\gamma_c}$ avec E_{cm} le module sécant du béton (qui dépend de la classe du béton) et $\gamma_c = 1,35$

Elancement réduit :

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{N_{pl.R}}{N_{cr}}}$$

$N_{pl.R}$ est la valeur de N_{plRd} avec les coefficients de sécurité pris égaux à 1 ($\gamma_a = \gamma_c = \gamma_s = 1$).

Condition de résistance :

$$N_{sd} \leq \chi \cdot N_{plRd}$$

Pour déterminer χ on prendra les courbes européennes suivantes :

- Profilés creux remplis de béton on prendra la courbe « a » avec $\alpha = 0,21$;
- Profilés en I partiellement ou totalement enrobés avec flambage par rapport à l'axe fort d'inertie on prendra la courbe « b » avec $\alpha = 0,34$;
- Profilés en I partiellement ou totalement enrobés avec flambage par rapport à l'axe faible d'inertie on prendra la courbe « c » avec $\alpha = 0,49$.

Il est possible de s'en passer des courbes en utilisant les formules de calcul suivantes (similaires à celle de l'EC3) :

$$\chi = \frac{1}{\varphi + \sqrt{\varphi^2 - \bar{\lambda}^2}}$$

$$\text{avec } \varphi = 0,5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2]$$

Caractéristiques du béton à granulats normaux:

f_{ck} et E_{cm}	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	C45/55	C50/60
$f_{ck} (Mpa)$	20	25	30	35	40	45	50
$E_{cm} (Mpa)$	29000	30500	32000	33500	35000	36000	37000

On distingue deux caractéristiques pour les barres d'acier :

$$f_s = 400 \text{ MPa et } f_s = 500 \text{ MPa avec } \gamma_s = 1,15 \quad , \quad \gamma_a = 1,1 \quad , \quad \gamma_c = 1,5$$

Exemple d'application 1 :

Soit les sections des deux poteaux mixtes entièrement enrobées, l'un est formé par un HEA 100 et l'autre par un IPE 160. Déterminer alors la capacité portante des deux poteaux sachant que les deux sections sont enrobées par un enrobage minimal. Le poteau est considéré articulé des deux cotés avec une longueur de 03 m.

On donne :

$$\text{IPE 160 : } A = 20,1 \text{ cm}^2 ; h = 160 \text{ mm} ; b = 82 \text{ mm} ; I_y = 869 \text{ cm}^4 ; I_z = 68,3 \text{ cm}^4.$$

$$\text{HEA100: } A = 21,2 \text{ cm}^2 ; h = 96 \text{ mm} ; b = 100 \text{ mm} ; I_y = 349 \text{ cm}^4 ; I_z = 134 \text{ cm}^4.$$

$$E_a = 21.105 \text{ kg/cm}^2 ; f_{ya} = 2350 \text{ kg/cm}^2 ; f_{ck} = 250 \text{ kg/cm}^2 ; E_{cm} = 305000 \text{ kg/cm}^2 ; \text{ Ferrailage } 8\phi 12 ; E_s = 21.105 \text{ kg/cm}^2 ; f_{ys} = 50000 \text{ kg/cm}^2.$$

Solution:

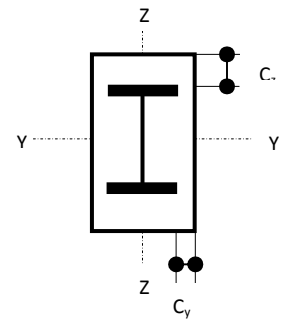
IPE 160

1. Enrobage minimal:

$$C_z = (40 \text{ mm}; 0,3.h) = (40 \text{ mm}; 0,3 \times 160) = (40; 48) = 40 \text{ mm}$$

$$C_y = (40 \text{ mm}; 0,4.b) = (40 \text{ mm}; 0,4 \times 82) = (40; 32,8) = 34 \text{ mm}$$

Soit une section totale : H = 24 cm ; B = 15 cm



$$N_{plRd} = A_a \cdot \frac{f_y}{\gamma_a} + A_c \cdot 0,85 \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} + A_s \cdot \frac{f_{sk}}{\gamma_s}$$

$$N_{plRd} = 20,1 \cdot \frac{2350}{1,1} + 24 \times 15 \cdot 0,85 \cdot \frac{250}{1,5} + 8x \frac{3,14 \cdot 1,2^2}{4} \cdot \frac{5000}{1,15} = 133259,17 \text{ daN}$$

2. Contribution de l'acier:

$$\delta = \frac{\frac{f_y}{\gamma_a} \cdot A_a}{N_{plRd}} = \frac{\frac{2350 \cdot 20,1}{1,1}}{133259,17} = 0,3 \quad 0,2 < \delta < 0,9 \text{ la methode de l'EC4 est applicable}$$

3. Elancement:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{N_{plR}}{N_{cr}}}$$

$$\begin{aligned} N_{plR} &= A_a \cdot \frac{f_y}{1} + A_c \cdot 0,85 \cdot \frac{f_{ck}}{1} + A_s \cdot \frac{f_{sk}}{1} \\ &= 20,1 \cdot \frac{2350}{1} + 24 \times 15 \cdot 0,85 \cdot \frac{250}{1} + 8x \frac{3,14 \cdot 1,2^2}{4} \cdot \frac{5000}{1} = 129069,1 \text{ daN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (EI)_e &= E_a \cdot I_a + 0,8 \cdot E_{cd} \cdot I_c + E_s \cdot I_s \\ &= 21 \cdot 10^5 \cdot 68,3 + 0,8 \cdot 305000 \cdot \frac{24 \cdot 15^3}{12} + 21 \cdot 10^5 \cdot 2,3 \cdot \frac{3,14 \cdot 1,2^2}{4} \cdot 6^2 \\ &= 2303179440 \text{ daN} \cdot \text{cm}^2 \end{aligned}$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot (EI)_e}{l_f^2} = (3,14)^2 \cdot \frac{2303179440}{300^2} = 252571,9 \text{ daN}$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{129069,1}{252571,9}} = 0,7$$

4. Capacité portante :

Poteau totalement enrobé avec flambage par rapport l'axe faible d'inertie ; on prendra la courbe « C ».

$$\bar{\lambda} = 0,7 ; \quad \chi = 0,7247 \quad N_u = \chi \cdot N_{plRd} = 0,7247 \cdot 129069,1 = 93536,4 \text{ daN}$$

N_u : Capacité portante en compression simple.

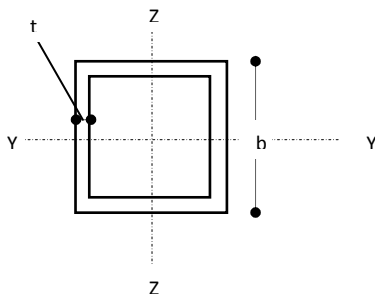
Exemple d'application 2 :

Soit la section creuse en acier carrée ou $b = 18 \text{ cm}$, $t = 1 \text{ cm}$ formant un poteau remplie de béton de classe C25/30. Déterminer alors la capacité portante en compression du poteau, considéré articulé des deux cotés avec une longueur de 03 m.

On donne :

La section carrée : $A_a = 68 \text{ cm}^2$, $I_a = 3286,67 \text{ cm}^4$

$E_a = 21.105 \text{ kg/cm}^2$; $f_{ya} = 2350 \text{ kg/cm}^2$; $f_{ck} = 250 \text{ kg/cm}^2$; $E_{cm} = 305000 \text{ kg/cm}^2$;



1- Section du béton armé :

$$A_c = (b - 2t)^2 = 16^2 = 256 \text{ cm}^2$$

$$N_{plRd} = A_a \cdot \frac{f_y}{\gamma_a} + A_c \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} +$$

$$N_{plRd} = 68 \cdot \frac{2350}{1,1} + 256 \cdot \frac{250}{1,5} = 187939,4 \text{ daN}$$

5. Contribution de l'acier:

$$\delta = \frac{\frac{f_y}{\gamma_a} \cdot A_a}{N_{plRd}} = \frac{\frac{2350 \cdot 68}{1,1}}{187939,4} = 0,77 \quad 0,2 < \delta < 0,9 \text{ la methode de l'EC4 est applicable}$$

6. Elancement:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{N_{plR}}{N_{cr}}}$$

$$N_{plR} = A_a \cdot \frac{f_y}{1} + A_c \cdot \frac{f_{ck}}{1} = 68 \cdot \frac{2350}{1} + 256 \cdot \frac{250}{1} = 223800 \text{ daN}$$

$$(EI)_e = E_a \cdot I_a + 0,8 \cdot \frac{E_{cm}}{1,5} \cdot I_c = 21 \cdot 10^5 \cdot 3286,67 + 0,8 \cdot \frac{305000}{1,5} \cdot \frac{16^4}{12}$$

$$= 7\,790\,383\,888,9 \text{ daN} \cdot \text{cm}^2$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot (EI)_e}{l_f^2} = (3,14)^2 \cdot \frac{7790383888,9}{300^2} = 854\,311,2 \text{ daN}$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{223800}{854311,2}} = 0,5$$

7. Capacité portante :

Poteau remplie ; on prendra la courbe « a ».

$$\bar{\lambda} = 0,5 ; \quad \chi = 0,9243 \quad N_u = \chi \cdot N_{plRd} = 0,9243 \cdot 181338 = 167610,7 \text{ daN}$$

N_u : Capacité portante en compression simple.

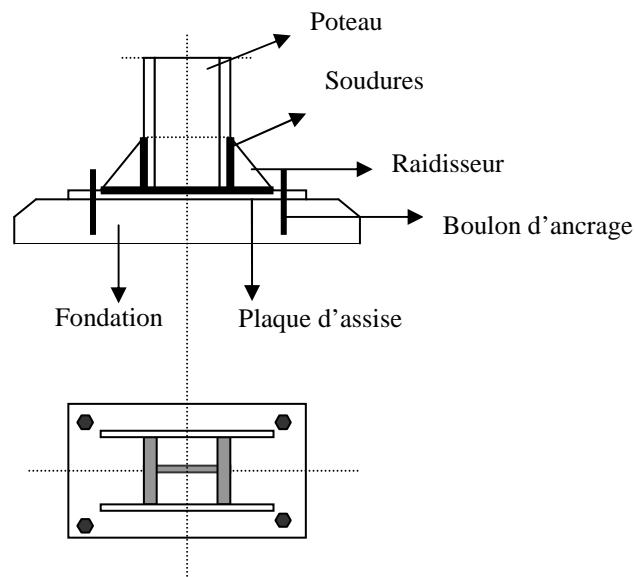
Chapitre X

LES PIEDS DES POTEAUX

1- Conception

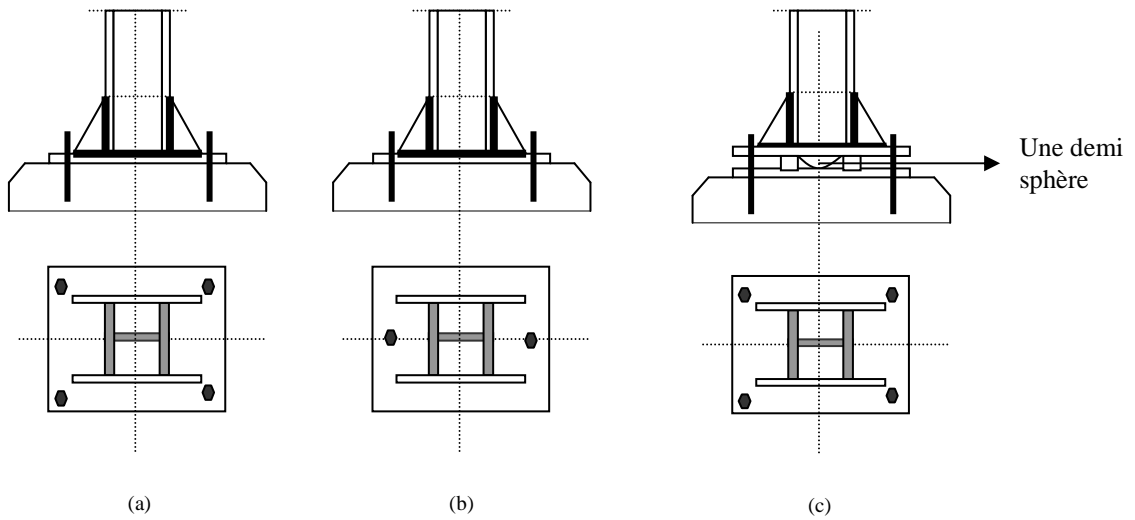
Les pieds des poteaux sont généralement formés par:

- Une plaque d'assise qui a le rôle de répartir les charges du poteau sur le massif de fondation.
- Des raidisseurs dont le rôle est rendre la plaque moins flexible (rigide).
- Des boulons d'ancrage dont le rôle est d'assurer la liaison de la plaque sur le massif de fondation. Ils ont aussi le rôle de transmettre les efforts (en particuliers ceux de la traction dont la plaque ne peut transmettre).



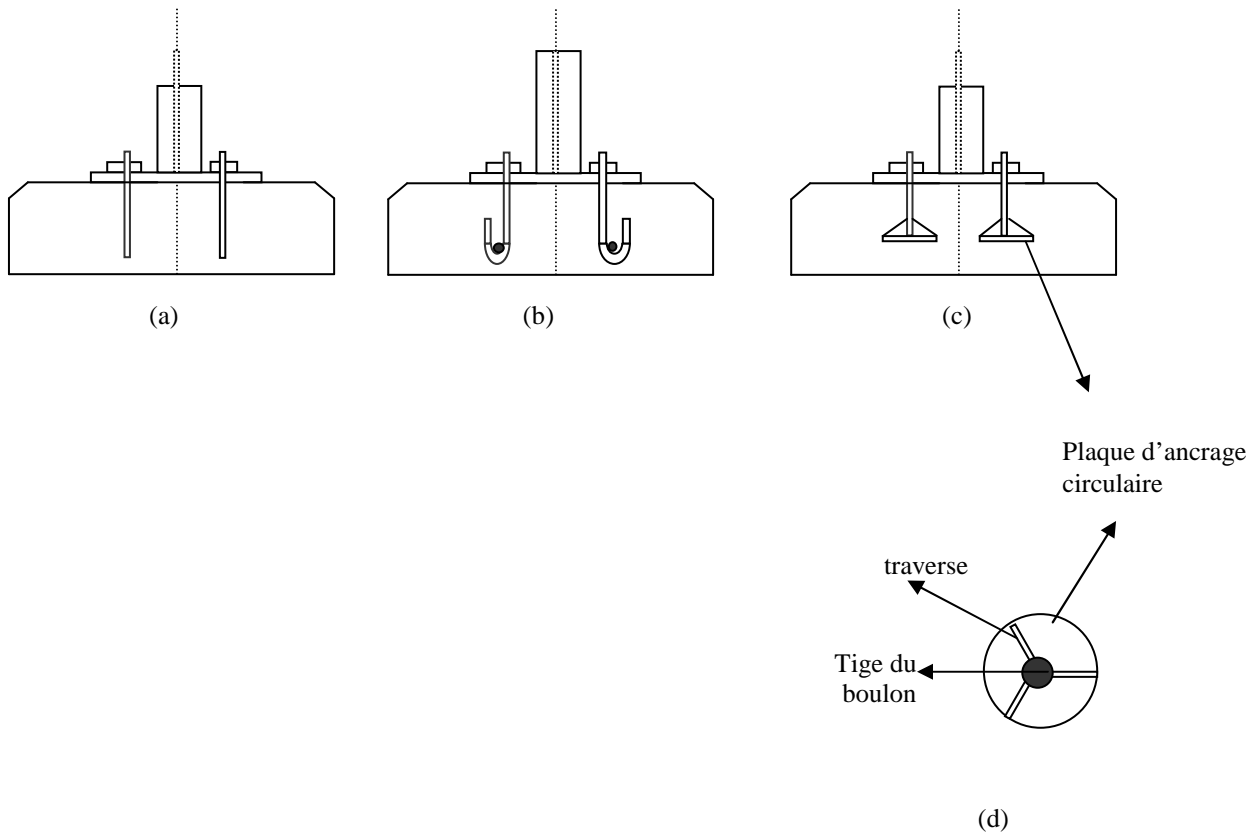
Les pieds de poteau peuvent assurer :

- Un encastrement dans les deux plans du poteau Figure (a).
- Une articulation dans les deux plans du poteau Figure (c).
- Une articulation dans un plan et un encastrement dans l'autre Figure (b).



Type des boulons d'ancrage:

- boulon d'ancrage à tige rectiligne (a)
- boulon d'ancrage avec crochet (b)
- boulon d'ancrage avec plaque d'ancrage (c) et (d).



Les plaques d'ancrage sont généralement munies de traverses (raidisseurs) qui ont le rôle:

- De pouvoir attacher convenablement par soudure la tige du boulon sur la plaque;
- De rigidifier la plaque d'ancrage.

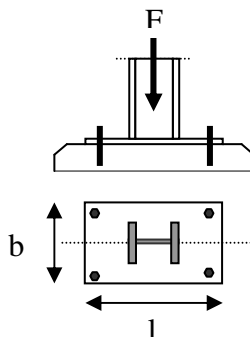
Les boulons à tige rectiligne sont utilisés pour les fondations d'importantes épaisseur, par contre les autres types de boulons sont utilisés pour les fondations de petites épaisseurs.

2- Méthode de calcul des dimensions des plaques d'assise :

2.1- En compression simple

Soient alors :

- $\overline{\sigma}_b$ la contrainte admissible du béton à la compression simple ;
- $b.l$ section de base de la plaque ;
- e_{pl} épaisseur de la plaque



Afin d'éviter l'écrasement du béton, il faut vérifier la condition suivante :

$$\frac{F}{b.l} \leq \overline{\sigma}_b \rightarrow b.l \geq \frac{F}{\overline{\sigma}_b}$$

Soient h et b_0 , respectivement la hauteur et la largeur du poteau (dans le cas de la figure $b_0 = b_s$ qui est la largeur de la semelle). Pour une répartition proportionnelle aux dimensions de la section du poteau on vérifie la condition suivante :

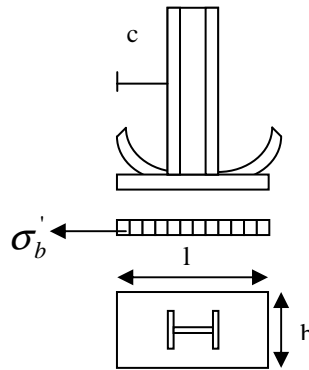
$$\frac{b}{l} = \frac{b_0}{h}$$

A partir de ces deux équations on peut déterminer les dimensions de la plaque d'assise b et l

2.1.1- Epaisseur de la plaque

- **Plaque sans raidisseur**

Pour le calcul de l'épaisseur on considère la plaque comme console attaché au poteau (Fig.).



L'épaisseur de la plaque doit être suffisante pour résister à la flexion créée par la réaction de la fondation.

$$\sigma_b' = \frac{F}{l.b} \quad M = \frac{\sigma_b' \cdot c^2}{2}$$

M est le moment max. par unité de longueur sur la console de longueur c encastrée sur la semelle du poteau.

Le module de résistance d'une unité de longueur de la plaque est :

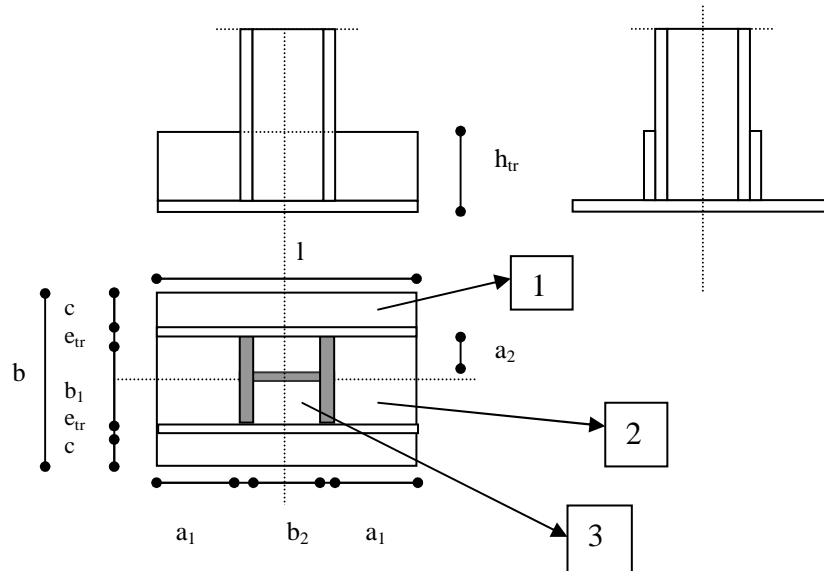
$$W_{pl} = \frac{e_{pl}^2}{6}$$

Condition de résistance :

$$\frac{M}{W_{pl}} = \frac{6M}{e_{pl}^2} \leq \sigma_e \rightarrow e_{pl} \geq \sqrt{\frac{6M}{\sigma_e}}$$

- **Plaque avec raidisseur :**

Les raidisseurs sont utilisés pour limiter les portées de la plaque, donc pour diminuer les efforts dans celle-ci et par conséquent maintenir une épaisseur réelle de la plaque ($e_{pl} \leq 3cm$).



La plaque est considérée chargée par les réactions du béton, et appuyée sur les raidisseurs et le poteau.

Soit alors M_i le moment maximum dans le panneau i

La plaque sous raidisseur est partagé en panneau 1,2 et 3 :

- le panneau 1 ($c \times l$) est considéré comme une poutre console de longueur c encastrée sur le raidisseur ;

$$M_1 = \sigma'_b \cdot \frac{c^2}{2}$$

- le panneau 2 ($a_1 \times b_1$) est considéré comme une plaque appuyée sur 03 cotés ;

$$M_2 = \chi \cdot \sigma'_b \cdot b_1^2 \quad \text{si } \frac{a_1}{b_1} \geq 0,5$$

$$M_2 = \sigma'_b \cdot \frac{a_1^2}{2} \quad \text{si } \frac{a_1}{b_1} < 0,5$$

$\frac{a_1}{b_1}$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,2	1,4	2	>2
χ	0,06	0,074	0,088	0,097	0,107	0,112	0,120	0,125	0,132	0,133

- le panneau 3 ($a_2 \times b_2$) est considéré comme une plaque appuyée sur 04 cotés.

$$M_3 = \psi \cdot \sigma'_b \cdot a^2 \quad \text{où } a = \min(a_2, b_2)$$

$\frac{b}{a}$	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	>2
ψ	0,048	0,055	0,063	0,069	0,075	0,075	0,086	0,091	0,094	0,098	0,1	0,125

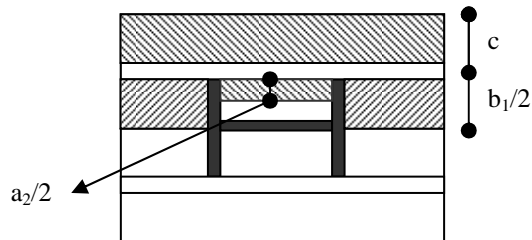
Vérification de la résistance de la plaque :

Dans tous les cas

$$e_{pl} \geq \sqrt{\frac{6M}{\sigma_e}} \quad \text{où} \quad M = \max(M_1, M_2, M_3)$$

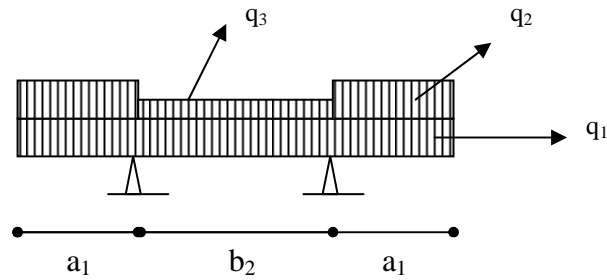
2.1.2- Calcul des raidisseurs :

Les raidisseurs sont considérés comme des poutres simplement appuyées ou encastées sur les poteaux, et soumises aux efforts transmises par les plaques.



Dans cet exemple chaque raidisseur est soumis aux charges indiquées par les surfaces hachurées :

- $q_1 = \sigma'_b \cdot c$ charge transmise par le panneau 1
- $q_2 = \sigma'_b \cdot \frac{b_1}{2}$ charge transmise par le panneau 2
- $q_3 = \sigma'_b \cdot \frac{a_2}{2}$ charge transmise par le panneau 3



Soient alors :

- e_r, h_r respectivement l'épaisseur et la hauteur du raidisseur (traverse) ;
- M_r, T_r respectivement le moment max. et l'effort tranchant correspondant.

On doit vérifier la condition de résistance suivante :

$$\sigma = \frac{M_r}{W_r} = \frac{6.M_r}{e_r.h_r^2} \leq \sigma_e \quad \tau = \frac{T_r}{e_r.h_r} \leq 0,65.\sigma_e \sqrt{\sigma^2 + 3.\tau^2} \leq \sigma_e$$

Remarque :

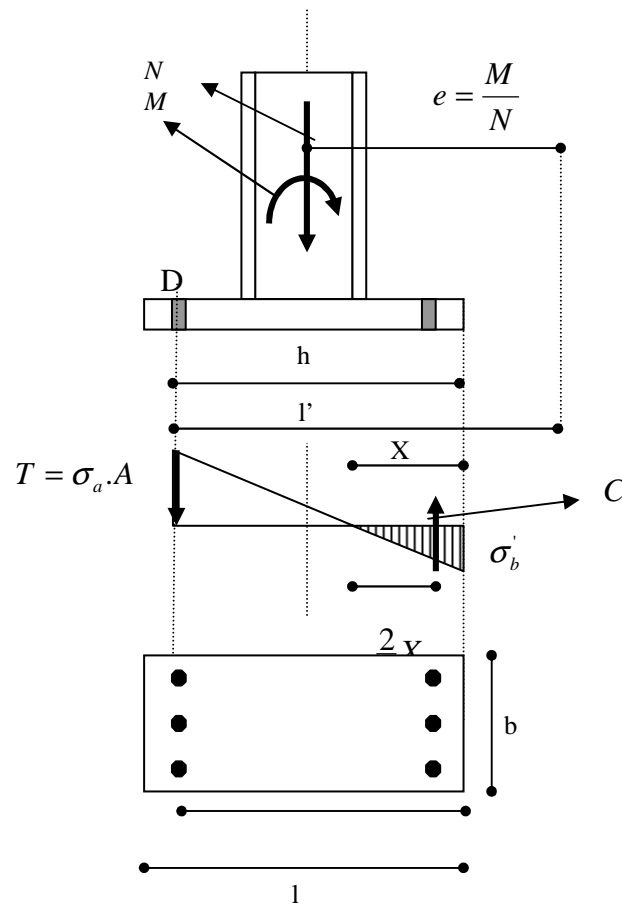
En plus on doit s'assurer que l'épaisseur et la longueur de soudure de la traverse avec le poteau soient suffisantes :

2.2- Plaque d'assise sous l'effet d'une flexion composée simple :

Sous l'effet d'une flexion composée, une partie de la plaque d'assise se trouve comprimée sur le béton et l'autre partie sera en principe soulevée, mais ce soulèvement sera empêché par les boulons d'ancrage. Pour pouvoir vérifier la résistance il faut déterminer les contraintes dans la plaque et sur les boulons.

Soient alors :

- N et M les efforts engendrés par les charges extérieures ;
- $b.l$ les dimensions de la plaque d'assise ;
- T l'effort de traction total dans les boulons ;
- C l'effort de compression dans la partie comprimée de la plaque ;
- A la section totale des boulons tendus (en zone de traction) ;
- $n = \frac{E_a}{E_b}$ le coefficient d'équivalence.



$$T = A \cdot \sigma_a \quad C = \frac{1}{2} \sigma'_b \cdot b \cdot X$$

$$\frac{\sigma_a}{n} \cdot \frac{1}{h-X} = \frac{\sigma'_b}{X} \quad \rightarrow \quad \sigma_a = n \cdot \sigma'_b \cdot \frac{h-X}{h}$$

Equilibre des forces : $N + T = C$

Equilibre des moments :

$$\sum M/D = 0 \quad \rightarrow \quad C \left(h - \frac{X}{3} \right) = N \cdot l'$$

$$\rightarrow \quad C \left(h - \frac{X}{3} \right) = (C - T) \cdot l'$$

En remplaçant C et T par leur valeurs respectives et on posant ; on aura à résoudre l'équation en X :

$$\frac{1}{2} \sigma'_b \cdot b \cdot X \left(h - \frac{X}{3} \right) = \left(\frac{1}{2} \sigma'_b \cdot b \cdot X - A \cdot \sigma_a \right) \cdot l'$$

$$\rightarrow X^3 + 3 \cdot (l' - h) \cdot X^2 + 6 \cdot n \cdot \frac{l'}{b} \cdot A \cdot X - 6 \cdot n \cdot \frac{l'}{b} \cdot A \cdot h = 0$$

En considérant $n = 15$ l'équation s'écrira :

$$X^3 + 3 \cdot (l' - h) \cdot X^2 + 90 \cdot \frac{l'}{b} \cdot A \cdot X - 90 \cdot \frac{l'}{b} \cdot A \cdot h = 0$$

La résolution de cette équation est indispensable pour pouvoir déterminer les contraintes.

Soit alors X_0 solution ; les contraintes seront :

$$\sum M/D = 0 \rightarrow \sigma'_b = \frac{2 \cdot N \cdot l'}{b \cdot X_0 \left(h - \frac{X_0}{3} \right)}$$

Les dimensions de la plaque b et l sont suffisantes si :

$$\sigma'_b \leq \overline{\sigma'_b}$$

A partir de la somme des moments par rapport au point E d'application de la force C ; l'effort dans les boulons d'ancrage sera :

$$\sum M/E = 0 \rightarrow T \cdot \left(h - \frac{X_0}{3} \right) = N \cdot \left(l' - h + \frac{X_0}{3} \right)$$

$$\rightarrow T = N \cdot \left(\frac{3 \cdot l' - 3 \cdot h + X_0}{3 \cdot h - X_0} \right)$$

La vérification de la résistance des boulons d'ancrage dépend du nombre et du type de boulons utilisés et de l'effort T et de la réglementation en vigueur.

Ancrage des boulons

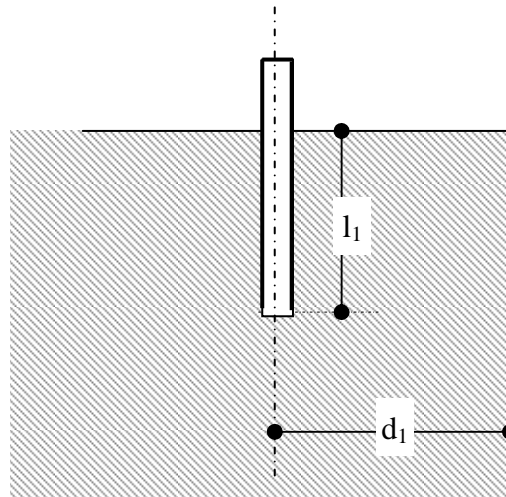
L'effort de traction dans un boulons doit être inférieur à l'effort d'ancrage ultime.

Les conditions d'ancrage suivantes sont fixées par le CM66

Soient :

- \emptyset : le diamètre du boulon ;
- g_c : le dosage en ciment du béton de la fondation en kg/m^3 ;
- l, l_1, l_2, r, d_1, d et R voir figures ci-dessus.
-

Capacité d'ancrage pour un **boulon rectiligne** :

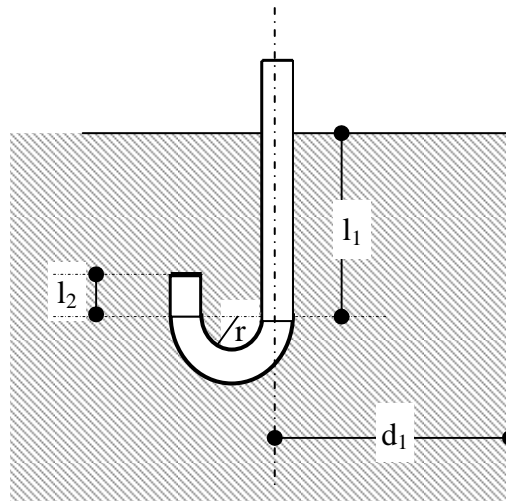


L'effort d'ancrage ultime par boulon N_a selon CM66

$$N_a = 0,1 \cdot \left(1 + \frac{7 \cdot g_c}{1000}\right) \cdot \frac{\phi \cdot l_1}{\left(1 + \frac{\phi}{d_1}\right)^2}$$

Capacité d'ancrage pour un **boulon avec crochet**

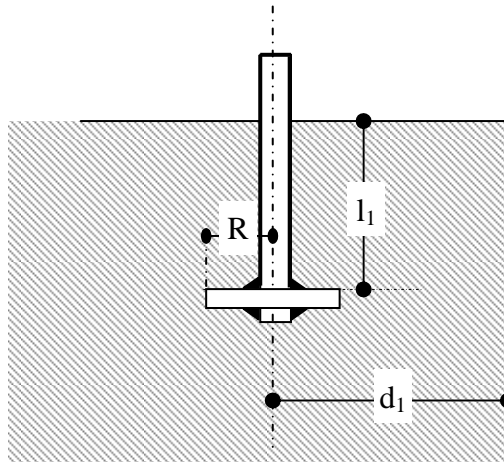
:



L'effort d'ancrage ultime par boulon N_a selon CM66

$$N_a = 0,1 \cdot \left(1 + \frac{7 \cdot g_c}{1000}\right) \cdot \frac{\phi}{\left(1 + \frac{\phi}{d_1}\right)^2} \cdot (l_1 + 6,4 \cdot r + 3,5 \cdot l_2)$$

Capacité d'ancrage pour **un boulon avec plaque d'ancrage** :



L'effort d'ancrage ultime par boulon N_a selon CM66

$$N_a = 0,1 \cdot \left(1 + \frac{7 \cdot g_c}{1000}\right) \cdot \frac{\phi \cdot l_1}{\left(1 + \frac{\phi}{d_1}\right)^2} + \frac{2 \cdot g_c}{100} R^2 \cdot \left(1 - \frac{R}{l_1}\right) \quad \text{si } l_1 \leq d_1$$

$$N_a = 0,1 \cdot \left(1 + \frac{7 \cdot g_c}{1000}\right) \cdot \frac{\phi \cdot l_1}{\left(1 + \frac{\phi}{d_1}\right)^2} + \frac{2 \cdot g_c}{100} R^2 \cdot \left(1 - \frac{R}{d_1}\right) \quad \text{si } l_1 > d_1$$

Exercice plaques d'assise :

Soit un poteau de section HEA 240, soumis à un effort de compression $N = 140 \text{ t}$. le poteau s'appuie sur une fondation en béton armé $\bar{\sigma}_b = 250 \text{ kg/cm}^2$. Déterminer les dimensions de la plaque d'assise et placer les raidisseurs si-nécessaire.

On donne : poteau HEA 240 ; $h = 23 \text{ cm}$; $b = 24 \text{ cm}$; $f_y = 2350 \text{ kg/cm}^2$

Solution :

Soient L , B et e_{pl} respectivement la longueur, la largeur et l'épaisseur de la plaque d'assise.

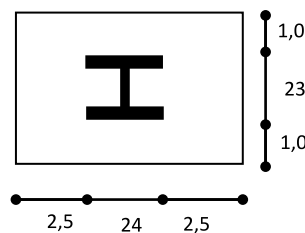
Pour éviter l'écrasement du béton :

$$\frac{N}{B \cdot L} \leq \bar{\sigma}_b \quad \text{donc: } B \cdot L \geq \frac{N}{\bar{\sigma}_b} = \frac{140000}{250} = 560 \text{ cm}^2$$

Pour une bonne répartition du matériau :

$$\frac{23}{24} = \frac{B}{L} \quad \text{donc } L = 1,04 \cdot B$$

$$B = \sqrt{\frac{560}{1,04}} = 23,2 \text{ cm} \approx 25 \text{ cm} \quad L = 1,04 \cdot 25 = 26,0 \text{ cm} \approx 29 \text{ cm}$$



Comme le montre la figure : $c = \max(2,5; 1) = 2,5 \text{ cm}$

$$\sigma_b = \frac{140000}{25 \cdot 29} = 193,1 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad M = \frac{193,1 \cdot 2,5^2}{2} = 603,4 \text{ kg.cm}$$

$$e_{pl} \geq \sqrt{\frac{6 \cdot 603,4}{2350}} = 1,24 \text{ cm}; \quad \text{on prendra } e_{pl} = 1,4 \text{ cm}$$

e_{pl} étant inférieure à 3 cm donc les raidisseurs ne sont pas nécessaires

Exercice plaques d'assise :

Soit un poteau de section HEA 240, soumis à un effort de compression $N = 570 \text{ t}$. le poteau s'appuie sur une fondation en béton armé $[\bar{\sigma}_b = 250 \text{ kg/cm}^2]$. Déterminer les dimensions de la plaque d'assise et placer les raidisseurs si-nécessaire.

On donne : poteau HEA 600 ; $h = 60 \text{ cm}$; $b = 30 \text{ cm}$; $f_y = 2350 \text{ kg/cm}^2$

Solution :

Soient L , B et e_{pl} respectivement la longueur, la largeur et l'épaisseur de la plaque d'assise.

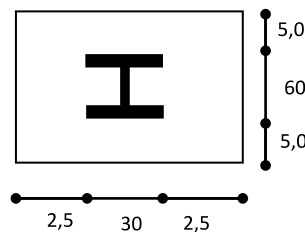
Pour éviter l'écrasement du béton :

$$\frac{N}{B \cdot L} \leq \bar{\sigma}_b \quad \text{donc:} \quad B \cdot L \geq \frac{N}{\bar{\sigma}_b} = \frac{570000}{250} = 2280 \text{ cm}^2$$

Pour une bonne répartition du matériau :

$$\frac{30}{60} = \frac{B}{L} \quad \text{donc} \quad L = 2 \cdot B$$

$$B = \sqrt{0,5 \cdot 2280} = 33,76 \text{ cm} \approx 35 \text{ cm} \quad L = 2 \cdot 35 = 70 \text{ cm}$$



Comme le montre la figure : $c = \max(2,5; 5) = 5 \text{ cm}$

$$\sigma_b = \frac{570000}{35 \cdot 70} = 232,6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad M = \frac{232,6 \cdot 1,5^2}{2} = 2908,16 \text{ kg.cm}$$

$$e_{pl} \geq \sqrt{\frac{6 \cdot 603,4}{2350}} = 2,72 \text{ cm}; \quad \text{on prendra } e_{pl} = 3,0 \text{ cm}$$

e_{pl} étant inférieure à 3 cm donc les raidisseurs ne sont pas nécessaires.

Exercice plaques d'assise :

Soit un poteau de section HEA 240, soumis à un effort de compression $N = 600 \text{ t}$. le poteau s'appuie sur une fondation en béton armé $\bar{\sigma}_b = 250 \text{ kg/cm}^2$. Déterminer les dimensions de la plaque d'assise et placer les raidisseurs si-nécessaire.

On donne : poteau HEA 600 ; $h = 60 \text{ cm}$; $b = 30 \text{ cm}$; $f_y = 2350 \text{ kg/cm}^2$

Solution :

Soient L , B et e_{pl} respectivement la longueur, la largeur et l'épaisseur de la plaque d'assise.

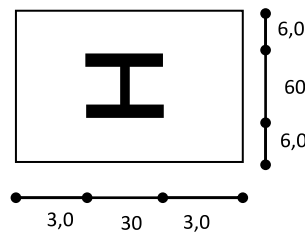
Pour éviter l'écrasement du béton :

$$\frac{N}{B.L} \leq \bar{\sigma}_b \text{ donc: } B.L \geq \frac{N}{\bar{\sigma}_b} = \frac{600000}{250} = 2400 \text{ cm}^2$$

Pour une bonne répartition du matériau :

$$\frac{30}{60} = \frac{B}{L} \text{ donc } L = 2.B$$

$$B = \sqrt{0,5.2400} = 34,64 \text{ cm} \approx 36 \text{ cm} \quad L = 2.35 = 72 \text{ cm}$$



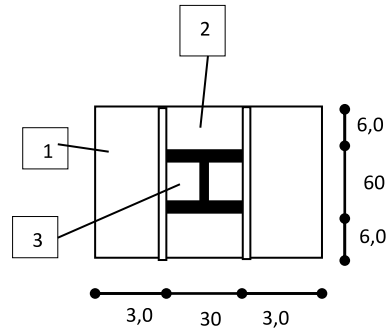
Comme le montre la figure : $c = \max(3; 6) = 6 \text{ cm}$

$$\sigma_b = \frac{600000}{36.72} = 231,5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \quad M = \frac{231,5.6^2}{2} = 4167 \text{ kg.cm}$$

$$e_{pl} \geq \sqrt{\frac{6.603,4}{2350}} = 3,26 \text{ cm}$$

e_{pl} étant supérieur à 3 cm donc les raidisseurs sont nécessaires. On placera alors un raidisseur d'épaisseur $e_R = 1,2 \text{ cm}$

Raidisseur :



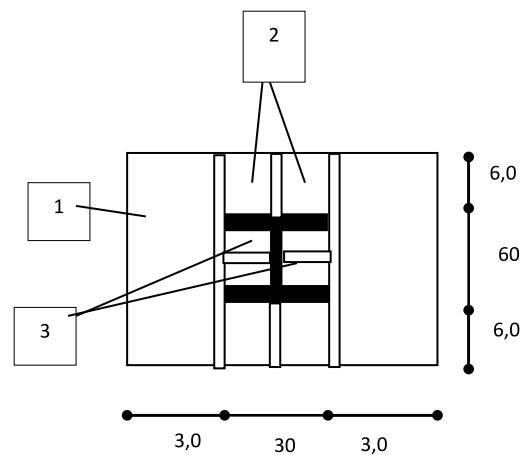
$$M_1 = 231,5 \cdot \frac{(3 - 1,2)^2}{2} = 375,3 \text{ kg.cm}$$

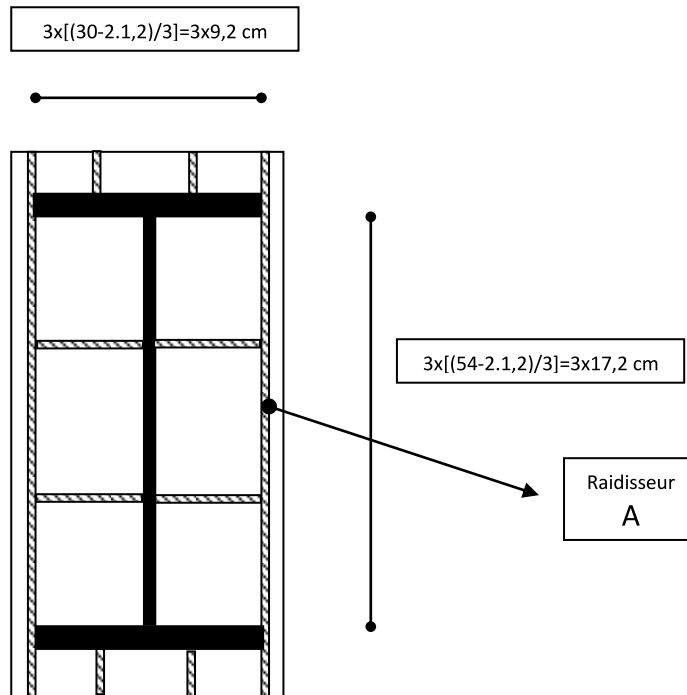
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{6}{30} = 0,2 < 0,5 \quad \text{donc} \quad M_2 = \frac{231,5 \cdot 6^2}{2} = 4167 \text{ kg.cm}$$

$$a = 14,225 \text{ cm} ; b = 54 \text{ cm} \quad \frac{b}{a} = \frac{54}{14,225} = 3,79 > 2 \quad \text{donc} \quad \varphi = 0,125$$

$$M_3 = 0,125 \cdot 231,5 \cdot 14,225^2 = 5855,5 \text{ kg.cm}$$

M_3 étant supérieure à 4167 kg.cm il faut renforcer la zone 3 et la zone 2 en plaçant des raidisseurs pour diminuer le moment en dessous de 4167 kg.cm.





Zone 2 :

$$a_1 = 6 \text{ cm}; \quad b_1 = 9,2 \text{ cm} \quad \frac{a_1}{b_1} = 0,65 > 0,5 \quad \chi = 0,08$$

$$M_2 = 0,08.231,5.9,2^2 = 1567,5 \text{ kg.cm}$$

Zone 3 :

$$a_2 = 14,225 \text{ cm}; \quad b_2 = 17,2 \text{ cm} \quad \frac{b_2}{a_2} = 1,2 \quad \varphi = 0,063$$

$$M_2 = 0,063.231,5.14,225^2 = 2951,18 \text{ kg.cm}$$

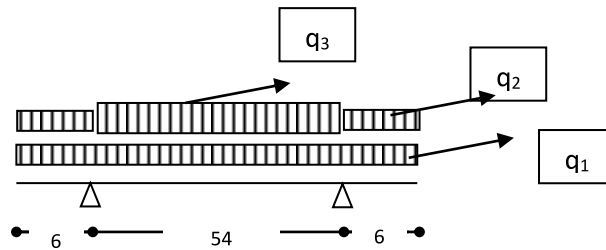
$$M = \max (M_1; M_2; M_3) \quad M = 2951,18 \text{ kg.cm}$$

$$e_{pl} \geq \sqrt{\frac{6.2951,18}{2350}} = 2,7 \text{ cm};$$

on adoptera alors une épaisseur $e_{pl} = 3 \text{ cm}$

Hauteur du raidisseur :

On calculera la hauteur du raidisseur A et on adoptera la même pour les autres :



$$q_1 = 231,5 \cdot 3 = 694,5 \frac{kg}{cm}$$

$$q_2 = 231,5 \cdot \frac{9,2}{2} = 1064,9 \frac{kg}{cm}$$

$$q_3 = 231,5 \cdot \frac{14,225}{2} = 1646,5 \frac{kg}{cm}$$

$$\text{Sur appui: } M_a = (694,5 + 1064,9) \cdot \frac{6^2}{2} = 31669,2 \text{ kg.cm}$$

$$\text{En travée: } M_t = (694,5 + 1646,5) \cdot \frac{54^2}{8} - 31669,2 = 821625,3 \text{ kg.cm}$$

$$M = \max(M_t; M_a)$$

$$e_R \geq \sqrt{\frac{6 \cdot 821625,3}{1,2 \cdot 2350}} = 41,8 \text{ cm} ; \quad \text{on adoptera une hauteur de 45 cm}$$

On doit par la suite vérifier la section du raidisseur à l'effort tranchant sur appui et on doit calculer l'épaisseur de la soudure sur toute la hauteur du raidisseur.

La valeur de la réaction au niveau de l'appui : $R = 73,76 \text{ t}$; $T_{max} = 63,21 \text{ t}$; $M_a = 0,316 \text{ t.m}$

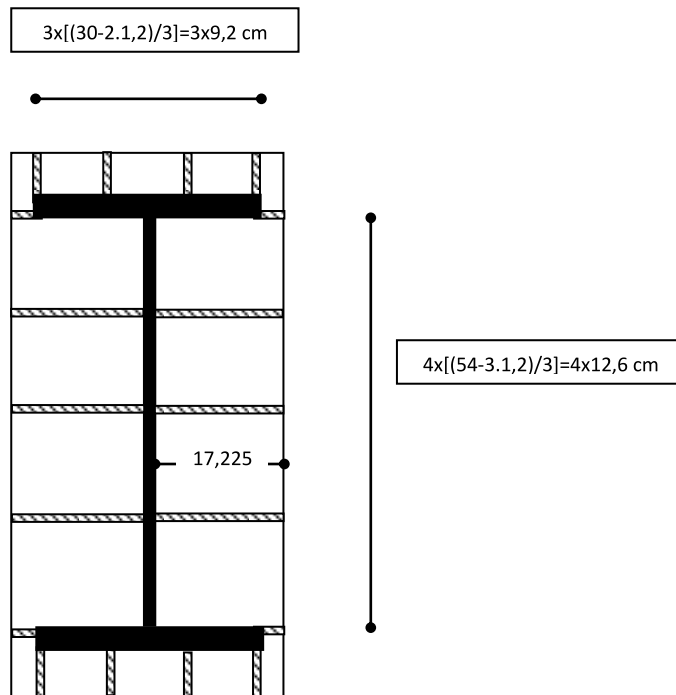
$$\tau = \frac{63,21 \cdot 1000}{45 \cdot 1,2} = 1170,5 \frac{kg}{cm^2} < \frac{2350}{\sqrt{3}} = 1356,8 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{6 \cdot 0,316 \cdot 100000}{1,2 \cdot 45^2} = 78,0 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} = 2028,8 \frac{kg}{cm^2} < 2350 \text{ kg/cm}^2$$

Condition de résistance du raidisseur vérifiée.

Autre solution :



Zone 2 :

$$a_1 = 17,225 \text{ cm}; \quad b_1 = 12,6 \text{ cm} \quad \frac{a_1}{b_1} = 1,4 > 0,5 \quad \chi = 0,1125$$

$$M_2 = 0,125 \cdot 231,5 \cdot 12,6^2 = 4594,1 \text{ kg.cm}$$