

Séries d'exercices N° 02

I

1.

Exercice :

Exercice 1 :

Pour tous réels x et y , montrer les propriétés suivantes :

1. $|xy| = |x||y|$.
2. Si $a \geq 0$ alors $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$.
3. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

$$|x - 1| + |x - 2| = 2, \quad |x + 12| = |x^2 - 8|, \quad |x + 3| \leq x, \quad \left| \frac{1}{x} - 2 \right| \leq 3,$$

$$\sqrt{41 - x} + \sqrt{41 + x} = 10, \quad \sqrt{2x + 3} \geq x.$$

Exercice 3 :

Montrer que :

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \leq \beta \implies E(\alpha) \leq E(\beta)$.
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : E(\alpha) + E(\beta) \leq E(\alpha + \beta) \leq E(\alpha) + E(\beta) + 1$.

Exercice 4 :

Les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles minorées, majorées? Dans chaque cas, déterminer, si elle existe, la borne inférieure, la borne supérieure, et dire s'il s'agit d'un minimum (le plus petit élément) ou d'un maximum (le plus grand élément).

$$A_1 =]0, 1] \cup]2, 4[, \quad A_2 =]-\infty, 6], \quad A_3 = \left\{ 2 - \frac{3}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad A_4 = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^* \right\},$$

$$A_5 = \left\{ \frac{x+1}{x+2}, x \in \left] -\infty, -3 \right] \right\}, \quad A_6 = \left\{ \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Exercice 5 :

On considère les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$A = \{-x + 4, \quad x \in [-5, 1]\},$$

$$B = \{a + (-1)^n b \text{ où } (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \text{ et } n \in \mathbb{N}\}.$$

1. Déterminer s'il existent $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$.
2. Déterminer s'il existent $\sup B$, $\inf B$, $\max B$, $\min B$.

Exercice 6 :

- En utilisant le triangle de Pascal, calculer $\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^5$.
- En déduire une linéarisation de $\cos^5 x$ et $\sin^5 x$. (linéariser veut dire donner son égale avec une expression linéaire, i.e. de degré 1).