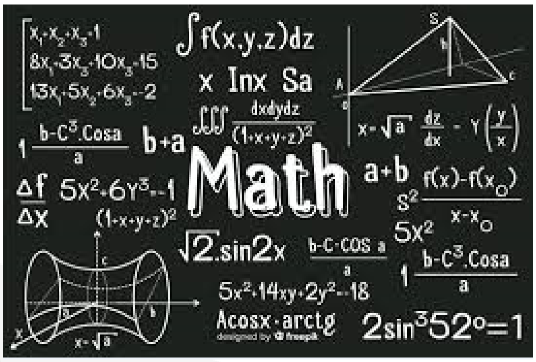
TD de Mathématiques 1



Dr. Seddik MERDACI

Université Frères Mentouri Costantine1

Faculté des sciences exactes

Département des sciences de la matière

Email : Seddik.merdasi@umc.edu.dz

5.0

Février 2024

Table des matières

I Chapitre 2 : Ensembles, Relations binaires et Applications

Les ensembles, fondamentaux en mathématiques, représentent des collections d'objets distincts. Les relations binaires établissent des correspondances entre les éléments de deux ensembles, définissant des liens ou des interactions spécifiques.

Objectifs du deuxième chapitre :

1. La ***compétence*** à appliquer ces concepts se démontre par la capacité à effectuer des opérations sur les ensembles, comme l'union ou l'intersection, pour générer de nouveaux ensembles intermédiaires. Ensuite, ***utiliser*** ces concepts en les appliquant dans la réorganisation des informations et l'analyse des problèmes mathématiques, mettant ainsi en pratique les relations binaires et applications.
2. ***Identifier*** les termes caractéristiques d'une relation d'équivalence et d'une relation d'ordre afin de démontrer une compréhension claire de ces concepts. Ensuite, ***appliquer*** ces connaissances en utilisant les propriétés des relations pour calculer une classe d'équivalence .
3. ***Calculer*** l'image directe et l'image inverse d'une application en appliquant les règles pertinentes. Effectuer le calcul de la composition des applications en suivant les étapes appropriées. ***distinguer*** l'application comme étant injective, surjective ou bijective en analysant ses propriétés et en justifiant les résultats obtenus.

1. Notion d'ensemble et propriétés

1.1. Ensemble.

Définition

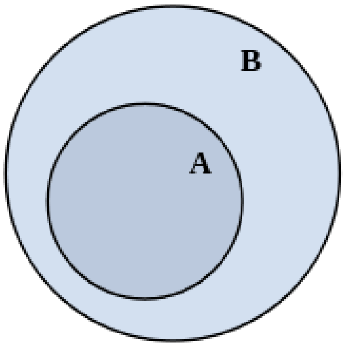
Un ***ensemble*** est une collection d'objets mathématiques (éléments)

rassemblés d'après une ou plusieurs propriétés communes. Ces propriétés sont

suffisantes pour affirmer qu'un objet appartient ou pas à un ensemble.

Exemple

1. E : l'ensemble des étudiants de l'université d'UFM.
2. On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, ...$.
3. $A = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.



Inclusion

Exemple

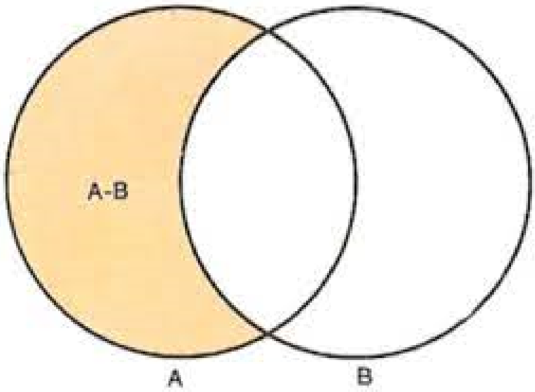
1. On désigne $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.
2. On désigne $\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs, $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels, on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.2. Égalité de deux ensembles

Soient A, B deux ensembles sachant $A = B$, cela veut dire que : $A = B \Leftrightarrow ((A \subset B) \wedge (A \subset B))$.

1.3. Différence de deux ensembles.

La ***différence*** de deux ensembles A, B est un ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B, noté $A - B$. $A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$. Si $A \subset B$ alors $B - A$ est aussi appelé le complémentaire de A dans B, il est noté $C_A^B, A^c . C_A^B = \{x/x \in B \wedge x \notin A\}$.

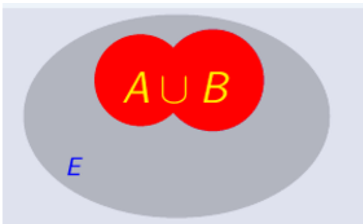


Différence

1.4. Opérations sur les ensembles.

1.4.1. La réunion

La ***réunion*** ou l'union de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou B, on écrit $A \cup B$.$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$. La négation : $x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B)$.

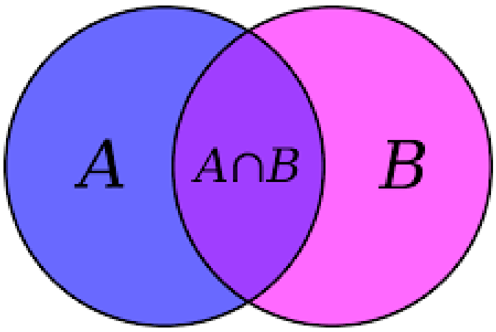


Union

1.4.2. L'intersection

L'intersection de deux ensembles A, B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et B on note $A \cap B$. $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$.

La négation : $x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B)$



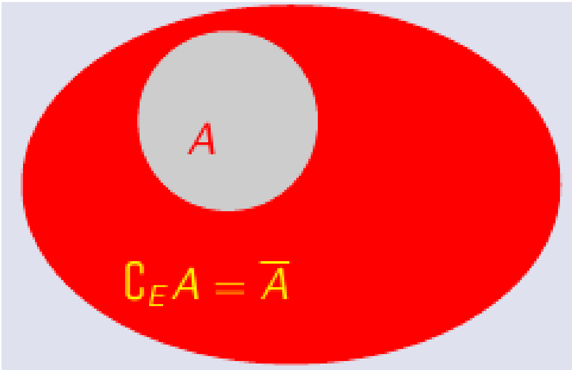
L'intersection

1.4.3. Complémentaire

Soit A une partie d'un ensemble

Soit A une partie d'un ensemble E . On appelle ***complémentaire*** de A dans E le sous-ensemble de E noté C_E^A ou $\bar{A}$, constitué des éléments de E qui n'appartiennent pas à A . Autrement dit,

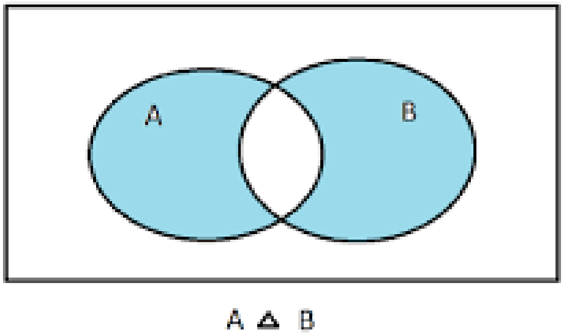
$$C_E^A = \{x \in E \mid x \notin A\} = E \backslash A$$



Complémentaire

1.4.4. La différence symétrique

Soient E un ensemble non vide et $A, B \subset E$, ***la différence symétrique*** entre deux ensembles A, B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à $A - B$ ou $B - A$ noté $A \Delta B$. $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) - (A \cap B)$. $x \in A \Delta B \Leftrightarrow \{x / x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}$.



La différence symétrique

1.5. Propriétés des opérations sur les ensembles.

1.5.1. La commutativités.

Quels que soient A, B deux ensembles : $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A.$

1.5.2. L'associativité e.

Quels que soient A, B, C deux ensembles : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$

1.5.3. La distributivité e

Quels que soient A, B, C deux ensembles : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

1.5.4. L'idempotence.

$A \cup A = A, A \cap A = A.$

Propriétés des opérations entre ensembles	
Commutativité	$A \cup B = B \cup A$
Associativité	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Identité	$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A$
Distributivité	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Propriétés des opérations sur les ensembles.

1.5.5. Lois de Morgan.

1. $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}.$
2. $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}.$

1.6. Produit Cartésien.

Soient A, B deux ensembles, $a \in A, b \in B,$ on note $A \times B = \{(a, b), a \in A, b \in B\}$ l'ensemble $A \times B$ est l'ensemble des couples (a, b) pris dans cet ordre, il est appelé ensemble produit cartésien des ensembles A et B.

✎ *Remarque*

Si A et B sont des ensembles finis et si on désigne par : $CardA$ le nombre des éléments de A , $CardB$ le nombre des éléments de B, on aura : $Card(A \times B) = CardA \times CardB.$

2. relations binaires et applications

Soient $x \in E, y \in F$ une relation R entre x et y est une correspondance entre x et y. Le couple (x, y) vérifie la relation R, on note xRy. Si $E = F$ la relation est dite binaire.

2.1. Relations binaires

2.1.1. Relation d'équivalence

Définition

Soient R une relation binaire dans l'ensemble E et $x, y, z \in E$, on dit que R est une ***relation d'équivalence*** si :

1. ***Réflexive*** : $(\forall x \in E), (xRx)$.
2. ***Symétrique*** : $(\forall x \in E), (\forall y \in E), (xRy \Rightarrow yRx)$.
3. ***Transitive*** : $(\forall x, y, z \in E), ((xRy) \wedge (yRz)) \Rightarrow (xRz)$.

Exemple

$\forall x, y \in \mathbb{N}, xRy \Leftrightarrow x = y$ est une relation d'équivalence.

2.1.2. Relation d'ordre

Soient R une relation binaire dans l'ensemble E et $x, y, z \in E$, on dit que R est une ***relation d'ordre*** si :

1. ***Réflexive*** : $(\forall x \in E), (xRx)$.
2. ***Antisymétrique*** : $(\forall x \in E), (\forall y \in E), ((xRy) \wedge (yRx)) \Rightarrow (x = y)$.
3. ***Transitive*** : $(\forall x, y, z \in E), ((xRy) \wedge (yRz)) \Rightarrow (xRz)$.

Exemple

$A \subset E, B \subset F, ARB \Leftrightarrow A \subset B$ est une relation d'ordre, en effet :

1. $\forall A \subset E, A \subset A \Leftrightarrow R$ est réflexive.
2. $\forall A, B \in E, ((A \subset B) \wedge (B \subset A)) \Rightarrow A = B \Leftrightarrow R$ est antisymétrique.
3. $\forall A, B, C \in E, ((A \subset B) \wedge (B \subset C)) \Rightarrow A \subset C \Leftrightarrow R$ est transitive.

Définition

Une relation d'ordre dans un ensemble E est dite d'ordre total si deux éléments quelconques de E sont comparables, $\forall x, y \in E$, on a xRy ou yRx. Une relation d'ordre est dite d'ordre partiel si elle n'est pas d'ordre total.

Définition : Classe d'équivalence.

Soit R une relation d'équivalence, on appelle classe d'équivalence d'un élément $x \in E$ l'ensemble des éléments $y \in E$ qui sont en relation R avec x on note C_x, où $x = C_x = \{y \in E / xRy\}$.

Remarque

L'ensemble des ***classes d'équivalence*** d'éléments de E est appelée ensemble quotient de E par R, il est noté E/R, $E/R = \{C_x / x \in E\}$.

2.2. Applications

2.2.1. Application

Définition

On appelle ***application*** d'un ensemble E dans un ensemble F une loi de correspondance (ou une relation de correspondance) permettant d'associer à tout $x \in E$ un unique élément $y \in F$ où E est l'ensemble de départ et F est l'ensemble d'arrivée. L'élément y associé à x est l'image de x par f, on note $x \to y / y = f(x)$.

Pour plus de détails, regardez cette video

https://youtu.be/Y8cV0zcFijs

*9**

2.2.2. Image directe et image réciproque.

a) L'image directe.

Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$, on appelle image de A par f un sous-ensemble de F, noté $f(A)$ tel que $f(A) = \{f(x) \in F / x \in A\}$, sachant que $f(A) \subset F$, et que $A, f(A)$ sont des ensembles.

b) L'image réciproque.

Soit $f : E \to F$ et $B \subset F$, on appelle l'image réciproque de B par f, la partie de E notée $f^{-1}(B)$ telle que $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$, sachant que $f^{-1}(B) \subset E$, et que $B, f^{-1}(B)$ sont des ensembles.

c) La surjection.

Définition

L'image $f(E)$ de E par f est une partie de F. Si tout élément de F est l'image par f d'au moins un élément de E, on dit que f est une application surjective de E dans F, on a : $f(E) = F$. f est ***surjective*** $\Leftrightarrow (\forall y \in F), (\exists x \in E) / f(x) = y$.

d) L'injection.

Définition

Quand on a deux éléments distincts de E correspondant pas à deux images différentes de F , f est dite application ***injective***, on a alors : f est injective f , ou f est injective $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.

Exemple

Pour plus de détails, regardez cette vidéo*

https://youtu.be/GVJXQpK7lpY?si=grI8s8kyS-x6rjlY

e) La bijection.

Définition

f est une application bijective si elle est injective et surjective, c'est-à-dire tout élément de F est l'image d'un unique élément de E, f est bijective si et seulement si : $(\forall y \in F), (\exists! x \in E), (f(x) = y)$. ($\exists!$ signifie unique).

Remarque

Lorsque une application f est bijective cela veut dire que l'application inverse f^{-1} existe. f^{-1} est aussi bijective de F sur E et $(f^{-1})^{-1} = f$.

f) La composition d'application.

Définition

Soient E, F, G des ensembles et deux applications f, g telles que $f : E \to F$, $g : F \to G$ $x \to f(x) = y$, $y \to g(y) = z$. On définit l'application $g \circ f : E \to G$ $x \to g \circ f(x) = z$.

g) Propriétés des applications

Soit $f : E \to F$ on a :

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Proposition

Soit $f : E \to F, g : F \to G$ on a :

1. $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

3. TD N° : 2 Ensembles, Relations binaires et Applications

Exercice 1.

Répondre par vrai ou faux aux assertions suivantes et justifier vos réponses :

1. $\{9\} \cup \{9\} = \{(9,9)\}$.
2. $\{6\} - \{6\} = \{0\}$.
3. $\{3\} \times \{8\} = \{24\}$.
4. $\varnothing \subset \{\varnothing\}$.

Exercice 2.

1. Soient $A = \{\{a\},\{b\}\} et B = \{\{a\},\{a,b\}\}$.
    - Décrire les ensembles : $A \cap B, A \cup B, B \setminus A, A \triangle B$
    - Remplacer les points... par l'un des symboles : $\in, \subset, \notin, \not\subset$.
      $\{a\}$ $...A \cap B, \{\{b\}\}...A \cup B, \{a\}...B \setminus A, \{a,b\}...A \triangle B, \{\{a\}\}...A \triangle B$.
2. Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.
    - Montrer que : (Lois de Morgan)
        1. $\overline{\bar{A}} \cap \bar{B}$
           $\overline{A \cup BA \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}\}$
           Où $\bar{A}$ désigne la complémentaire de A dans E.
        2. $A \subset B \Longrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$.
    - Simplifier les ensembles suivantes :
      $\overline{(A \cup B)} \cap \overline{(C \cup \bar{A})}, \overline{(A \cap B)} \cup \overline{(C \cap \bar{A})}$.

Exercice 3.

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On rappelle que l'on note : $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1. Montrer que :
   - $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
   - $(A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} = A \cap B \cap \bar{C}$.
     $(A \cap C) \cap \overline{(A \cap B)} = A \cap C \cap \bar{B}$.
2. En déduire que :
   $(A \cap B) \triangle (A \cap C) = A \cap (B \triangle C)$.

Exercice 4.

Soient E et F deux ensembles, A, C deux parties de E, et B , D deux parties de F. On veut montrer que :

$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Exercice 5.

1. On considère la relation binaire R définie sur $\mathbb{Z}$ par :
   $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, xRy \Leftrightarrow x - y$ est un multiple de 3.
   - Montrer que R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
   - Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/R$.
   - Montrer que :
     $\dot{7} = \dot{4}$.
2. Soit $\leq$ la relation binaire sur $\mathbb{N}^*$ définie par :
   $x \leq y \Leftrightarrow x$ divise y.
   - Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
   - L'ordre est-il total ?

Exercice 6

1. Soit f une application de E dans F et A et B deux partie de E. Montrer que :
   $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2$. On considère les ensembles $A = [-2, 1] et B = [0, 3]$.
   - Comparer les ensembles $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.
   - Quelle condition doit vérifier f pour que : $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

4. Corrigé TD N° : 2 Ensembles, Relations binaires et Applications

Correction de l'exercice 1

1. $\{9\} \cup \{9\} = \{(9, 9)\}$. Faux
   Justification : $A - B = \{x \in E | x \in A \wedge x \notin B\}$.
   D'où :
   $\{9\} \cup \{9\} = \{9\}$.
2. $\{3\} - \{3\} = \{0\}$. Faux
   Justification : .
   D'où :
   $\{9\} \cup \{9\} = \{9\}$.
3. . Faux
   Justification :
   D'où : .
4. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$. Vrai
   Justification : L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble.

Correction de l'exercice 2

1. 1. 2. On a :
2. 1. Soit $x \in E$
      D'où :
   2. Soit $x \in E$
      D'où :
   3. Soit $x \in E$
      D'où :

   2. .

Correction de l'exercice 3

1. - .
   D'où : $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
2. -
   -

Correction de l'exercice 4

On va procéder par double inclusion. Soit . Alors et donc , . On a aussi , et donc et . Ainsi, et . Ceci prouve que .

Réciproquement, soit . Alors et donc et .

De même, , donc et . Ainsi, et . On conclut que .

En définitive :

Correction de l'exercice 5

1. - Montrons que R est une relation d'équivalence.
    1. R est réflexive ?
       R est réflexive.
       En effet, on a :
       D'où :
    2. R est symétrique ?
       R est symétrique. En effet, on a :
    3. R est transitive ?
       R est transitive. En effet, on a :
       Par conséquent : R est une relation d'équivalence car elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive.
   - Déterminons l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/R$.
     Soit , cherchons tel que yRx.
     Donc :
     Ainsi :
   - Montrons que :
2. - Montrons que "$\leq$" est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
    1. R est réflexive ?
       R est réflexive. En effet, on a :
       D'où :
    2. R est anti-symétrique car :
    3. est transitive ?
       R est transitive. En effet, on a :
       Par conséquent : "$\leq$" est une relation d'ordre car elle est à la fois réflexive, anti-symétrique et transitive.
   - L'ordre est-il total ?
     "$\leq$" est une relation non totalement ordonnée sur $\mathbb{N}^*$.
     En effet : par exemple les nombres et ne sont pas comparables.
     On a :
     D'où :
     Par conséquent : "$\leq$" est une relation d'ordre partielle.

Correction de l'exercice 6

1. Montrons que : .
   Soit $y \in F$.
   Ainsi, .
2. - On a :
     Donc
     En effet :

D'autre part, on a :

En effet :

et

Car :

On a : On voit que :

D'où :

- Soit $y \in F$, Quelle condition doit vérifier f pour que : .

Si est injective alors .

Ainsi,

D'où :

Bibliographie

Cours d'Algèbre I et II avec Exercices Corrigés, Imene Medjadj, U.S.T.O, 2017.

Cours de mathématiques 1, Mounira Melki, UFM, 2023-2024.

K.Allab, Éléments d'analyse: Fonction d'une variable réelle. OPU Alger, (1986).

C. Aslangul, Des mathématiques pour les sciences 2, corrigés détaillés et commentés des exercices et problèmes, De Boeck, Bruxelles (2013).

C.Baba Hamed, K.Benhabib, Algèbre 1: rappels de cours et exercices avec solutions, OPU (1992)

C.Baba Hamed, K.Benhabib, Algèbre 1: rappels de cours et exercices avec solutions, OPU (1992)

G.Christol, Algèbre 1: ensembles fondamentaux arithmétique polynômes, Ellipses Paris, (1995).

F.Cottet-Emard, Analyse tome 1 cours et exercices corrigés, DeBoeck, Bruxelles (2005).

Webographie

http://exo7.emath.fr/un.html

https://les-mathematiques.net/

https://youtu.be/GVJXQpK7lpY?si=grI8s8kyS-x6rjlY