

Chapitre 2 : Ensemble des Nombres Réels

Dr. LOUAAR Mohammed

Université Frères Mentouri Constantine 1

Faculté des sciences exactes

Département de mathématiques

Email : mohammed.louaar@umc.edu.dz

Table des matières



I - Chapitre 2 : Ensemble des Nombres Réels	3
1. Définition axiomatique de l'ensemble des nombres réels	4
1.1. Lois de composition interne	4
1.2. Axiomes algébriques de l'ensemble des nombres réels	4
1.3. Axiome de l'ordre	5
1.4. Axiome d'Archimède	5
1.5. Axiome de la borne supérieure	5
2. Propriétés fondamentales du corps des réels	8
2.1. Valeur absolue	8
2.2. Intervalles	8
2.3. Les radicaux	9
2.4. Partie entière	9
2.5. Quelques formules de base dans les nombres réels	10

Chapitre 2 : Ensemble des Nombres Réels

I

Les nombres réels sont utilisés pour représenter n'importe quelle mesure physique (le prix d'un produit, la durée entre deux événements, la masse d'un atome...)

On définit les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

- Les entiers naturels, représentés par l'ensemble $\mathbb{N}$.
- Les entiers relatifs, représentés par l'ensemble $\mathbb{Z}$.
- Les nombres décimaux de la forme $\frac{a}{10^n}$ où $a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$
- Les nombres rationnels de la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.
- Les nombres algébriques qui sont solutions des équations polynomiales à coefficients rationnels, par exemple : $\sqrt{2}$ est solution de $x^2 - 2 = 0$.
- Les nombres transcendants qui ne sont pas algébriques, par exemples π et e
- Un nombre irrationnel est un nombre réel qui n'est pas rationnel, c'est-à-dire qui ne peut pas s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$. La notion des nombres algébriques permet de donner plusieurs nombres irrationnels par exemple : $\sqrt{2}, \sqrt{3} \dots$. Les nombres transcendants sont tous des irrationnels.

1. Définition axiomatique de l'ensemble des nombres réels

1.1. Lois de composition interne

Définition

Une loi de composition interne notée $\star$ sur un ensemble E est une application de $E \times E$ dans E c'est-à-dire pour tout couple $(x, y) \in E \times E$ fait correspondre un unique élément de E noté $x \star y$

$$\star : E \times E \longrightarrow E$$

$$(x, y) \longmapsto x \star y$$

Notation :

On note $(E, \star)$ pour désigner un ensemble E muni d'une loi de composition interne $\star$.

Exemple

- L'addition $+$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
- La multiplication $\times$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
- La soustraction $-$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$. Par contre, elle ne l'est pas dans $\mathbb{N}$. En effet $3 - 5 = -2$ n'est pas un entier naturel.

1.2. Axiomes algébriques de l'ensemble des nombres réels

On munit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ de deux lois de composition interne, l'addition $(+)$ et la multiplication $(\times)$, les propriétés suivantes sont satisfaites :

Propriétés de l'addition :

- L'addition est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$
- L'addition est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x + y) + z = x + (y + z)$.
- Il existe un élément neutre 0 dans $\mathbb{R}$ pour l'addition, tel que, pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a $0 + x = x + 0 = x$
- Pour tout x dans $\mathbb{R}$, il existe un élément symétrique noté $(-x)$ dans $\mathbb{R}$ tel que $x + (-x) = (-x) + x = 0$

Propriétés de la multiplication :

- La multiplication est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \times y = y \times x$.
 - La multiplication est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
 - La multiplication est distributive par rapport à l'addition : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$
 - Il existe un élément neutre 1 dans $\mathbb{R}$ pour la multiplication, tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 \times x = x \times 1 = x$
 - Pour tout x dans $\mathbb{R}^*$, il existe un élément inverse noté x^{-1} tel que $x^{-1} \times x = x \times x^{-1} = 1$.
- Conclusion : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est appelé corps commutatif.

1.3. Axiome de l'ordre

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni d'une relation d'ordre ($\leq$ ou $\geq$) est un corps totalement ordonné. En effet

- $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$ (réflexivité).
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ et } y \leq z \implies x \leq z$ (transitivité).
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ et } y \leq x \implies x = y$ (anti-symétrie).
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y \text{ ou } y \leq x$ (ordre total).

Propriétés :

Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

- $\triangleright x \leq y \text{ et } z \leq t \implies x + z \leq y + t$.
- $\triangleright x \leq y \text{ et } z \geq 0 \implies x \times z \leq y \times z$.
- $\triangleright x \leq y \text{ et } z \leq 0 \implies x \times z \geq y \times z$.

1.4. Axiome d'Archimède

Axiome d'Archimède

Un axiome important relié à la relation d'ordre est l'axiome d'Archimède qui est énoncé d'une manière générale par :

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un corps Archimédien. Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > x$

1.5. Axiome de la borne supérieure

Avant d'énoncer l'axiome de la borne supérieure, nous avons besoin de quelques définitions du plus petit et du plus grand élément d'une partie de $\mathbb{R}$ et des majorants et des minorants.

1.5.1. Maximum et minimum :

 *Définition*

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit que α est le plus grand élément de A (ou maximum de A) si et seulement si $\alpha \in A$ et $\forall x \in A, x \leq \alpha$

On note $\alpha = \max A$.

- On dit que β est le plus petit élément de A (ou minimum de A) si et seulement si $\beta \in A$ et $\forall x \in A, x \geq \beta$.

On note $\beta = \min A$.

 *Exemple*

- Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne possèdent pas de plus grand élément.
- L'ensemble $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément $0 \in \mathbb{N}$ ($\min \mathbb{N} = 0$ car $\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 0$).
- $A = [2, 6]$ possède un maximum et un minimum, $\min A = 2$ et $\max A = 6$.

- $B =]1, 7[$ ne possède ni maximum, ni minimum.
- $C =]-2, 3]$ possède un maximum et ne possède pas de minimum, $\max C = 3$ et $\min C$ n'existe pas.

a) Majorants et minorants :

Définition

Soient m, M deux nombres réels quelconques et $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit que M est un majorant de l'ensemble A (ou A est majoré par M) si et seulement si $\forall x \in A, x \leq M$
- On dit que m est un minorant de l'ensemble A (ou A est minoré par m) si et seulement si $\forall x \in A, x \geq m$.
- Si l'ensemble A est à la fois majoré et minoré, on dit que A est borné.

Remarque

- Le plus petit élément de A est un minorant de A et le plus grand élément de A est un majorant de A .
- Un minorant de A (respectivement majorant de A) peut ne pas être le plus petit élément de A (respectivement plus grand élément de A), car il n'est pas nécessairement dans A .
- Le plus petit élément et le plus grand élément, s'ils existent, sont uniques.

Exemple

- $A = [2, 6]$ est borné, il est à la fois majoré et minoré.
 - L'ensemble des majorants de A est $[6, +\infty[$ et l'ensemble des minorants de A est $] -\infty, 2]$. Ainsi on a $\max A = 6$ et $\min A = 2$.
- $B =]1, 7[$ est borné, il est à la fois majoré et minoré.
 - L'ensemble des majorants de B est $[7, +\infty[$ et l'ensemble des minorants de B est $] -\infty, 1]$. Ainsi on a 7 est un majorant de B mais n'est pas un maximum de B et on écrit $\max B$ n'existe pas.
 - 1 est un minorant de B mais n'est pas un minimum de B et on écrit $\min B$ n'existe pas.
- $C =] -\infty, 5]$ est majoré et l'ensemble des majorants de C est $[5, +\infty[$, mais il n'est pas borné car il n'est pas minoré.

i Borne supérieure et borne inférieure

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- On appelle borne supérieure de A noté $\sup A$ le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A .
- On appelle borne inférieure de A noté $\inf A$ le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A .

Exemple

- $A = [2, 6]$ l'ensemble des majorants de A est $[6, +\infty[$, donc $\sup A = 6$.
- L'ensemble des minorants de A est $] -\infty, 2]$, donc $\inf A = 2$.
- $B =]1, 7[$ l'ensemble des majorants de B est $[7, +\infty[$, donc $\sup B = 7$.

- L'ensemble des minorants de A est $] -\infty, 1]$, donc $\inf B = 1$
- $C =] -\infty, 5]$ l'ensemble des majorants de C est $[5, +\infty[$, donc $\sup C = 5$.
- L'ensemble C n'est pas minoré, alors $\inf C$ n'existe pas.

Remarque

Axiome de la borne supérieure:

- Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée admet une borne inférieure.

Proposition :

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$, alors

- $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.
- $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.

Exemple

Soit $A = \left\{ 3 - \frac{1}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$, déterminer, s'ils existent, $\sup A$, $\inf A$, $\min A$ et $\max A$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$n \geq 0 \Rightarrow 2n + 1 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2n+1} \leq 1 \Rightarrow 2 \leq 3 - \frac{1}{2n+1} < 3$$

Donc 2 est un minorant de A et $2 \in A$ (pour $n = 0$) par conséquent $\min A = \inf A = 2$.

D'autre part, 3 est un majorant de A et $3 \notin A$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{2n+1} \right) = 3$, alors $\sup A = 3$.

Le $\max A$ n'existe pas (car $3 \notin A$)

2. Propriétés fondamentales du corps des réels

2.1. Valeur absolue

On appelle valeur absolue du réel x le réel positif noté $|x|$ défini par

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Propriétés :

On a les propriétés suivantes

- $\forall x \in \mathbb{R}, |-x| = |x|$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x \times y| = |x| \times |y|$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^*, \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} |x^n| = |x|^n$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \geq 0, |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, |x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ ou } x \leq -a$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$.

2.2. Intervalles

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, on définit dans $\mathbb{R}$ les intervalles suivants :

- Intervalle ouvert $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$
- Intervalle fermé $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$
- Intervalle semi ouvert à droite $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$
- Intervalle semi ouvert à gauche $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$
- $] - \infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$
- On note l'ensemble des nombres réels par $\mathbb{R} =] - \infty, +\infty[$.
- On définit par $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, appelé droite réelle achevée.

2.3. Les radicaux

Définition

- Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec n pair, on appelle racine n -ième de x et on note $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, l'unique solution $y \in \mathbb{R}^+$ tel que $y^n = x$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec n impair, on appelle racine n -ième de x et on note $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, l'unique solution $y \in \mathbb{R}$ tel que $y^n = x$.

Exemple

$$\sqrt[3]{8} = 2, \quad \sqrt[4]{81} = 3, \quad \sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}, \quad \sqrt[3]{-1} = -1$$

Propriétés :

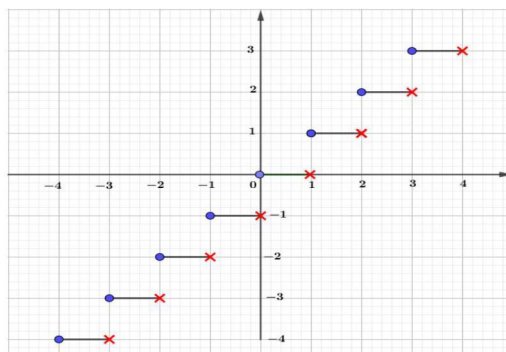
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, \quad \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, & \text{si } n \text{ est pair} \\ x, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

2.4. Partie entière

Définition

La partie entière d'un nombre réel x , notée $E(x)$ (ou $\lfloor x \rfloor$ ou encore $[x]$) est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .

Autrement dit, pour tout réel x , il existe un unique entier relatif $E(x) \in \mathbb{Z}$, tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$



La courbe représentative de la fonction partie entière

Propriétés :

Soit x un nombre réel. On a

1. $x - 1 < E(x) \leq x$
2. $E(x) = x \iff x \in \mathbb{Z}$

$$3. \forall k \in \mathbb{Z}, \quad E(x+k) = E(x) + k$$

Exemple

$$E(3) = 3, E(-5) = -5, E(2.8) = 2, E(-3.1) = -4, E\left(\frac{7}{11}\right) = 0.$$

2.5. Quelques formules de base dans les nombres réels

Formule du Binôme de Newton :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}, \quad \text{avec } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Les coefficients C_n^k sont appelés coefficients binomiaux (coefficients du binôme). Pour calculer ces coefficients binomiaux, on peut utiliser le triangle de Pascal suivant : et on obtient par exemples $C_5^2 = 10$,

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6...$
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	6	1	
$n=6...$	1	6	15	20	15	6	1

$$C_4^3 = 4, C_6^3 = 20, C_6^2 = 15, C_3^1 = 3 \dots$$

Remarque

Le coefficient binomial vérifie pour tout n dans $\mathbb{N}$ les propriétés suivantes :

$$C_n^n = 1, \quad C_n^0 = 1, \quad C_n^{n-1} = n$$

Exemple : Développer $(x+2)^3$ et $(x-1)^3$.

On a

$$(x+2)^3 = \sum_{k=0}^3 C_3^k x^k 2^{3-k} = C_3^0 x^0 2^3 + C_3^1 x^1 2^2 + C_3^2 x^2 2^1 + C_3^3 x^3 2^0 = 8 + 12x + 6x^2 + x^3.$$

et

$$\begin{aligned} (x-1)^3 &= \sum_{k=0}^3 C_3^k x^k (-1)^{3-k} = C_3^0 x^0 (-1)^3 + C_3^1 x^1 (-1)^2 + C_3^2 x^2 (-1)^1 + C_3^3 x^3 (-1)^0 \\ &= -1 + 3x - 3x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Somme des n premiers entiers :

$$\text{On a } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique :

Soit $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, alors

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$
$$\sum_{k=1}^n x^k = x + x^2 + \cdots + x^n = x \left(\frac{1 - x^n}{1 - x} \right) = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$