Chapitre 2 : Formes bilinéaires sur un espace vectoriel de dimension finie

Table des matières

Introduction

Dans tout ce chapitre K désignera un corps commutatif et E un K-espace vectoriel de dimension finie.

2.1 Définitions

1. Définitions

Définition 2.1 *Définition*

Une application

$$\begin{aligned} b : E \times E &\to K \\ (x, y) &\mapsto b(x, y) \end{aligned}$$

est dite forme bilinéaire lorsqu'elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables, c'est à dire :

– Pour tout *y* de *E* fixé, l'application $x \mapsto b(x, y)$ est linéaire,

– Pour *x* de *E* fixé, l'application $y \mapsto b(x, y)$ est linéaire.

Autrement dit, pour tout $x, y, z \in E, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in K$

$$b(\alpha_1 x + \beta_1 y, z) = \alpha_1 b(x, z) + \beta_1 b(y, z).$$
$$et$$
$$b(x, \alpha_2 y + \beta_2 z) = \alpha_2 b(x, y) + \beta_2 b(x, z).$$

Définition 2.2 *Définition*

Soit $b : E \times E \to K$ une forme bilinéaire sur *E*. On dit que :

- *b* est symétrique si pour tout *x, y* de E $b(x, y) = b(y, x)$.
- *b* est antisymétrique si pour tout *x, y* de E $b(x, y) = -b(y, x)$.
- *b* est alternée si pour tout *x* de *E* $b(x, x) = 0$.

Proposition 2.1 *Fondamental*

Toute forme bilinéaire alternée sur *E* est antisymétrique.

La réciproque est vraie si ***car(K)*≠2**. (*car(K)*=Caractéristique de *K*)

Preuve *Fondamental*

Supposons que *b* est alternée, d'où on a

$$b(x + y, x + y) = b(x, y) + b(y, x) + b(x, x) + b(y, y),$$

d'où

$$\begin{aligned} b(x, y) + b(y, x) &= b(x + y, x + y) - b(x, x) - b(y, y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc

$b(x, y) = -b(y, x)$. Alors *b* est antisymétrique.

Réciproquement, supposons que *b* est antisymétrique et *car(K)* ≠ 2 d'où on a

$$\begin{aligned} 2b(x,x) &= b(x,x)+b(x,x) \\ &= -b(x,x)+b(x,x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ceci implique que $b(x,x)=0.$

Notation — *Complément*

On note par *L2(E)* l'ensemble des formes bilinéaires sur *E,* par *S2(E)* l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur *E* et par *A2(E)* l'ensemble des formes bilinéaires antisymétriques sur *E*.

Exemple 2.1 — *Exemple*

1. Soient $E=\mathbb{R}^2, x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in E$ et soit l'application $b:E\times E\to\mathbb{R}$ telle que $b(x,y)=x_1y_1+5x_2y_2-3x_1y_2-3x_2y_1, \$b\$ \, est \, une \, forme \, bilinéaire \, symétrique.$

2. $E=\mathbb{R}^n,\ le\ produit\ scalaire\ canonique\ \langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i$ est une forme bilinéaire symétrique.

3. Soit *E = C([0; 1], R)* l'espace des applications continues de [0, 1] dans R, l'application

$$b: E\times E\to\mathbb{R}$$
$$(f,g)\mapsto b(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)dt$$

est une forme bilinéaire symétrique.

Proposition 2.2 — *Fondamental*

L'ensemble *L2(E)* muni de la lois interne (+) telle que :

$(b_1+b_2)(x,y)=b_1(x,y)+b_2(x,y),$

et de la multiplication par un scalaire (.) (lois externe) telle que

$(\lambda.b)(x,y)=\lambda.b(x,y), \lambda\in Kest\,un\,K-espace\,vectoriel.$

L'ensemble *S2(E)* est un sous espace vectoriel de *L2(E)*.

Proposition 2.3 — *Fondamental*

$S_2(E)$ *et* $A_2(E)$ sont deux supplémentaires de $L_2(E)$. c-à-d. $L_2(E)=S_2(E)\oplus A_2(E)$.

2.2 Matrice associée à une forme bilinéaire

1. Introduction

Soient *E* un *K*-espace vectoriel de dimension finie *n* muni d'une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ et *b* une forme bilinéaire sur *E*.

2. Expression matricielle d'une forme bilinéaire

Fondamental

Pour tout *x*, *y* de *E* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \ y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$.

Posons *X*, *Y* les matrices colonnes des coordonnées de *x* et *y*

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, d'où on a

$$\begin{aligned} b(x,y) = b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) &= \sum_{i=1}^{n} x_i b\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) \ (\textit{linéarité par rapport à } x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j b(e_i, e_j) \quad (\textit{linéarité par rapport à } y) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j b(e_i, e_j). \end{aligned}$$

Si on suppose $b(e_i, e_j) = a_{ij}$ on obtient

$b(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$.

La matrice $M = [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq n}$ est appelée la matrice associée à la forme bilinéaire *b*.

L'expression (1) s'écrit sous la forme matricielle suivante

$$b(x,y) = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

d'où : $b(x,y) = {}^t XMY$

Remarque 2.1 — *Remarque*

Si *b* est symétrique alors $b(e_i, e_j) = b(e_j, e_i)$. donc $a_{ij} = a_{ji}$. Donc *M* est une matrice symétrique.

Dans l'autre sens si *M* est une matrice symétrique dans $M_n(K)$ alors l'application *b* définie par $b(x,y) = {}^t XMY$

telles que X, Y sont des matrices colonnes des coordonnées de x et y respectivement dans la base $\boldsymbol{B}$ est une forme bilinéaire symétrique.

Exemple 2.2 ***Exemple***

1. La matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ la forme bilinéaire symétrique suivante

$b(x,y) =^t XMY$

$$b(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
$$b(x,y) = 3x_1y_1 - 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1.$$

2. Soit la forme bilinéaire suivante

$b(x,y) = x_1y_1 + 5x_2y_2 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1,$

$M = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq 2} = [b(e_i,e_j)]_{1\leq i,j\leq 2},$

où $B = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$

On a $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

En effet

$$a_{11} = b(e_1,e_1) = b((1,0),(1,0)) = 1,$$
$$a_{12} = b(e_1,e_2) = b((1,0),(0,1)) = -3,$$
$$a_{21} = b(e_2,e_1) = b((0,1),(1,0)) = -3,$$
$$a_{22} = b(e_2,e_2) = b((0,1),(0,1)) = 5.$$

On peut calculer la matrice de b par une autre méthode plus pratique

$$\begin{aligned} b(x,y) &= x_1y_1 + 5x_2y_2 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 \\ &= x_1(y_1 - 3y_2) + x_2(5y_2 - 3y_1) \\ &= (x_1x_2)\begin{pmatrix} y_1 - 3y_2 \\ -3y_1 + 5y_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1x_2)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= {}^tXMY, \end{aligned}$$

d'où $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

2.3 Changement de base

1. Introduction

Soient ***B1***, ***B2*** deux bases de *E* et *P* la matrice de passage de ***B1*** à ***B2***, si *X1* et *Y1* sont les vecteurs colonnes des coordonnées de *x* et *y* respectivement dans ***B1*** et *X2, Y2* sont dans ***B2*** on a:

X1 = PX2, Y1 = PY2.

2. Changement de base

Théorème 2.1 — *Fondamental*

Soit *b* une forme bilinéaire sur *E* alors $M_{B_2}(b) =^t PM_{B_1}(b)P$.

Preuve — *Fondamental*

On a

$$\begin{aligned} b(x,y) &= {}^tX_1M_{B_1}(b)Y_1 \\ &= {}^t(PX_2)M_{B_1}(b)(PY_2) \\ &= {}^tX_2({}^tPM_{B_1}(b)P)Y_2. \end{aligned}$$

D'où

$$M_{B_2}(b) = {}^tPM_{B_1}(b)P.$$

Exemple 2.3 — *Exemple*

Soit $\mathbb{R}^3$ munit de la base canonique *B = (e1, e2, e3)* et b une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$b(x,y) = x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1.$

Calculer *M'* la matrice de *b* dans la base $B = \{v_1 = (1,1,0), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,1,1)\}$

Solution :

On a

$$\begin{aligned} b(x,y) &= x_1(-y_3) + x_2(y_2) + x_3(-y_1) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_3 \\ y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= {}^tXMY, \end{aligned}$$

D'où

$$M = M_B(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc on a

$$\begin{aligned} M' = M_{B'}(b) &=^t PM_B(b)P \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque 2.2 *Remarque*

Soit $M_B(b)$ la matrice associée à *b* dans la base *B*, alors

- Si *b* est symétrique alors sa matrice $M_B(b)$ est une matrice symétrique.
- Si *b* est antisymétrique alors sa matrice $M_B(b)$ est une matrice symétrique.
- Toute forme bilinéaire (si *car(K)* ≠ 2) sur E se décompose en la somme d'une forme bilinéaire symétrique et une forme bilinéaire antisymétrique.

En effet

$$\begin{aligned} b(x,y) &= \frac{b(x,y)+b(y,x)}{2} + \frac{b(x,y)-b(y,x)}{2} \\ &= \underbrace{b_1(x,y)}_{\in S_2(E)} + \underbrace{b_2(x,y)}_{\in A_2(E)}. \end{aligned}$$

Remarque 2.3 *Remarque*

Soit *b* une forme bilinéaire sur un *K*-espace vectoriel *E* de dimension finie *n* muni d'une base *B* et *M* = $M_B(b)$. On a

$$\begin{aligned} M &= \frac{M +^t M}{2} + \frac{M -^t M}{2} \\ &= M_1 + M_2, \end{aligned}$$

il est facile de vérifier que *M1* est une matrice symétrique et *M2* est une matrice antisymétrique. Ainsi *M1* est la matrice de la partie symétrique *b1* de *b* et *M2* est la matrice de la partie antisymétrique *b2* de *b*.

2.4 Noyau et rang d'une forme bilinéaire

IV

1. Noyau et rang d'une forme bilinéaire

Définition 2.3 *Définition*

Soit $b : E \times E \to K$ une forme bilinéaire symétrique ou alternée.

On appelle le noyau de *b* l'ensemble

$$\begin{aligned}\ker(b) &= \{x \in E, \forall y \in E : b(x,y) = 0\} \\ &= \{x \in E,\ \forall y \in E :\ b(y,x) = 0\}\end{aligned}$$

Définition 2.4 *Définition*

Le rang d'une forme bilinéaire symétrique ou alternée noté ***rg (b)*** est le rang de sa matrice associée dans une base quelconque.

Proposition 2.4 *Fondamental*

Soient *E* un *K*-espace vectoriel de dimension finie *n*, *b* une forme bilinéaire symétrique ou alternée et *B* une base de *E*. Soit *A* = $M_B(b)$ la matrice associée à la forme bilinéaire *b* dans la base *B*. Alors

$$\begin{aligned}\dim\ker(b) &= n - rg(b) \\ &= n - rg(A).\end{aligned}$$

Définition 2.5 *Définition*

Une forme bilinéaire *b* sur *E* est dite non dégénérée (ou régulière) si $\ker b = \{0\}$.

Elle est dite dégénérée si $kerb \neq \{0\}$.

2.5 L'équivalence entre formes bilinéaires

1. L'équivalence entre formes bilinéaires

Proposition 2.5 *Fondamental*

Soient *E*, *F* deux *K*-espaces vectoriels de dimension finie et soient $u : E \to F$ un isomorphisme, *b* une forme bilinéaire sur *F*. L'application

$$\begin{array}{rcl} \rho & : & E \times E \longmapsto K \\ (x,y) & \longmapsto & b(u(x), u(y)) \end{array}$$

est une forme bilinéaire sur *E*.

Définition 2.6 *Définition*

Soit *E* un espace vectoriel de dimension finie, *b* une forme bilinéaire sur E .

Soit *F* un espace vectoriel de dimension finie, ρ une forme bilinéaire sur *F*.

On dit que *b* et ρ sont équivalentes s'il existe $u : E \to F$ un isomorphisme tel que

$b(x,y) = \rho(u(x), u(y))$.

2.6 Orthogonalité

VI

1. Introduction

Soit *E* un *K*-espace vectoriel de dimension finie et *b* une forme bilinéaire sur *E* .

2. Orthogonalité

Définition 2.7 *Définition*

Soient *x, y* deux vecteurs de *E*, on dit que *x* est *b*-orthogonal à *y* (ou orthogonal par rapport à b) si *b(x, y) = 0*. On note $x \perp_b y$ si pas d'ambiguïté $x \perp y$.

Remarque 2.4 *Remarque*

- 1. Si *b* est symétrique ou alternée la relation d'orthogonalité est symétrique ($x \perp y \Rightarrow y \perp x$).
- 2. Si *x* est *b*-orthogonal à *y1, . . ., yr* alors *x* est *b*-orthogonal à toute combinaison linéaire des *yi*.
- 3. Les éléments de *ker (b)* sont *b*-orthogonaux à tout élément de *E*.

Définition 2.8 (Base orthogonale) *Définition*

Une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de *E* est dite *b*-orthogonale si et seulement si pour tout *i, j* de [1, *n*], *i ≠ j*, *b(ei, ej) = 0.* c-à-d. les vecteurs de *B* sont deux à deux *b*-orthogonaux.

Elle est dite *b*-orthonormée si et seulement si

$$b(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & si\ i = j \\ 0, & si\ i \neq j \end{cases}$$

Définition 2.9 (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel) *Définition*

Soit *b* une forme bilinéaire symétrique ou alternée sur *E* et *F* ⊂ *E* un sous-espace vectoriel de *E*. L'orthogonal de *F* est l'ensemble $F^\perp = \{x \in E,\ \forall y \in F, b(x, y) = 0\}$.

Remarque 2.4 *Remarque*

1. Dans la pratique, pour calculer l'orthogonale de *F* on donne successivement comme valeurs à *y* les éléments d'une base de *F*, ce qui aboutit à un système d'équations à résoudre.
2. Si *b* est une forme bilinéaire ni symétrique ni antisymétrique, on définit l'orthogonale de *F* par rapport à *b* à gauche et à droite comme suit

   $F_g^\perp = \{x \in E,\ \forall y \in F, b(x, y) = 0\}$,
   $F_d^\perp = \{x \in E,\ \forall y \in F, b(y, x) = 0\}$.
3. Si *b* une forme bilinéaire symétrique ou alternée sur *E*, alors $\ker(b) = E^\perp$.

Définition 2.10 *Définition*

Soient *A*, *B* ⊂ *E*, on dit que *A* et *B* sont *b*-orthogonaux et on note $A \perp B$ si et seulement si $\forall x \in A, \forall y \in B,\ b(x, y) = 0.$

Proposition 2. 6 *Fondamental*

Soient *E* un *K*-espace vectoriel, *b* une forme bilinéaire symétrique sur *E*, *A* et *B* deux parties non vides de *E*. On note par *vect(A)* le sous-espace vectoriel de *E* engendré par *A*. On a les propriétés suivantes :

1. Si *A* ⊂ *B* alors $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
2. L'orthogonale de *A* est un sous-espace vectoriel de *E*.
3. $A^{\perp} = (vect(A))^{\perp}$
4. Soient *A*, *B* deux sous-espaces vectoriels de *E* alors $(A + B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.
5. Soit *A* un sous espace vectoriel de *E*, $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$.

Preuve : Laisser comme exercice.

Définition 2.11 (Vecteur isotrope) *Définition*

On appelle vecteur isotrope tout vecteur orthogonal à lui même, c-à-d. *x* de *E* est un vecteur isotrope **ssi** *b(x,x)=0*.

Définition 2.12 *Définition*

1. Une forme bilinéaire *b* sur *E* est dite positive si pour tout x de E, *b(x, x)* ≥ 0.
2. Elle est dite définie si pour tout $x \in E, b(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$
3. Elle est dite définie positive si elle est positive et définie, c. à. d. pour tout *x* de *E*-{0}, *b(x, x)* > 0.

Proposition 2.7 *Fondamental*

Une forme bilinéaire symétrique et positive est non dégénérée **ssi** pour tout $x \in E, b(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$

Preuve : Soit *b* une forme bilinéaire symétrique, positive et non dégénérée et soit *x* de *E* : *b(x, x)* = 0, on a

$\forall \lambda \in K, \forall y \in E, b(\lambda x + y, \lambda x + y) \geq 0,$

d'où

$\lambda^2 b(x, x) + 2\lambda b(x, y) + b(y, y) \geq 0,$

alors

$2\lambda b(x, y) + b(y, y) \geq 0,$

on a $\forall y \in E, b(y, y) \geq 0$, pour que (1) soit vraie pour tout *λ* de *K* et tout *y* de *E*, il faut que *b(x, y)* = 0, donc

$$\begin{aligned} \forall y \in E, b(x, y) = 0 &\Longrightarrow x \in E^{\perp} = \ker(b) = \{0\} \\ &\Longrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

La réciproque : Supposons que pour tout $x \in E, b(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$ et montrons que b est non dégénérée

$$\begin{aligned} \forall x \in \ker(b) &\Longrightarrow \forall y \in E, b(x,y) = 0 \\ &\Longrightarrow b(x,x) = 0 \\ &\Longrightarrow x = 0 \\ &\Longrightarrow \ker(b) = \{0\}, \end{aligned}$$

d'où b est non dégénérée.

Corollaire 2.1 *Complément*

Toute forme bilinéaire symétrique définie positive est non dégénérée.

Preuve : On a

$$\begin{aligned} \forall x \in \ker(b) &\Longrightarrow \forall y \in E, \quad b(x,y) = 0 \\ &\Longrightarrow b(x,x) = 0, \ pour\ y = x \\ &\Longrightarrow x = 0, \ car\ si\ x \neq 0, b(x,x) > 0 \\ &\Longrightarrow \ker(b) = \{0\}. \end{aligned}$$

D'où b est non dégénérée.

Exercice *Exemple*

Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, on considère l'application $b : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par : $b(P,Q) = \int_0^1 P(t).Q'(t)dt$.

1. Justifier que b est une forme bilinéaire sur E.
2. Déterminer la matrice M représentant b dans la base canonique $B_0 = (1, X, X^2)$ de E.
3. Quel est le rang de b ?
4. b est-elle symétrique ? antisymétrique ? Déterminer la partie symétrique *M1* et la partie antisymétrique *M2* de *M = mat(b, B0)*.
5. A-t-on *b(P, P)* ≥ 0 pour tout polynôme *P*? à quelle condition sur *P* a-t-on *b(P, P)* = 0?