Chapitre 1 : Logique, ensembles et applications

Dr. LOUAAR Mohammed

Université Frères Mentouri Constantine 1

Faculté des sciences exactes

Département de mathématiques

Email : mohammed.louaar@umc.edu.dz

Table des matières

Chapitre 1 : Logique, ensembles et applications

I

Les mathématiques sont un langage pour s'exprimer rigoureusement, adapté aux phénomènes complexes, qui rend les calculs exacts et vérifiables. Le raisonnement est le moyen de valider — ou d'infirmer — une hypothèse et de l'expliquer à autrui. Ce chapitre introduit les notions fondamentales utilisées en mathématiques : la notion (et le formalisme associé) d'assertion mathématique, les modes de raisonnement usuels, les ensembles (et opérations associées) et les applications. Ces notions sont les briques élémentaires à partir desquelles on construit l'édifice des mathématiques.

1. Logique et modes de raisonnement

1.1. Logique

La logique permet de modéliser et d'étudier le raisonnement mathématique

1.1.1. Définitions

Définition : Proposition :

On appelle proposition un énoncé ou une expression pouvant être vrai ou faux. On associe à toute proposition une valeur de vérité $\mathbf{V}$ (vrai) ou $\mathbf{F}$ (faux).

Exemple

1. Alger est une ville côtière. $(\mathbf{V})$
2. Le triangle rectangle possède un angle droit. $(\mathbf{V})$
3. $3 + 5 = 0.(\boldsymbol{F})$
4. x, y deux réels, x est plus grand que y. (Ceci n'est pas une proposition, il s'agit d'un énoncé)

Définition : Axiome :

On appelle axiome toute proposition considérée comme évidente, admise vraie sans démonstration.

Exemple

Axiome d'Euclide : il affirme que par un point donné passe une unique parallèle à une droite donnée.

Définition

- Théorème : On appelle théorème toute proposition que l'on démontre vraie.
- Corollaire : Un corollaire est une conséquence directe d'un théorème.
- Lemme : On appelle lemme toute proposition vraie préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.

1.1.2. Connecteurs logiques

Les connecteurs logiques permettent de définir d'autres propositions à partir d'une ou plusieurs propositions initiales. Soient P et Q deux propositions, on définit par :

Définition : Négation :

La négation d'une proposition P est la proposition, notée $\bar{P}$, qui est vraie lorsque P est fausse et fausse sinon.

Exemple

P : 3 est un nombre pair $(\boldsymbol{F})$, $\bar{P}$: 3 n'est pas un nombre pair $(\boldsymbol{V})$.

Définition : Conjonction :

La conjonction des deux propositions P et Q est la proposition (P et Q), notée $(P \wedge Q)$, qui est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies en même temps. Elle est fausse sinon. On résume ceci dans la table de vérité suivante :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple

2 divise 9 et 136 est un multiple de 17. $(\boldsymbol{F})$

Définition : Disjonction :

La disjonction des deux propositions P et Q est la proposition (P ou Q), notée $(P \vee Q)$, qui est vraie si au moins l'une des deux propositions est vraie. Elle est fausse sinon. On résume ceci dans la table de vérité suivante :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple

2 divise 9 ou 136 est un multiple de 17. $(\boldsymbol{V})$

Définition : Implication :

La proposition P implique Q, notée $(P \Rightarrow Q)$, est la proposition qui est fausse lorsque P est vraie et Q est fausse. Elle est vraie sinon.

En d'autres termes, il s'agit de la proposition $(\bar{P} \vee \mathrm{Q})$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F

F	V	V
F	F	V

Exemple

$2 \times 2 = 6 \Rightarrow \sqrt{3} = 1.$ (V) (Si P est fausse alors $P \Rightarrow Q$ est toujours vraie)

Remarque

À partir de l'implication $(P \Rightarrow Q)$, on définit :

- L'implication $(Q \Rightarrow P)$, appelée réciproque de l'implication $(P \Rightarrow Q)$.
- L'implication $(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$, appelée contraposée de l'implication $(P \Rightarrow Q)$.
- La négation $\overline{(P \Rightarrow Q)}$ est la proposition $(\mathrm{P} \wedge \bar{Q})$.

Exemple

Soit l'implication suivante : $\left(n^2 \text{ est pair }\right) \Rightarrow (\ n \text{ est pair }).$

- Sa réciproque est : $(\ n \text{ est pair }) \Rightarrow \left(n^2 \text{ est pair }\right).$
- Sa contraposée est: $(\ n \text{ est impair }) \Rightarrow \left(n^2 \text{ est impair }\right).$
- Sa négation est: (n^2 est pair) et (n est impair).

Définition : Équivalence :

La proposition P équivalent à Q, notée $(P \Leftrightarrow Q)$, est la proposition qui est vraie lorsque P et Q sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses. Elle est fausse sinon. En d'autres termes, il s'agit de la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante : $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (l'implication et sa réciproque sont toutes les deux vraies).

Remarque

Dans la pratique mathématique, nous ne nous intéresserons qu'aux propositions vraies. C'est à dire, on écrira $P \Leftrightarrow Q$ ou $P \Rightarrow Q$ uniquement lorsque celles ci seront vraies.

Exemple

- $0 \leq x \leq 64 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 8.(\boldsymbol{V})$
- Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence suivante : $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.(\boldsymbol{V})$

Proposition :

Soient P, Q deux propositions. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :

- $P \Leftrightarrow \bar{P},$
- $\overline{(P \wedge Q)} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}$
- $\overline{(P \vee Q)} \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}$
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$

1.1.3. Quantificateurs

Définition

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un élément x d'un ensemble E. On écrit

- $\forall x \in E, P(x)$: lorsque la proposition P est vraie pour tous les éléments $x \in E$. $\forall$, qui se lit quelque soit ou pour tout, est appelé quantificateur universel.
- $\exists x \in E, P(x)$: lorsqu'il existe au moins un élément x de l'ensemble E pour lequel la proposition P est vraie. $\exists$, qui se lit il existe au moins un, est appelé quantificateur existentiel.
- $\exists! x \in E, P(x)$: lorsqu'il existe un unique élément x de l'ensemble E pour lequel la proposition P est vraie.
  Il y a conjointement existence et unicité de l'élément x vérifiant la proposition P.

Exemple

- $\forall x \in \left[0, +\infty\right[, \quad x^2 \geq 0(\boldsymbol{V})$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 4(\boldsymbol{F})$
- $\exists n \in \mathbb{N}, \quad n^2 - n > n(\boldsymbol{V})(n = 3, n = 10, n = 100).$
- $\exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 = -4(\boldsymbol{F})$ (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif).
- $\exists! n \in \mathbb{N}, \quad n^2 - n > n(\boldsymbol{F})$

a) Négation de propositions dépendant de quantificateurs

Définition

- La négation de $(\forall x \in E, P(x))$ est $(\exists x \in E, \overline{P(x)})$.
- La négation de $(\exists x \in E, P(x))$ est $(\forall x \in E, \overline{P(x)})$

Exemple

- La négation de $\left(\forall x \in \left[1, +\infty\right[, x^2 \geq 1\right)$ est $\left(\exists x \in \left[1, +\infty\right[, x^2 < 1\right)$.
- La négation de ($\exists n \geq 0, n^3 - n$ est multiple de 3) est $\left(\forall n \geq 0, n^3 - n$ n'est pas multiple de 3).

Remarque

- On peut trouver des propositions dépendant de deux quantificateurs.
  Par exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y > 0, x + y > 10$.
- L'ordre des quantificateurs est très important. Prenons l'exemple des deux propositions suivantes :
  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$ et $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y > x$
  La première est vraie et la seconde est fausse. En effet, dans la première on peut toujours trouver un nombre supérieur à un nombre réel donné car $\mathbb{R}$ n'est pas borné. Tandis que pour la seconde, on ne peut pas trouver un réel inférieur à tous les autres car $\mathbb{R}$ n'a pas de borne inférieure.

1.2. Modes de raisonnement

Voici quelques méthodes de raisonnement :

1.2.1. Raisonnement direct

On veut montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie. Ce raisonnement consiste à supposer que P est vraie et montrer que Q est vraie.

Exemple 13 : Soient $a, b \geq 0$. Montrons que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

On suppose que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a) = b(1+b)$ donc $a + a^2 = b + b^2$ d'où $a^2 - b^2 = b - a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b) = -(a-b)$ c'est à dire $(a-b)(1+a+b) = 0$ ainsi $a = b$ ou $a + b = -1$. Comme $a, b \geq 0$ alors leur somme ne peut être négative. Par conséquent, on conclut que $a = b$.

1.2.2. Contraposée

Le raisonnement par contraposée est basé sur l'équivalence suivante : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$.

Donc si l'on souhaite montrer $P \Rightarrow Q$, il suffit de montrer $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$.

Exemple 14 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que si n^2 est pair alors n est pair.

Écrivons d'abord la contraposée : Si n n'est pas pair alors n^2 n'est pas pair.

On suppose que n n'est pas pair. On veut montrer que n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2l + 1$ avec $l = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$

Et donc n^2 est impair.

Par conséquent, par contraposition, ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

1.2.3. Absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer qu'une proposition P est vraie repose sur le principe suivant: On suppose que $\bar{P}$ est vraie et on cherche une contradiction. Ainsi si $\bar{P}$ est fausse, cela veut dire que P doit être vraie.

Exemple 15 : Montrons la proposition suivante : 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$.

Raisonnons par l'absurde c'est à dire supposons que 0 admette un inverse dans $\mathbb{R}$.

Alors $\exists x' \in \mathbb{R}$: $0 = \frac{1}{x'} \Rightarrow 0.x' = 1 \Rightarrow 0 = 1$. Ce qui est absurde, ainsi 0 n'a pas d'inverse dans $\mathbb{R}$.

1.2.4. Contre-exemple

Ce mode de démonstration sert à montrer qu'une proposition de la forme : Pour tout x dans E, $P(x)$ est fausse. Pour cela, il suffit de montrer que sa négation est vraie, c'est à dire que : Il existe x dans E, $\overline{P(x)}$ est vraie.

Exemple 16 : Montrons que la proposition suivante $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$ est fausse.

Il suffit de montrer que sa négation est vraie, c'est à dire : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$ est vraie. En effet, pour $x = 1$ on aura $x^2 + 1 = 2 \neq 0$ ce qui est vrai. Ainsi la proposition $\forall x \in \mathbb{R} x^2 + 1 = 0$ est fausse.

1.2.5. Récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une proposition $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :

L'initialisation : on montre que $P(0)$ est vraie.

L'hérédité : On suppose que $P(n)$ est vraie pour $n \geq 0$ donné et on démontre que l'assertion au rang suivant $P(n + 1)$ est vraie.

La conclusion : On rappelle que le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : Si on doit montrer qu'une proposition est vraie pour tout $n \geq n_0$ alors on commence l'initialisation au rang n_0.

Exemple 17 : Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n > n$.

Pour $n \geq 0$, notons $P(n)$ l'assertion suivante : $2^n > n$.

On va montrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation : Pour $n = 0$ on a $2^0 = 1 > 0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \geq 1$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\ &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n \quad \text{car } 2^n > n \\ &> n + 1 \quad \text{car } 2^n \geq 1 \end{aligned}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est à dire $2^n > n \quad \forall n \geq 0$.

2. Ensembles

2.1. Généralités sur les ensembles

Définition

Un ensemble correspond intuitivement à une «collection d'objets», dont les objets sont ce que l'on appelle ses «éléments». Lorsque a est un élément et E un ensemble :

- pour signifier que a est un élément de E, on écrit $a \in E$;
- pour signifier que a n'est pas élément de E, on écrit $a \notin E$.

On peut définir un ensemble de deux grandes façons :

- en extension, c'est-à-dire en donnant la liste de ses éléments;
- par compréhension, c'est-à-dire en donnant une condition d'appartenance à cet ensemble; on écrit $\{x \in E : P(x)\}$ l'ensemble des éléments de E tels que la propriété $P(x)$ soit vraie.

On appelle cardinal de E, et l'on note card E, le nombre d'éléments distincts de E.

Notations

On note par :

- $\mathbb{N}$ ensembles des nombres entiers naturels,
- $\mathbb{Z}$ ensembles des nombres entiers relatifs,
- $\mathbb{R}$ ensembles des nombres réels.

Exemple

1. Ci-dessous, l'ensemble est défini, à gauche, en extension, et à droite, par compréhension :
   $\{0, 1, 2, 3\} = \{n \in \mathbb{N} : n \leqslant 3\}$
2. L'ensemble A des entiers relatifs compris entre -2 et 2 s'écrit :
   - en extension : $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$;
   - par compréhension : $A = \{n \in \mathbb{Z} : -2 \leqslant n \leqslant 2\}$.
3. L'ensemble B des entiers naturels pairs s'écrit :
   - en extension : $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$;
   - par compréhension : $B = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} \quad n = 2k\}$.
4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction, alors l'ensemble de ses points d'annulation s'exprime naturellement par compréhension : $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$.
5. On admet qu'il existe un ensemble, appelé ensemble vide et noté ∅, qui ne contient aucun élément. Par convention, card(∅)=0.

2.2. Inclusion, égalité d'ensembles

Définition

Soit E et F deux ensembles.

- On dit que F est un sous-ensemble ou une partie de E si tout élément de F est aussi élément de E. On d
  aussi que l'ensemble F est inclus dans E et l'on note $F \subset E : F \subset E \iff \forall x \in F \quad x \in E$.

- Les ensembles E et F sont égaux si tout élément de l'un est élément de l'autre :
  $E = F \iff (E \subset F \quad \text{et} \quad F \subset E)$

2.3. Intersection, réunion, différence, complémentaire

Définition

- L'intersection de E et F est l'ensemble, noté $E \cap F$, des éléments qui sont à la fois dans E et dans F :
  $x \in E \cap F \iff (x \in E \text{ et } x \in F)$
- La réunion de E et F est l'ensemble, noté $E \cup F$, des éléments qui sont dans E ou dans F :
  $x \in E \cup F \iff (x \in E \text{ ou } x \in F)$

Propriétés élémentaires

Étant donné trois ensembles A, B et C, on a :

- $A \subset A \cup B$, $\quad A \cap B \subset A$
- $A \cup A = A$, $\quad A \cap A = A$
- $A \cup \varnothing = A$, $\quad A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cup B = B \cup A$, $\quad A \cap B = B \cap A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Définition : Différence ensembliste

Soit E et F deux ensembles.

On appelle différence de E et F, et l'on note $E \backslash F$, l'ensemble des éléments qui sont dans E mais pas dans F.

$E \backslash F = \{x \in E : x \notin F\}$

Définition : Complémentaire

Soit E un ensemble et A une partie de E. L'ensemble $E \backslash A$ est appelé le complémentaire de A dans E.

Notation

Lorsque l'ensemble E est fixé et qu'il n'y a pas de confusion possible, alors le complémentaire de A dans E est aussi noté $\bar{A}$ ou A^c.

Remarque

Soit A et B deux parties d'un ensemble E. On dispose des égalités évidentes suivantes :

- $\overline{\bar{A}} = A$, $\quad A \cup \bar{A} = E$, $\quad A \cap \bar{A} = \varnothing$
- $A \backslash B = A \cap \bar{B}$, $\quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $A \subset B \iff \bar{B} \subset \bar{A} \quad \text{et} \quad A = B \iff \bar{A} = \bar{B}$

2.4. Produit cartésien

Définition

- Étant donné deux ensembles A et B,
  on appelle produit cartésien de A par B l'ensemble, noté $A \times B$, des couples de la forme (a, b), avec $a \in A$ et $b \in B$.
  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$. Le produit cartésien $A \times A$ se note plus simplement A^2.
- à partir de n ensembles $E_1, \ldots, E_n$, on peut construire leur produit cartésien, noté $E_1 \times \cdots \times E_n$, défini par :
  $E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n\}$
  Si E est un ensemble, le produit cartésien $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{p \text{ termes}}$ est noté E^p.

Remarque

- $(a, b) = (a', b') \iff (a = a' \quad \text{et} \quad b = b')$
- L'assertion $(x, y) \neq (0, 0)$ n'équivaut pas à $((x \neq 0) \text{ et } (y \neq 0))$.
- Le couple (x, y) s'écrit avec des parenthèses, pas des accolades! En effet, $\{x, y\}$ désigne l'ensemble formé par les éléments x et y.

2.5. Ensemble des parties d'un ensemble

Notation

Soit E un ensemble. L'ensemble de toutes les parties de E se note $\mathcal{P}(E)$.

Exemple

- Pour tout ensemble E, on a $E \in \mathcal{P}(E)$ et $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$.
- Si $E = \{1, 2\}$ alors on a $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Remarque

Prendre garde au double niveau d'accolades dans la description précédente : on a décrit $\mathcal{P}(E)$ en donnant l'ensemble de ses éléments. Or tout élément de $\mathcal{P}(E)$ est une partie de E, ce qui fait que l'on a :

$\{1\} \subset E$ ou encore $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$

alors que la relation $1 \in \mathcal{P}(E)$ est fausse car 1 n'est pas une partie de E.

3. Applications

3.1. Applications

3.1.1. Définitions

Définition : Application

On définit une application (souvent appelée fonction) f en donnant un ensemble E dit de départ, un ensemble F dit d'arrivée et, pour tout x élément de E, un unique élément de F noté $f(x)$ et appelé image de x par f. x est alors appelé un antécédent par f de $f(x)$.

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou .

Remarque

1. Plus formellement, une application est un triplet (E, F, I) ou E ef I sont deux ensembles et où Γ est une partie de $E \times F$ (appelée graphe de f) telle que, pour tout $x \in E$, il existe un et un seul $y \in F$ vérifiant $(x, y) \in I$. Cet unique y est alors noté $f(x)$.
2. Pour indiquer que f est une application de E dans F, on écrit : $f : \begin{cases} E \to Y \\ x \to f(x) \end{cases}$ ou $f : x \in E \mapsto f(x) \in F$ ou encore $E \xrightarrow{f} F$.
3. Soit f une application de E dans F. Tout élément de E a une unique image; en revanche un élément de F peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents par f.
4. La courbe Γ est le graphe d'une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si toute droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe en au plus un point.

Définition : Image d'une partie par une application

Soit $f : E \to F$ une application, A une partie de E. On définit $f(A)$ comme étant l'ensemble des valeurs prises par $f(a)$ lorsque a parcourt A. On a donc

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists a \in A \text{ avec } y = f(a)\}$$

Plus souvent, on note tout simplement $f(A) = \{f(a), a \in A\}$.

Exemple

On peut définir l'ensemble des entiers impairs par $\{2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$ (c'est, par exemple, l'image de $\mathbb{N}$ par l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$).

Définition : Application identité

Soit E un ensemble, on définit l'application identité Id_E de E par $\mathrm{Id}_E : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x \end{cases}$. C'est une application qui jouera un rôle central dans les cours à venir.

Définition : Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble

Soient E un ensemble et A une partie de E. On appelle fonction indicatrice (ou caractéristique) de A, l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0, 1\}$ définie par $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Proposition

Soit A, B deuxparties d'un ensemble E, alors $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \Leftrightarrow A = B$.

Exemple

$f(x) = \sqrt{\ln(x)}$ n'est pas une application, mais une formule ! On peut considérer alors l'application

$$f : \begin{cases}]1, +\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{\ln(x)} \end{cases}$$

mais on pourrait aussi considérer

$$\begin{cases}]1, +\infty[& \to \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto \sqrt{\ln(x)}, \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} [2, +\infty[& \to \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto \sqrt{\ln(x)} \cdots \end{cases}$$

a) Opérations sur les applications

Définition : Restriction/Prolongement

Soient E_1, E_2, F des ensembles tels que $E_1 \subset E_2, g : E_1 \to F$ et $f : E_2 \to F$ deux applications. On suppose que, pour tout $x \in E_1$, $f(x) = g(x)$ prolongement de g à E_2.

restriction de f à E_1, que l'on note $g = f_{E_1}$, et $f1$

Exemple

Soit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ pour $x \neq 0$. Alors un prolongement

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de g est une application qui vérifie $\forall x \neq 0, f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, et $f(0)$ est un réel quelconque. Si l'on veut en plus que f soit continue en 0 , il faudra imposer que $f(0) = 1 \ldots$

Définition : Composée de deux applications

Soient E, F, G des ensembles, F_1 une partie de $F, f : E \to F$ et $g : F_1 \to G$ des applications. Si f ne prend que des valeurs dans F_1, c'est-à-dire $\forall x \in E, f(x) \in F_1$, on définit la composée de f et de g (ou de f par g), notée $g \circ f$, comme étant l'application $g \circ f : \begin{cases} E \to \mathrm{G} \\ x \mapsto g[f(x)] \end{cases}$

Exemple

1. Si $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(x) \end{cases}$ $etg : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x}, \end{cases}$ comme $f(x) > 0$ pour tout réel x, on peut définir $g \circ f$, et on a $g \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \sqrt{\exp(x)} \end{cases}$
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ définies par $f(x) = x^2 - 8$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.
   Alors $f \circ g : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$ vérifie $f \circ g(x) = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2 - 8$ pour tout réel x différent de 1 .
   $g \circ f$ n'est pas définie, mais en revanche $g \circ f_{\mathbb{R}\backslash(-3,3)}$ l'est. En effet,

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 8 = 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } -3$$

Donc $f(x)$ est dans l'ensemble de définition de g si et seulement si $x \in \mathbb{R}\backslash\{-3, 3\}$. Et alors, $g \circ f_{\mathbb{R}}(1 - 3, 3\}(x) = \dfrac{x^2 - 8 + 1}{x^2 - 8 - 1}$, donc .

Proposition

Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application. Alors $\mathrm{Id}_F \circ f = f$ et $f \circ \mathrm{Id}_E = f$.

Autrement dit, l'identité joue un rôle similaire pour la composition à celui du nombre 1 pour la multiplication (pour les nombres réels).

Proposition

La composition est associative : soient E, F, G, H des ensembles et $f : E \to F, g : F \to G, h : G \to H$ des applications, alors

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

(que l'on note alors plus simplement $h \circ g \circ f$).

Les opérations sur les sous-ensembles de E peuvent se traduire de manière simple en opérations sur les fonctions indicatrices :

Proposition

Soient E un ensemble, et A et B deux parties de E, alors :

$\mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A, \quad \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B, \quad \mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$

où 1 désigne l'application qui à x dans E associe 1 , c'est-à-dire $\mathbb{1}_E$.

i Injectivité. Surjectivité. Bijectivité

Définition : Application injective

On dit qu'une application $f : E \to F$ est injective si tout $y \in F$ a au plus un antécédent par f dans E, autrement dit si :

pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ a au plus une solution $x \in E$,

ce qui revient à

$$\text{pour tout } (x_1, x_2) \in E^2, (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

ou en contraposant :

$$\text{pour tout } (x_1, x_2) \in E^2, (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

Remarque

Soit Γ le graphe d'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors f est injective si et seulement si toute droite parallèle à l'axe des abscisses coupe Γ en au plus un point.

Exemple

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}n'$ est pas injective, car $f(1)\backslash\backslash$ $f(-1)$ mais $1 \neq -1$.
2. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}_+$est injective.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$. est injective.
4. Une application constante définie sur un intervalle (non réduit à un point) de $\mathbb{R}$n'est pas injective.

Définition : Application surjective

On dit qu'une application $f : E \to F$ est surjective si tout $y \in F$ a au moins un antécédent par f dans E, autrement dit si :

pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

En terme d'équation, cela revient à :

pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ a au moins une solution $x \in E$.

Remarque

Soit I le graphe d'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors f est surjective si et seulement si toute droite parallèle à l'axe des abscisses coupe Γ en au moins un point.

Exemple

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$ n'est pas surjective, car $f(x) = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}_+$est surjective (si y est positif, on a $y = f(\sqrt{y})$).

Définition : Application bijective

On dit qu'une application $f : E \to F$ est bijective si elle est à la fois injective et surjective, autrement dit si pour tout $y \in F$, y admet un et un seul antécédent par f :

En terme d'équation, cela revient à :

pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ a exactement une et une seule solution $x \in E$.

Définition : Application réciproque d'une bijection

Soit $f : E \to F$ une application bijective. On appelle application réciproque de f, et on note f^{-1}, l'application de F dans E qui à $y \in F$ associe l'unique antécédent par f de y par f, c'est-à-dire l'unique solution $x \in E$ de l'équation $y = f(x)$.

Ainsi, pour $x \in E$ et $y \in F$, on a $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

Exemple

1. Soit E un ensemble, alors l'application identité de E, Id_E, est bijective, et son application réciproque est elle-même.

2. $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ est une bijection, de bijection réciproque $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$.

3. $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto e^x \end{cases}$ est une bijection, de bijection réciproque $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x \end{cases}$.

4. $\begin{cases} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{cases}$ est une bijection, de bijection réciproque elle-même.

Théorème

Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \to E$ telle que :

$f \circ g = \mathrm{Id}_F \quad$ et $\quad g \circ f = \mathrm{Id}_E$

Le cas échéant, l'application g est unique, c'est $g = f^{-1}$.

En particulier f^{-1} est elle-même bijective, d'application réciproque $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Remarque

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications telles que $g \circ f = 1d_\varepsilon$

alors f et g ne sont pas forcément bijectives.

Exemple

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$définie par $g(x) = x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$ vérifient $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$, mais f n'est pas surjective, et g n'est pas injective.

Corollaire

Soient $f : E \to F, g : F \to G$ des applications bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et son application réciproque est $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Remarque

Soit f une bijection. On appelle alors souvent «bijection réciproque de f » l'application réciproque de f, puisqu'elle est aussi bijective.