

COURS DE MECANIQUE

2ème année

Catherine POTEL, Philippe GATIGNOL

A noter que la numérotation des paragraphes adoptée ici est calquée sur celle du cours oral afin de faciliter le suivi du cours magistral, mais ne répond pas aux normes de présentation usuelles d'un document écrit.

Chapitre 2. LIAISONS MECANIQUES - MODELISATION

Université du Maine - UFR Sciences et Techniques

INTRODUCTION

Un système mécanique est en général soumis à un certain nombre d'actions tendant à assurer son équilibre ou à modifier son mouvement, par rapport à un repère d'observation.

▪ A notre échelle habituelle, qui est celle de l'étude de la plupart des machines et mécanismes, on peut distinguer *deux types d'actions* :

- les *actions à distance*, telles que l'attraction de la Terre sur un satellite, ou tout simplement l'action de pesanteur à la surface de la Terre, ou encore les actions magnétiques, électrostatiques...
- les *actions par contact* dues à la présence et au mouvement des objets avoisinants, liés à l'objet étudié par des liaisons mécaniques :

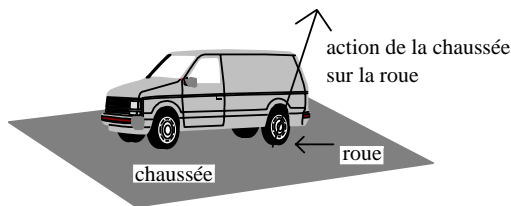
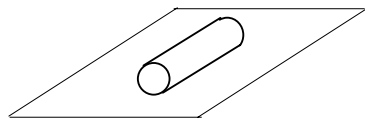


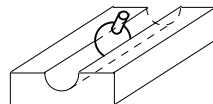
Figure 2.1

Ces actions de contact peuvent aussi être dues à la présence et au mouvement d'un fluide dans lequel l'objet est situé : poussée d'Archimède pour un poisson, résistance de l'air pour un avion, par exemple.

▪ Par ailleurs, pour un type comme pour l'autre, on peut distinguer les *actions ponctuelles*, qui s'exercent en un point précis du système, et les *actions réparties sur un volume* ou *sur une surface* (éventuellement le long d'une ligne, figure 2.2).



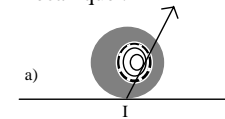
Contact linéaire rectiligne



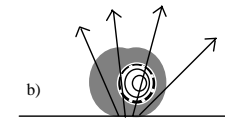
Contact linéaire circulaire

Figure 2.2

Cette dernière distinction dépend en général de la modélisation géométrique du système mécanique :



Si la roue d'une voiture est schématisée par un disque indéformable, l'action de la chaussée s'exerce au point de contact I (figure 2.3-a).



Mais si l'on tient compte de l'écrasement du pneu, l'action est répartie sur la surface de contact (figure 2.3-b).

Figure 2.3

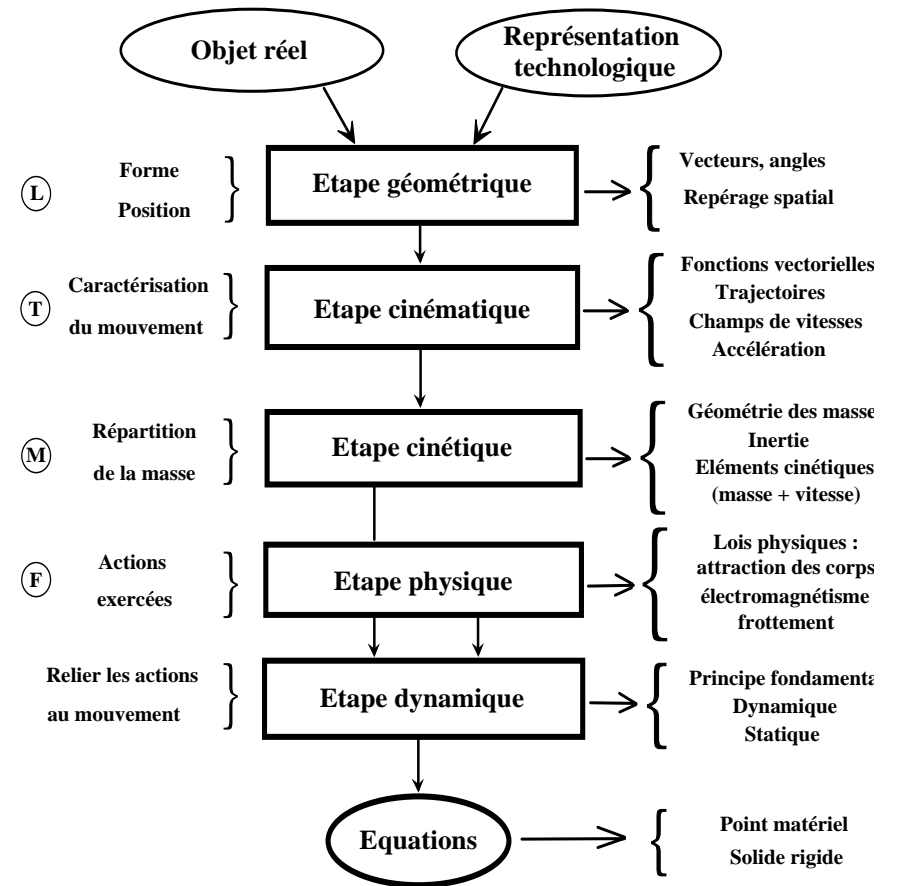


Figure 2.4

I EXEMPLE DU JOINT DE CARDAN

Définition : Un joint de cardan permet la transmission d'un mouvement de **rotation** entre deux arbres **concourants**. Il est composé de **deux chapes** et d'un **croisillon**.

Remarque : on peut également appeler "fourches" les chapes.

C'est une chaîne fermée à quatre éléments (figure 2.5):

- S_0 : Bâti (caisse de la voiture)
- S_1 : Fourche qui tourne à $\omega_1(t) = \text{constante}$ sans glisser (moteur de la voiture)
- S_2 : Croisillon avec deux axes de rotation
- S_3 : Fourche qui tourne à $\omega_3(t) \neq \omega_1(t)$ (roues)
- S'_0 : Bâti

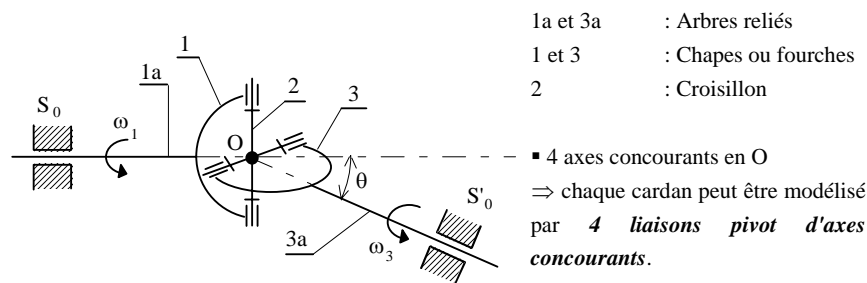


Figure 2.5

■ Montage à deux joints simples (Figure 2.6)

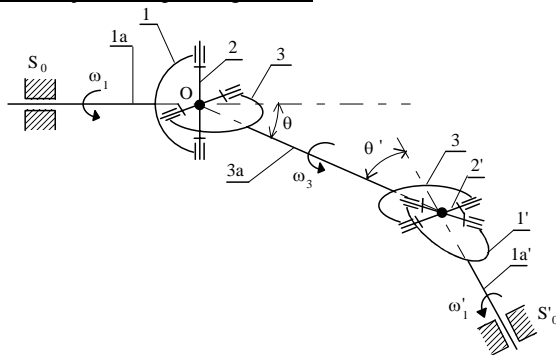


Figure 2.6

Le second joint corrige les irrégularités de vitesse du premier joint en présentant le même défaut, mais en sens opposé. La transmission est alors **homocinéétique** :

$$\boxed{\forall t, \omega_1(t) = \omega'_1(t)} \quad (2.1)$$

II DEGRES DE LIBERTE

1 Décomposition du déplacement d'un solide dans un repère

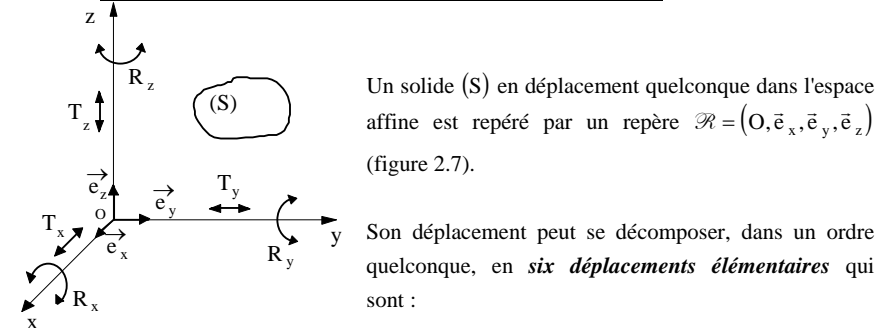


Figure 2.7

- Rotation R_x autour de (O, \vec{e}_x) , rotation R_y autour de (O, \vec{e}_y) , rotation R_z autour de (O, \vec{e}_z) ,
- Translation T_x suivant (O, \vec{e}_x) , translation T_y suivant (O, \vec{e}_y) , translation T_z suivant (O, \vec{e}_z) .

■ **Degrés de liberté d'un solide (ddl)** : par définition, les ddl d'un solide sont **ces déplacements élémentaires**

Dans l'espace : six ddl : trois rotations
trois translations

Dans le plan : trois ddl : une rotation
deux translations

2 Degrés de liberté d'une liaison - degré de liaison

Une liaison élémentaire entre deux solides (S_1) et (S_2) est créée par le **contact** d'une surface associée au solide (S_1) sur une surface associée à (S_2). Pour caractériser la nature de leur liaison, il faut étudier les **les mouvements relatifs de (S_1) par rapport à (S_2)**.

Définitions :

■ Le **degré de liberté (ddl)** d'une liaison est le **nombre de déplacements élémentaires indépendants** autorisés par cette liaison.

■ Par opposition, le **degré de liaison (ddl_n)** est le **nombre de déplacements élémentaires interdits**.

Le degré de liberté est donc une variable qui peut prendre *deux états* auxquels on peut associer :

le chiffre **0** lorsque le degré de liberté est *impossible*.

le chiffre **1** lorsque le degré de liberté est *possible*.

A un degré de liberté supprimé correspond un degré de liaison :

$$\text{degré de liberté (ddl)} + \text{degré de liaison (ddln)} = 6 \quad (2.2)$$

III MODELISATION DES LIAISONS BINAIRES PRINCIPALES

1. Les onze liaisons binaires principales

A chaque contact autorisant des déplacements entre deux ensembles matériels (S_1) et (S_2), on définit un repère appelé *repère local idéal* qui permet d'exprimer simplement les propriétés de contact.

origine A : point privilégié de la géométrie de contact (appartient en général à un élément de symétrie de la surface de contact).

axe principal : axe de symétrie privilégié de la surface de contact, s'il existe. Les deux autres axes sont tels que le repère soit orthonormé direct.

Le tableau page suivante résume les rotations (R) ou translations (T) permises pour les onze liaisons usuelles :

- Liaison encastrement
- Liaison pivot
- Liaison glissière
- Liaison hélicoïdale
- Liaison pivot glissant
- Liaison sphérique à doigt
- Liaison rotule ou sphérique
- Liaison appui plan
- Liaison linéaire annulaire
- Liaison linéaire rectiligne
- Liaison ponctuelle

Le **nombre de 1** dans le tableau donne donc le **nombre de degrés de liberté** de la liaison.

⚠ La liaison hélicoïdale n'autorise qu'un seul degré de liberté bien que le tableau comporte deux "1". En effet, la rotation autour de l'axe \vec{e}_x et la translation suivant cet axe sont

conjugués : si l'on note p le pas de la liaison, on a la relation suivante :

$$T_x = R_x \frac{p}{2\pi}, \quad \text{avec } R_x \text{ en radian.} \quad (2.3)$$

Nom de la liaison	Degrés de liberté	Représentation générale	Projection orthogonale	Perspective												
Liaison encastrement	<table><tr><td></td><td>R</td><td>T</td></tr><tr><td>\vec{e}_x</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>\vec{e}_y</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>\vec{e}_z</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>		R	T	\vec{e}_x	0	0	\vec{e}_y	0	0	\vec{e}_z	0	0			
	R	T														
\vec{e}_x	0	0														
\vec{e}_y	0	0														
\vec{e}_z	0	0														
Liaison pivot Centre A Axe (A, \vec{e}_x)	<table><tr><td></td><td>R</td><td>T</td></tr><tr><td>\vec{e}_x</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>\vec{e}_y</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>\vec{e}_z</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>		R	T	\vec{e}_x	1	0	\vec{e}_y	0	0	\vec{e}_z	0	0			
	R	T														
\vec{e}_x	1	0														
\vec{e}_y	0	0														
\vec{e}_z	0	0														
Liaison glissière Axe (A, \vec{e}_x)	<table><tr><td></td><td>R</td><td>T</td></tr><tr><td>\vec{e}_x</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>\vec{e}_y</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>\vec{e}_z</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>		R	T	\vec{e}_x	0	1	\vec{e}_y	0	0	\vec{e}_z	0	0			
	R	T														
\vec{e}_x	0	1														
\vec{e}_y	0	0														
\vec{e}_z	0	0														
Liaison hélicoïdale Centre A axe (A, \vec{e}_x)	<table><tr><td></td><td>R</td><td>T</td></tr><tr><td>\vec{e}_x</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>\vec{e}_y</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>\vec{e}_z</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>		R	T	\vec{e}_x	1	1	\vec{e}_y	0	0	\vec{e}_z	0	0			
	R	T														
\vec{e}_x	1	1														
\vec{e}_y	0	0														
\vec{e}_z	0	0														
Liaison pivot glissant Centre A Axe (A, \vec{e}_x)	<table><tr><td></td><td>R</td><td>T</td></tr><tr><td>\vec{e}_x</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>\vec{e}_y</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>\vec{e}_z</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>		R	T	\vec{e}_x	1	1	\vec{e}_y	0	0	\vec{e}_z	0	0			
	R	T														
\vec{e}_x	1	1														
\vec{e}_y	0	0														
\vec{e}_z	0	0														
Liaison sphérique à doigt Axe doigt (A, \vec{e}_y) Rainure dans (A, \vec{e}_x, \vec{e}_y)	<table><tr><td></td><td>R</td><td>T</td></tr><tr><td>\vec{e}_x</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>\vec{e}_y</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>\vec{e}_z</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>		R	T	\vec{e}_x	0	0	\vec{e}_y	1	0	\vec{e}_z	1	0			
	R	T														
\vec{e}_x	0	0														
\vec{e}_y	1	0														
\vec{e}_z	1	0														
Liaison rotule ou sphérique Centre A	<table><tr><td></td><td>R</td><td>T</td></tr><tr><td>\vec{e}_x</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>\vec{e}_y</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>\vec{e}_z</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>		R	T	\vec{e}_x	1	0	\vec{e}_y	1	0	\vec{e}_z	1	0			
	R	T														
\vec{e}_x	1	0														
\vec{e}_y	1	0														
\vec{e}_z	1	0														
Liaison appui plan Normale (A, \vec{e}_z)	<table><tr><td></td><td>R</td><td>T</td></tr><tr><td>\vec{e}_x</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>\vec{e}_y</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>\vec{e}_z</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>		R	T	\vec{e}_x	0	1	\vec{e}_y	0	1	\vec{e}_z	1	0			
	R	T														
\vec{e}_x	0	1														
\vec{e}_y	0	1														
\vec{e}_z	1	0														
Liaison linéaire annulaire (sphère-cylindre) Centre A Axe (A, \vec{e}_x)	<table><tr><td></td><td>R</td><td>T</td></tr><tr><td>\vec{e}_x</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>\vec{e}_y</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>\vec{e}_z</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>		R	T	\vec{e}_x	1	1	\vec{e}_y	1	0	\vec{e}_z	1	0			
	R	T														
\vec{e}_x	1	1														
\vec{e}_y	1	0														
\vec{e}_z	1	0														
Liaison linéaire rectiligne Normale (A, \vec{e}_y) Arête (A, \vec{e}_x)	<table><tr><td></td><td>R</td><td>T</td></tr><tr><td>\vec{e}_x</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>\vec{e}_y</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>\vec{e}_z</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>		R	T	\vec{e}_x	1	1	\vec{e}_y	1	0	\vec{e}_z	0	1			
	R	T														
\vec{e}_x	1	1														
\vec{e}_y	1	0														
\vec{e}_z	0	1														
Liaison ponctuelle (sphère-plan) Centre A Normale (A, \vec{e}_x)	<table><tr><td></td><td>R</td><td>T</td></tr><tr><td>\vec{e}_x</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>\vec{e}_y</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>\vec{e}_z</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>		R	T	\vec{e}_x	1	0	\vec{e}_y	1	1	\vec{e}_z	1	1			
	R	T														
\vec{e}_x	1	0														
\vec{e}_y	1	1														
\vec{e}_z	1	1														

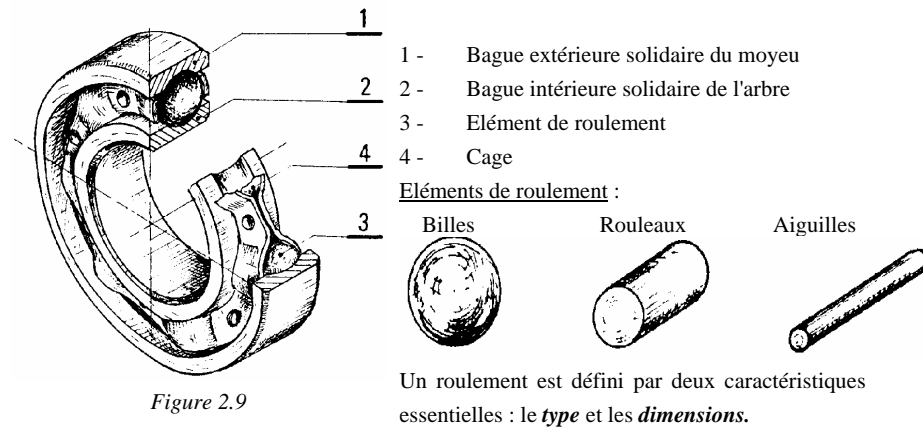
Figure 2.8

2. Exemples de solutions technologiques

a) Les roulements

Définition : Un roulement est un organe qui assure une **liaison mobile** entre deux éléments d'un mécanisme roulant l'un sur l'autre. Il permet leur **rotation relative**, sous charge, avec précision et un **frottement minimal**.

Eléments constructifs (figure 2.9)

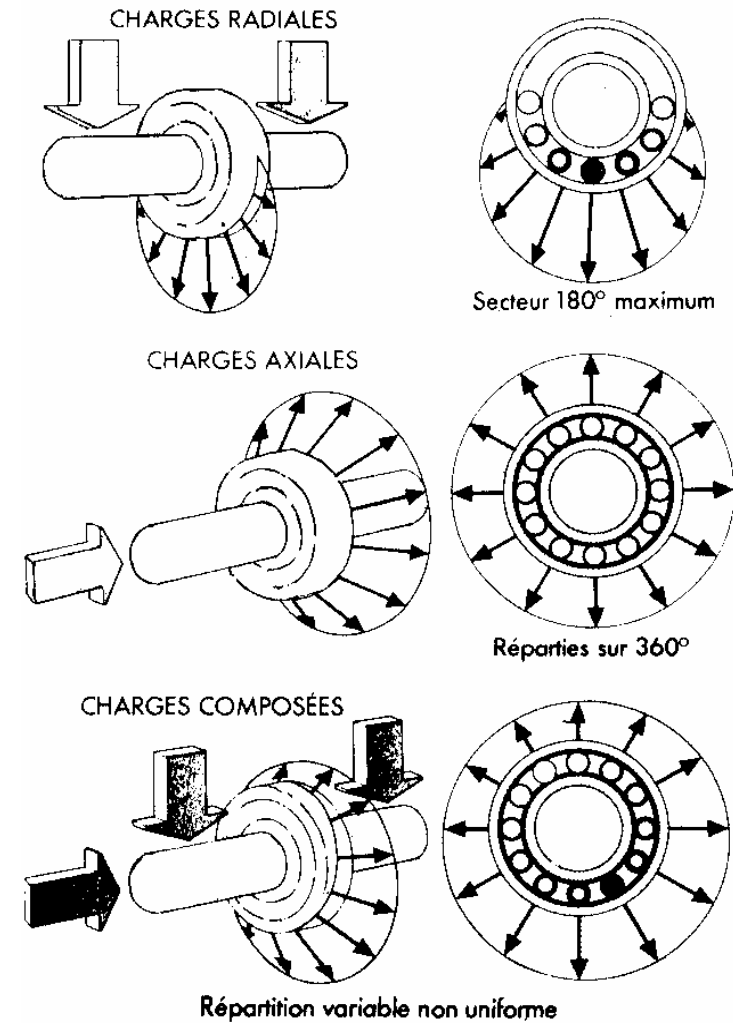


Principaux types de roulements

On se reportera à la planche pour la modélisation de ces roulements sous forme de liaison.

- Roulements à billes :
 - 1 rangée de billes
 - 2 rangées de billes
- Roulements à rouleaux :
 - cylindriques
 - coniques
 - sphériques
- Roulements à aiguilles
- Butées :
 - à billes
 - à rouleaux
 - à aiguilles

Répartition des charges sur un roulement



Charge radiale : charge perpendiculaire à l'axe de l'arbre (la ligne de charge est radiale par rapport à l'axe).

b) Liaison encastrement

Les solutions technologiques correspondant à un encastrement peuvent être :

- soudage
- ajustement serré
- goujonage, etc...

c) Liaison pivot

↳ roulement à deux rangées de billes

d) Liaison glissière

- ↳
- guidage avec patins à aiguille
 - guidage avec cages à aiguille
 - clavetage
 - douilles à billes

e) Liaison hélicoïdale

↳ vis à billes

f) Liaison pivot glissant

- ↳
- colonnes à billes
 - dispositif combiné

g) Liaison sphérique à un doigt

- ↳
- joint de cardan
 - accouplement à ergots

h) Liaison rotule

- ↳
- roulements à billes
 - rotule
 - rouleaux coniques

i) Liaison appui plan

- ↳
- butées à billes
 - butées à rouleaux

j) Liaison ponctuelle

- ↳
- bille dans la souris associée à un ordinateur.

IV **MODELISATION DES EFFORTS MECANIQUES**1 **Insuffisance des vecteurs libres en mécanique**

Lorsque l'on exerce un **effort** sur un objet, on peut *représenter géométriquement* cet effort par une **longueur**, proportionnelle à l'intensité de l'effort et indiquer également, par une **direction de droite orientée**, la direction et le sens dans lesquels cet effort s'exerce. Ces éléments définiraient un **vecteur libre**.

Cependant, ce vecteur libre est *insuffisant* pour représenter l'effort complètement. En effet, il convient de préciser de plus l'endroit où s'exerce cet effort, c'est-à-dire son "**point d'application**". L'exemple du serrage d'un écrou (figure 2.11) montre bien que les efforts représentés par les deux vecteurs équipollents $\vec{AA'}$ et $\vec{A_1A'_1}$, représentant du même vecteur libre \vec{F} , n'auront pas le même effet mécanique.

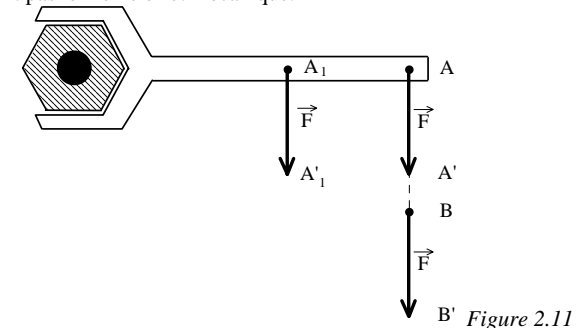


Figure 2.11

On pourrait alors penser que le bon concept est celui de vecteur lié. Cependant, si au lieu d'appliquer l'effort \vec{F} au point A on l'applique au point B, par exemple au moyen d'un câble AB, l'effet de serrage sera le même que pour une application directe en A. Les deux vecteurs liés $\vec{AA'}$ et $\vec{BB'}$ ont donc un effet mécanique équivalent, mais différent de celui de $\vec{A_1A'_1}$.

Ce qui vient d'être dit découle d'une observation de la vie courante, mais il repose en réalité sur le principe même de la dynamique, que nous étudierons plus tard au chapitre 4.

Ainsi, un **effort** sera représenté géométriquement par **une droite orientée** (la **ligne d'action** et le **sens** de l'action) et par une **longueur proportionnelle à l'intensité** de l'effort.

Mathématiquement, un effort \vec{F} appliqué au point A sera représenté par le glisseur (A, \vec{F}) .

Si B est un autre point de la ligne d'action, alors $(A, \vec{F}) = (B, \vec{F})$

▪ Dimension physique d'une force :

Exemple de force : le poids $P = mg$

m en kg dimension symbolisée par **M**

g en m/s^2 dimension symbolisée par **L T⁻²**

donc $[F] = [mg] = \mathbf{MLT^{-2}}$

L'unité d'une force est le **Newton**, c'est-à-dire : $1 \text{ N} = 1 \text{ kg.m.s}^{-2}$

2 Moment d'un glisseur en un point - notion de couple

Reprenons l'exemple du serrage d'un écrou (figure 2.12). On voit bien sur l'exemple de la figure ci-dessous, que pour une même intensité de la force \vec{F} , le serrage ne sera pas aussi efficace selon que la ligne d'action de la force est perpendiculaire à (PA) ou pas.

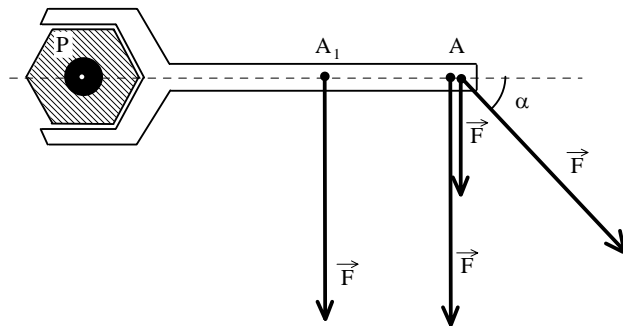


Figure 2.12

Trois paramètres vont donc intervenir :

- l'**intensité** (module) de la force \vec{F} appliquée : $|\vec{F}|$.

- l'**angle** de la ligne d'action (support) de \vec{F} avec l'axe de la clé : $\alpha = (\vec{PA}, \vec{F})$. L'efficacité est maximale pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

- la **longueur de la clé** : $PA = |\vec{PA}|$.

Une mesure de l'efficacité du serrage pourra donc être donnée par le produit de ces trois quantités :

$$|\vec{PA}| |\vec{F}| \sin(\vec{PA}, \vec{F})$$

On remarque que ce produit n'est autre que le module du **produit vectoriel** $\vec{PA} \wedge \vec{F}$. Ainsi, ce produit vectoriel est appelé à jouer un rôle important dans l'appréciation de l'efficacité d'une force \vec{F} dont la ligne d'action passe par A.

Définition : Etant donné un glisseur (A, \vec{F}) et un point P de l'espace, on appelle **moment** du glisseur (A, \vec{F}) au point P le **vecteur libre** défini par le produit vectoriel :

$$\vec{\mathcal{M}}_P(A, \vec{F}) = \vec{PA} \wedge \vec{F} \quad (2.4)$$

▪ Notion de couple :

Considérons l'action exercée sur un "tourne à gauche" (S) par son utilisateur (U) (figure 2.13).

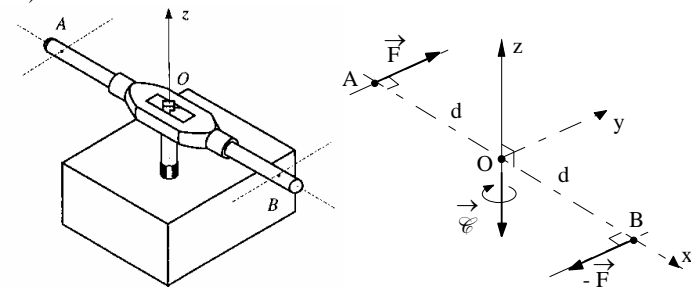


Figure 2.13

L'ensemble des forces exercées sur le système est une force nulle : $+\vec{F} - \vec{F} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} \circlearrowleft_{\vec{O}}(\vec{F}) + \circlearrowleft_{\vec{O}}(-\vec{F}) &= \vec{OA} \wedge \vec{F} + \vec{OB} \wedge (-\vec{F}) \\ &= \begin{vmatrix} -d & 0 & d & 0 \\ 0 & F & 0 & -F \\ \mathcal{B} & 0 & \mathcal{B} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & = \\ \mathcal{B} & -d F & \mathcal{B} & -d F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & = \\ \mathcal{B} & -d F & \mathcal{B} & -d F \end{vmatrix} = -2d F \vec{e}_z \end{aligned}$$

On appelle ce moment un **couple**.

▪ Dimensions physiques d'un moment :

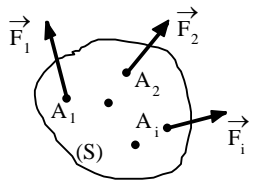
$$[\mathcal{M}] = [F][d] = \text{MLT}^{-2}\text{L}$$

L'unité d'un **moment** ou d'un **couple** est N.m

3 Représentation mathématique d'un action mécanique

Une **action mécanique** est modélisée par un **torseur**, défini par ses **éléments de réduction en un point**.

a) Application - notations



Soient n forces \vec{F}_i appliquées aux points A_i d'un solide (S) (figure 2.14). L'ensemble de ces forces est noté \mathcal{F} .

Figure 2.14

Le torseur des actions de \mathcal{F} sur le solide (S) est :

$$\{\mathcal{F} \rightarrow S\} = \{(A_1, \vec{F}_1), \dots, (A_n, \vec{F}_n)\}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \vec{\mathcal{R}}(\mathcal{F} \rightarrow S) = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n \\ \circlearrowleft_P(\mathcal{F} \rightarrow S) = \vec{PA}_1 \wedge \vec{F}_1 + \dots + \vec{PA}_n \wedge \vec{F}_n \end{cases} \quad (2.5) \quad (2.6)$$

qui sont les éléments de réduction du torseur au point P.

Notations : Dans le cas où l'on veut expliciter un torseur par sa résultante et son moment, il faudra alors préciser le **point** en lequel on calcule son moment, et l'on pourra alors noter :

$$\{\mathcal{F} \rightarrow S\} = \underset{P}{\left\{ \vec{\mathcal{R}}(\mathcal{F} \rightarrow S), \circlearrowleft_P(\mathcal{F} \rightarrow S) \right\}}. \quad (2.7)$$

Il est quelquefois commode d'expliciter les composantes de $\vec{\mathcal{R}}(\mathcal{F} \rightarrow S)$ et du moment $\circlearrowleft_P(\mathcal{F} \rightarrow S)$ sur la **base** \mathcal{B} . Dans ce cas, on peut employer la notation suivante :

$$\begin{aligned} &\vec{\mathcal{R}}(\mathcal{F} \rightarrow S) \Big|_{\mathcal{B}} \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \quad \circlearrowleft_P(\mathcal{F} \rightarrow S) \Big|_{\mathcal{B}} \begin{matrix} L \\ M \\ N \end{matrix} \\ \text{Si} &\quad \text{Y et} \quad \text{M} \quad \text{alors on peut aussi noter} \\ &\quad \mathcal{B} \Big| \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \quad \mathcal{B} \Big| \begin{matrix} L \\ M \\ N \end{matrix} \\ &\quad \left\{ \mathcal{F} \rightarrow S \right\} = \left\{ \begin{matrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{matrix} \right\}_{\mathcal{B}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

b) Torseur distributeur des vitesses

On a vu au chapitre 1 que le **torseur distributeur des vitesses** $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1)$, encore appelé parfois torseur cinématique, du repère \mathcal{R}_2 dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_1 à l'instant t a pour éléments de réduction en un point P_2 :

$$\vec{\mathcal{R}}(\mathcal{V}) = \vec{\Omega}(\mathcal{B}_2 / \mathcal{B}_1) \quad , \quad \circlearrowleft_{P_2}(\mathcal{V}) = \vec{V}(P_2 / \mathcal{R}_1). \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} &\vec{\Omega}(\mathcal{B}_2 / \mathcal{B}_1) \Big|_{\mathcal{B}} \begin{matrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{matrix} \quad \text{et} \quad \vec{V}(P_2 / \mathcal{R}_1) \Big|_{\mathcal{B}} \begin{matrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{matrix} \quad \text{alors} \\ \text{Si} &\quad \mathcal{B} \Big| \begin{matrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{matrix} \quad \mathcal{B} \Big| \begin{matrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{matrix} \\ &\quad \mathcal{V} = \left\{ \begin{matrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & v_z \end{matrix} \right\}_{P_2, \mathcal{B}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

D'après ce que l'on a vu au § II, on comprend bien que le **torseur distributeur des vitesses est représentatif des degrés de libertés du solide (S_2) par rapport au solide (S_1)**. La forme particulière du torseur distributeur des vitesses, dans le cas de chaque liaison, se déduit donc du tableau 2.8.

c) Torseur transmissible

Selon la nature de la liaison entre deux solides (S_1) et (S_2), le torseur $\{S_1 \rightarrow S_2\}$, parfois appelé torseur transmissible, aura une forme particulière :

$$\begin{aligned} &\vec{\mathcal{R}}(S_1 \rightarrow S_2) \Big|_{\mathcal{B}} \begin{matrix} X_{1/2} \\ Y_{1/2} \\ Z_{1/2} \end{matrix} \quad \circlearrowleft_{P_2}(S_1 \rightarrow S_2) \Big|_{\mathcal{B}} \begin{matrix} L_{1/2} \\ M_{1/2} \\ N_{1/2} \end{matrix} \\ \text{Si} &\quad \mathcal{B} \Big| \begin{matrix} X_{1/2} \\ Y_{1/2} \\ Z_{1/2} \end{matrix} \quad \mathcal{B} \Big| \begin{matrix} L_{1/2} \\ M_{1/2} \\ N_{1/2} \end{matrix} \quad \text{alors} \\ &\quad \left\{ S_1 \rightarrow S_2 \right\} = \left\{ \begin{matrix} X_{1/2} & L_{1/2} \\ Y_{1/2} & M_{1/2} \\ Z_{1/2} & N_{1/2} \end{matrix} \right\}_{P_2, \mathcal{B}} \end{aligned}$$

V CAS DES LIAISONS PARFAITES

1. Puissance des efforts appliqués à un solide rigide (A admettre, par anticipation sur le chapitre 5)

La puissance des actions de S_1 sur S_2 , relativement au repère \mathcal{R}_1 est définie par

$$\mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2 / \mathcal{R}_1) = \{S_1 \rightarrow S_2\} \cdot \mathcal{V}(\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1), \quad (2.12)$$

$$\text{soit } \mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2 / \mathcal{R}_1) = \vec{\mathcal{R}}(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{V}(P_2 / \mathcal{R}_1) + \vec{\mathcal{M}}_P(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{\Omega}(\mathcal{B}_2 / \mathcal{B}_1), \quad (2.13)$$

$$\text{soit } \mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2 / \mathcal{R}_1) = Xv_x + Yv_y + Zv_z + L\omega_x + M\omega_y + N\omega_z. \quad (2.14)$$

2. Liaison parfaite (sans frottement)

Une liaison parfaite ne consommant pas d'énergie, $\mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2 / \mathcal{R}_1) = 0$. Cela se traduit par l'équation :

$$\{S_1 \rightarrow S_2\} \cdot \mathcal{V}(\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1) = 0, \quad (2.15)$$

avec :

$$\{S_1 \rightarrow S_2\} \cdot \mathcal{V}(\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1) = \begin{matrix} Xv_x + Yv_y + Zv_z \\ + L\omega_x + M\omega_y + N\omega_z \end{matrix} = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} \omega_x, \omega_y, \omega_z \\ v_x, v_y, v_z \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Cela revient à traduire la **complémentarité** entre la cinématique de la liaison (ddl) et l'action mécanique qu'elle peut transmettre. Cette complémentarité se traduit par une certaine correspondance entre les composantes nulles des deux torseurs. La liaison hélicoïdale représente toutefois un cas particulier qui est détaillé ci-dessous.

Le tableau 2.15 donne les formes particulières de ces deux torseurs pour les liaisons parfaites usuelles déjà étudiées.

Explicitons $\{S_1 \rightarrow S_2\}$ dans le cas d'une liaison hélicoïdale :

$$\{S_1 \rightarrow S_2\} \cdot \mathcal{V}(\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1) = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_{1/2} & L_{1/2} \\ Y_{1/2} & M_{1/2} \\ Z_{1/2} & N_{1/2} \end{Bmatrix} = \omega_x L_{1/2} + v_x X_{1/2}$$

$$\text{donc } \{S_1 \rightarrow S_2\} \cdot \mathcal{V}(\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1) = 0 \quad \forall \begin{pmatrix} \omega_x, \omega_y, \omega_z \\ v_x, v_y, v_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \omega_x L_{1/2} + v_x X_{1/2} = 0$$

avec $Y_{1/2}, Z_{1/2}, M_{1/2}, N_{1/2}$ quelconques

On a donc une relation entre $L_{1/2}$ et $X_{1/2}$: $X_{1/2} = -\frac{\omega_x}{v_x} L_{1/2}$

Or $v_x = \frac{p}{2\pi} \omega_x$, d'où $X_{1/2} = k L_{1/2}$ avec $k = -\frac{2\pi}{p}$, p étant le pas de la liaison.

Nom de la liaison	Représentation générale	Torseur cinématique $\mathcal{V}(\mathcal{R}_2 / \mathcal{R}_1)$	Torseur transmissible $\mathcal{M}(S_1 \rightarrow S_2)$	Forme particulière conservée
Liaison encastrement		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_{1/2} & L_{1/2} \\ Y_{1/2} & M_{1/2} \\ Z_{1/2} & N_{1/2} \end{Bmatrix}$	En tout point de l'espace
Liaison pivot Centre A Axe (A, \vec{e}_x)		$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_{1/2} & 0 \\ Y_{1/2} & M_{1/2} \\ Z_{1/2} & N_{1/2} \end{Bmatrix}$	En tout point de (A, \vec{e}_x)
Liaison glissière Axe (A, \vec{e}_x)		$\begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_{1/2} \\ Y_{1/2} & M_{1/2} \\ Z_{1/2} & N_{1/2} \end{Bmatrix}$	En tout point de l'espace
Liaison hélicoïdale Centre A axe (A, \vec{e}_x)		$\begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_{1/2} & L_{1/2} \\ Y_{1/2} & M_{1/2} \\ Z_{1/2} & N_{1/2} \end{Bmatrix}$	En tout point de (A, \vec{e}_x) $v_x = \frac{p}{2\pi} \omega_x$ $X_{1/2} = k L_{1/2}$
Liaison pivot glissant Centre A Axe (A, \vec{e}_x)		$\begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1/2} & M_{1/2} \\ Z_{1/2} & N_{1/2} \end{Bmatrix}$	En tout point de (A, \vec{e}_x)
Liaison sphérique à doigt Axe doigt (A, \vec{e}_y) Rainure dans $(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$		$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_{1/2} & L_{1/2} \\ Y_{1/2} & 0 \\ Z_{1/2} & 0 \end{Bmatrix}$	Au point A
Liaison rotule ou sphérique Centre A		$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_{1/2} & 0 \\ Y_{1/2} & 0 \\ Z_{1/2} & 0 \end{Bmatrix}$	Au point A
Liaison appui plan Normale (A, \vec{e}_z)		$\begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_{1/2} \\ 0 & M_{1/2} \\ Z_{1/2} & 0 \end{Bmatrix}$	En tout point de l'espace
Liaison linéaire annulaire (sphère-cylindre) Centre A Axe (A, \vec{e}_x)		$\begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1/2} & 0 \\ Z_{1/2} & 0 \end{Bmatrix}$	Au point A
Liaison linéaire rectiligne Normale (A, \vec{e}_y) Arête (A, \vec{e}_x)		$\begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & 0 \\ 0 & v_z \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1/2} & 0 \\ 0 & N_{1/2} \end{Bmatrix}$	En tout point de $(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$
Liaison ponctuelle (sphère-plan) Centre A Normale (A, \vec{e}_x)		$\begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & v_z \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	En tout point de (A, \vec{e}_x)

Figure 2.15

VI ACTION MECANIQUE TRANSMISE PAR UN CONTACT PONCTUEL

1. Analyse géométrique et cinématique

Deux solides rigides (S_1) et (S_2) en contact l'un avec l'autre au cours du temps, auront en général à chaque instant t un point commun I , et, en ce point, un plan tangent commun et par suite une normale commune. En ce lieu de contact, trois points sont confondus à cet instant, mais sont séparés aux instants voisins $t + dt$. Il s'agit :

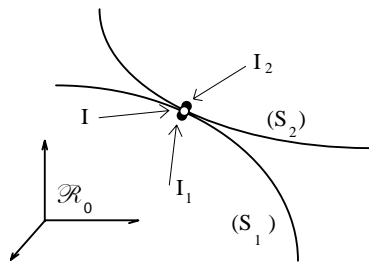


Figure 2.16

- du point géométrique où a lieu le contact, point que nous venons de noter I .

- du point I_1 du solide (S_1) qui se trouve en ce lieu de contact I à l'instant t .

- du point I_2 du solide (S_2) qui se trouve en ce lieu de contact I à l'instant t .

Au cours d'un mouvement, ces trois points ont en général des vitesses différentes par rapport à un repère d'observation \mathcal{R}_0 quelconque. La figure 2.16 montre ces trois points à l'instant où ils coïncident.

Mouvement de *pivotement* de (S_2) par rapport à (S_1) :

mouvement de rotation autour de l'axe (I, \vec{n}_{12}) .

Mouvement de *roulement* de (S_2) par rapport à (S_1) :

mouvement de rotation autour d'un axe passant par I et contenu dans le plan tangent commun.

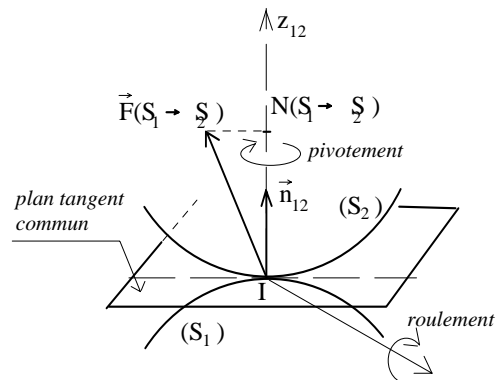


Figure 2.17

2. Lois du contact ponctuel

Le contact ponctuel entre (S_1) et (S_2) provoque des actions de chacun des solides sur l'autre.

Les lois du contact s'expriment de la manière suivante :

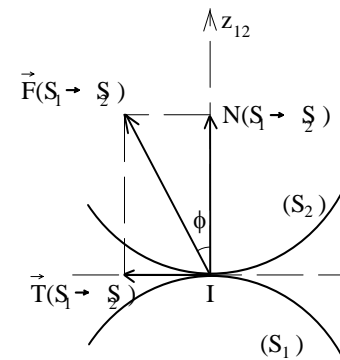
- l'action du solide (S_1) sur le solide (S_2) , due au contact ponctuel au point I , est représentable par une force $\vec{F}(S_1 \rightarrow S_2)$ dont la ligne d'action passe par **le point de contact I** .

- le contact ne pouvant être maintenu qui si chacun des solides "pousse" sur l'autre, cette force doit être dirigée de (S_1) vers (S_2) . Si l'on introduit le vecteur unitaire normal \vec{n}_{12} dirigé de (S_1) vers (S_2) , cette condition se traduit par l'inégalité :

$$\vec{F}(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{n}_{12} > 0 \quad (2.17)$$

Cette condition précise donc le signe, sur la normale orientée selon l'axe Iz_{12} , de la composante normale de la force. Si l'on décompose cette force sur la direction normale et sur le plan tangent :

$$\vec{F}(S_1 \rightarrow S_2) = \vec{N}(S_1 \rightarrow S_2) + \vec{T}(S_1 \rightarrow S_2) \quad (2.18)$$



$\vec{N}(S_1 \rightarrow S_2)$: $N(S_1 \rightarrow S_2) = \vec{N}(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{n}_{12} > 0$
composante normale

$\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)$: composante tangentielle
encore appelée **force de frottement**.

Figure 2.18

Exemple :

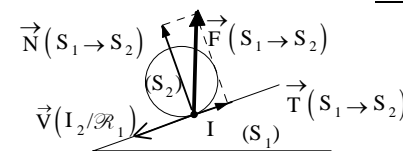


Figure 2.19

3. Lois de frottement (lois de Coulomb)

- **Première loi de Coulomb** : la projection tangentielle $\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)$ de l'action $\vec{F}(S_1 \rightarrow S_2)$ représente la résistance qu'oppose (S_1) au mouvement de glissement de (S_2) par rapport à (S_1). On l'appelle parfois "force de frottement".

$$\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2) \wedge \vec{V}(I_2 / \mathcal{R}_1) = \vec{0} \quad (2.19)$$

$$\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{V}(I_2 / \mathcal{R}_1) < 0 \quad (2.20)$$

où $\vec{V}(I_2 / \mathcal{R}_1)$ représente la **vitesse de glissement de (S_2) par rapport à (S_1)**.

- **Deuxième loi de Coulomb** :

si glissement	$ \vec{T}(S_1 \rightarrow S_2) = f_d N(S_1 \rightarrow S_2)$	(2.21)
si pas de glissement	$ \vec{T}(S_1 \rightarrow S_2) \leq f_s N(S_1 \rightarrow S_2)$	(2.22)

avec f_d : **coefficient de frottement dynamique**

f_s : **coefficient de frottement statique**

Ces grandeurs sont **sans dimension** et leur valeur est représentée par un **nombre sans unité**.

a) Cône de frottement.

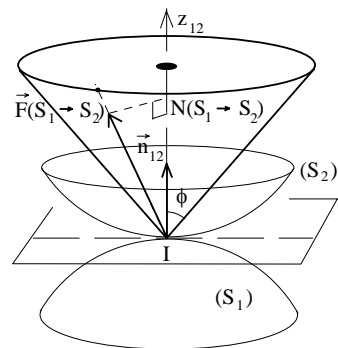


Figure 2.20

Lorsque le coefficient de frottement f n'est pas nul, la deuxième loi de Coulomb pour le contact avec glissement exprime que le vecteur $\vec{F}(S_1 \rightarrow S_2)$ est situé sur le cône de révolution dont le sommet est le point de contact I (figure 2.20), dont l'axe est la normale en I au plan tangent commun aux deux surfaces et dont le demi-angle au sommet ϕ est lié au coefficient f par :

$$\boxed{\tan \phi = f} \quad (2.23)$$

Ce cône est appelé **cône de frottement** au point de contact I.

Dans le cas d'un contact sans glissement, le vecteur $\vec{F}(S_1 \rightarrow S_2)$ est situé à l'intérieur du cône de frottement.

Détermination expérimentale (figure 2.21)

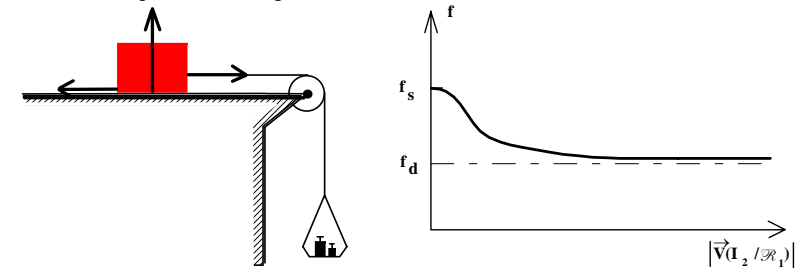


Figure 2.21

Nature des matériaux en contact	f_s		f_d	
	à sec	lubrifié	à sec	lubrifié
Acier sur acier	0.18	0.12	0.1	0.09
Acier sur fonte	0.19	0.1	0.16	0.04 à 0.08
Acier sur bronze	0.11	0.1	0.1	0.09
Téflon sur acier	0.04		0.04	
Fonte sur bronze		0.1	0.2	0.04 à 0.08
Nylon sur acier			0.35	0.12
Bois sur bois	0.65	0.2	0.2 à 0.4	0.04 à 0.16
Métaux sur bois	0.5 à 0.6	0.1	0.2 à 0.5	0.02 à 0.08
Métal sur glace			0.02	
Pneu voiture sur route	0.8		0.6	0.1 sur sol mouillé à 0.3

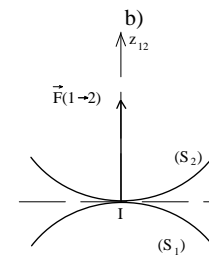


Figure 2.22

Contact sans frottement.

Si les surfaces en contact sont parfaitement polies, le coefficient peut être considéré comme **nul**. La projection tangentielle $\vec{T}(S_1 \rightarrow S_2)$ de la force de contact $\vec{F}(S_1 \rightarrow S_2)$ est donc **nulle** : l'action de contact s'exerçant au point I est alors **normale** au plan tangent commun en I. C'est une situation idéalisée que nous rencontrerons souvent notamment pour des liaisons de nature géométrique plus complexe.