

TD N°2 : Ensembles, Relations Binaires et Applications

Première Partie

Ensembles

Exercice 1.

Répondre par **vrai** ou **faux** aux assertions suivantes et **justifier** vos réponses :

1. $\{5\} \cup \{5\} = \{(5, 5)\}$.
2. $\{3\} - \{3\} = \{0\}$.
3. $\{2\} \times \{7\} = \{14\}$.
4. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$.

Exercice 2.

1. Soient $A = \{\{a\}, \{b\}\}$ et $B = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.
 - a) Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$ et $A \Delta B$.
 - b) Remplacer les points... par l'un des symboles : \in , \subset , \notin , $\not\subset$.
 $\{a\} \dots A \cap B$, $\{\{b\}\} \dots A \cup B$, $\{a\} \dots B \setminus A$, $\{a, b\} \dots A \Delta B$, $\{\{a\}\} \dots A \Delta B$.
2. Soient A , B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E .
 - a) Montrer que :

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{array} \right\} \text{Lois de Morgan}$$
 Où \overline{A} désigne la complémentaire de A dans E .
 - $A \subset B \implies \overline{B} \subset \overline{A}$.
 - b) Simplifier les ensembles suivantes :
 $\overline{(A \cup B) \cap (C \cup \overline{A})}$, $\overline{(A \cap B) \cup (C \cap \overline{A})}$.

Exercice 3.

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E . On rappelle que l'on note :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Montrer que :

a)

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

b)

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} &= A \cap B \cap \overline{C} \\ (A \cap C) \cap \overline{(A \cap B)} &= A \cap C \cap \overline{B} \end{aligned}$$

2. En déduire que :

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$$

Exercice 4.

Soient E et F deux ensembles, soient A , C deux parties de E et B , D deux parties de F . Montrer que :

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D).$$